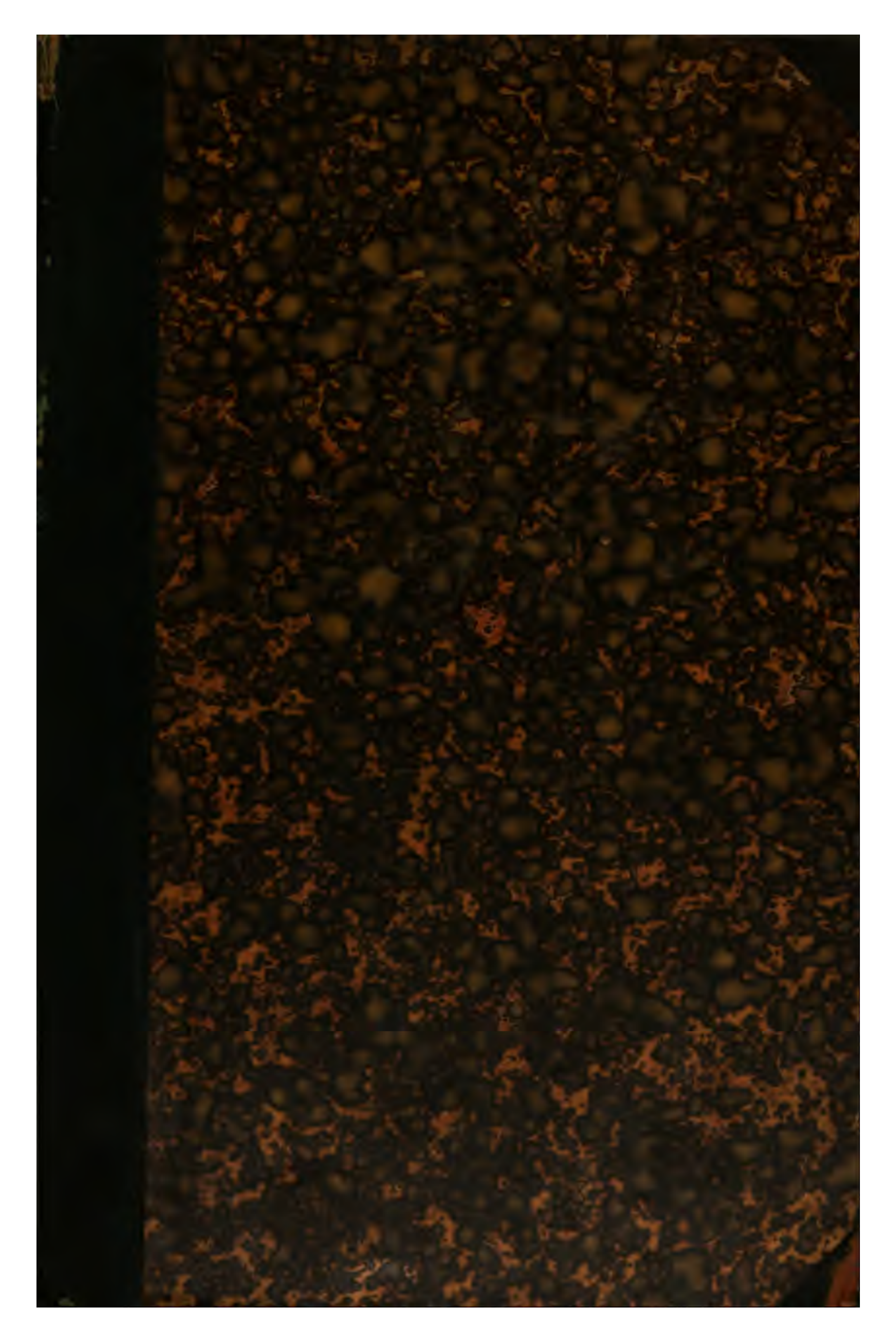
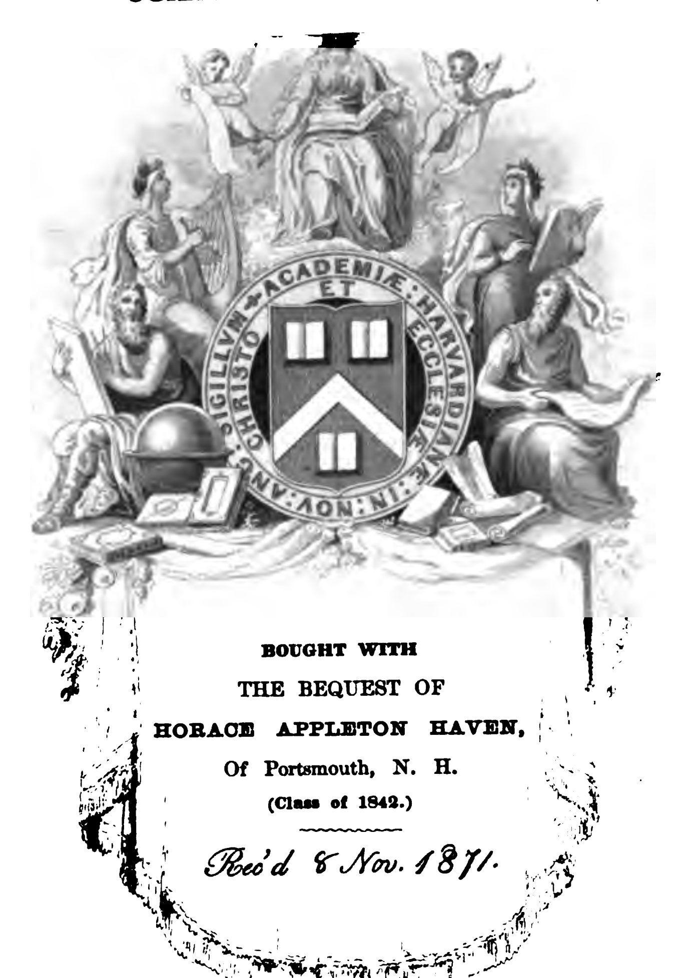



ACADEMIÆ HARVARDIANÆ
ET
ECCLESIÆ
CHRISTO
SIGILLVM
ANNO: 1650:IN:

DIE

DARSTELLENDE GEOMETRIE

IM SINNE DER

NEUEREN GEOMETRIE.

FÜR

SCHULEN TECHNISCHER RICHTUNG.

VON

JOSEF SCHLESINGER,

Privat-Docent für Geometrie der Lage, graphische Statik und darstellende Geometrie am k. k. polytechnischen Institute und Professor an der öffentlichen Oberrealschule des I. Bezirkes in Wien.

MIT 194 HOLZSCHNITTEN.

WIEN.

DRUCK UND VERLAG VON CARL GEROLD'S SOHN.

1870.

SEINEM

HOCHVEREHRTEN LEHRER

DEM HERRN

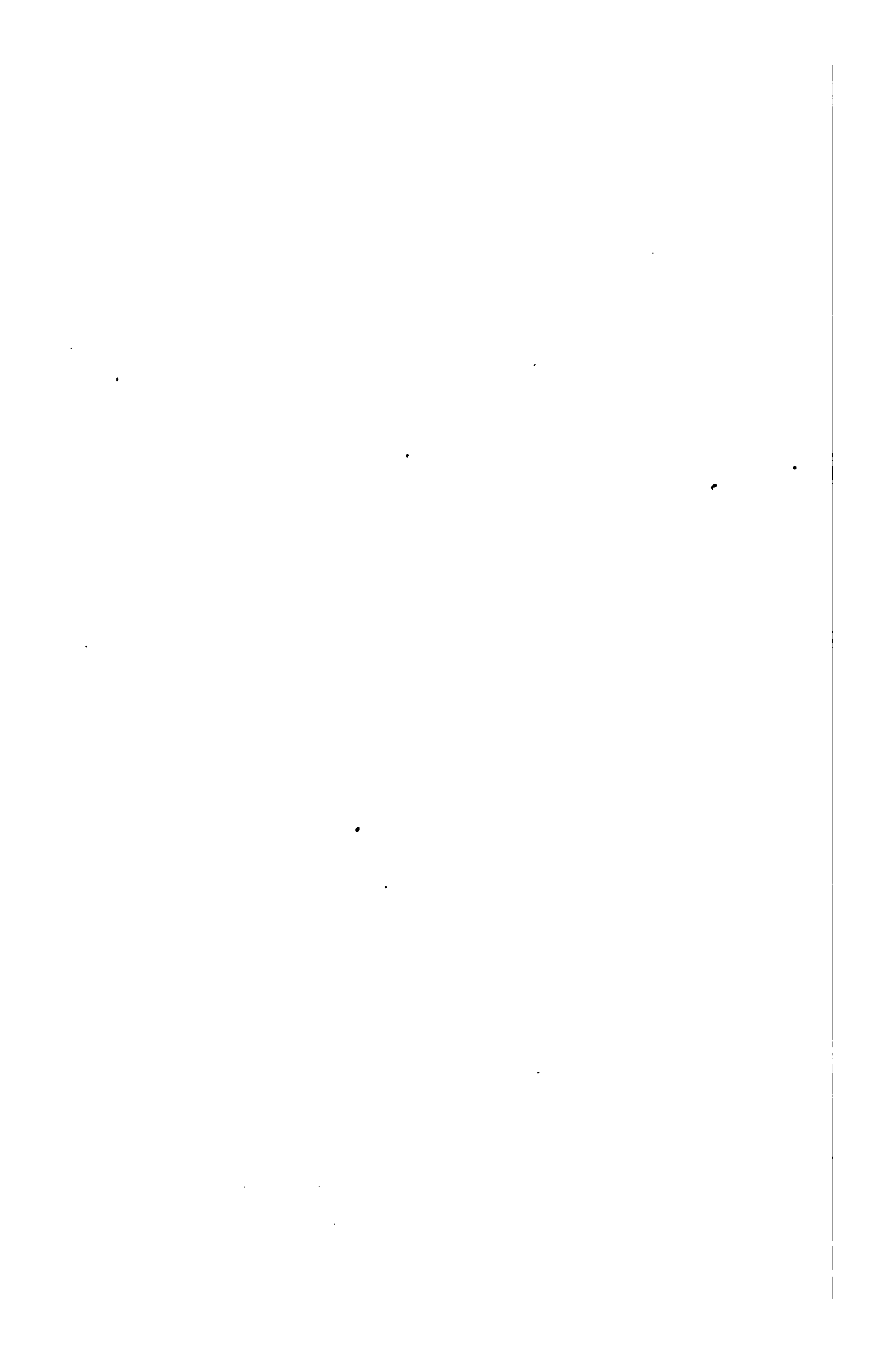
JOHANN HÖNIG,

o. ö. Professor der darstellenden Geometrie und derzeit Prorector am k. k. polytechnischen Institute zu Wien, Director der k. k. Realschul-Prüfungscommission, Gemeinderath von Wien, etc. etc.

DANKBAR GEWIDMET

VON

Jos. Schlesinger.



Vorwort.

Wiewol die darstellende Geometrie seit ihrer wissenschaftlichen Begründung durch Monge zu Ende des vorigen Jahrhundertes, vielseitig durchforscht und bereichert, zu einem vollendeten woleingerichteten Baue gedieh, haben die Fortschritte der reinen Geometerie, sowie auch die Entstehung der gráfischen Statik dennoch gezeigt, dass dieses Gebäude den Bedürfnissen der Gegenwart nicht mehr vollständig genügt, sondern mit Hinzuziehung neuen Materiales teilweise umgestaltet werden müsse.

Im Jahrgange 1863 der Schlömilch'schen Zeitschrift für Mathematik und Fisik werden diesen Anschauungen von Herrn Dr. Wilhelm Fiedler folgende Worte geliehen: „Das System der darstellenden Geometrie muss diese Constructionsmethoden der centralen Collineation oder der räumlichen homografischen Transformation in sich aufnehmen und es ist gewiss, dass sie in allen ihren Teilen davon grosse Vorteile zu ziehen im Stande sein wird. Das Letztere ist in vielem Einzelnen längst bekannt, und es kann nicht ausbleiben, dass auch die systematische Einführung der betreffenden Theorien der neueren Geometrie in die darstellende Geometrie vollzogen werden wird, weil sie eben dieser Letzteren naturgemäss angehören" — und in den Sitzungsberichten der

kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien, März 1867, finden diese Ansichten durch ihn insoweit eine Ausführung, als bei der Entwicklung der centralen Projection, der Zusammenhang der darstellenden Geometrie mit der Lagen-Geometrie nachgewiesen wird. Allerdings lässt sich hiedurch die Wissenschaftlichkeit der beschreibenden Geometrie in den höheren Sfären des Unterrichtes wesentlich fördern, allein dem elementaren Unterrichte erwächst daraus kein Gewinn.

In dem vorliegenden Buche suchte ich nun die Aufgabe zu lösen, die geeigneten Lehren der sogenannten neueren Geometrie in die darstellende Geometrie systematisch einzuführen, somit den Unterricht in letzterer Wissenschaft an Mittelschulen, und in Folge hievon auch an technischen Hochschulen, auf erweiterte Grundlagen zu stellen.

Möge es mir erlaubt sein, im Nachfolgenden die Grundzüge dieser Arbeit in Kürze zu erwähnen:

Die Vorbereitung zu einem erfolgreichen Studium der darstellenden Geometrie wird durch eine sichere Kenntniss der vorzüglichsten Lehren der reinen Geometrie, und durch die Gewandtheit im geometrischen Zeichnen bedingt. Da aber in den Real-Mittelschulen nur ein kleiner Teil der reinen Geometrie dem Studium der beschreibenden vorausgeht, so muss im Unterrichte der darstellenden Geometrie eine kurze Wiederholung namentlich jener geometrischen Lehren vorhergehen, welche mit Rücksicht auf ihre constructive Verwendung eine mehr oder weniger veränderte Behandlungsweise erfordern; insbesonders aber werden die stereometrischen Vorbegriffe einer vorzüglichen Würdigung zu unterziehen sein, weil mit ihnen der wichtigste Act der darstellenden Geometrie, die Ausbildung des Vorstellungsvermögens räumlicher Formen bei den Schülern zu beginnen ist. Die hiebei

entstehenden Schwierigkeiten zu überwinden, ist eine nicht unbedeutende Aufgabe für jeden Lehrer, indem bei deren unrichtiger Lösung jeder Fortschritt der Schüler im weiteren Unterrichte illusorisch wird. Es ist sonach dringend geboten, alle dieserhalb zur Anwendung gelangenden Hilfsmittel einer genauen Erwägung zu unterziehen, um die ungeeigneten unbenützt lassen zu können. In dieser Beziehung ist die allgemein übliche Methode, nach welcher perspectivartige Bilder zur Erklärung der räumlichen Operationen angefertigt werden, nicht als zweckdienlich zu erkennen; denn einerseits ist es eine nur selten zutreffende Voraussetzung, dass die Lernenden sich wirklich die abgebildeten Raumgebilde und Raumoperationen richtig in ihren gegenseitigen Beziehungen vorstellen, andererseits ist bei der Lehre von den orthogonalen Projectionen die Möglichkeit vorhanden, die Schüler mit der Vermengung von perspectivartigen und orthogonalen Bildern zu verwirren, und drittens ist es unlogisch, Projectionen in Anwendung zu bringen, ehe sie noch gelehrt wurden. Aus diesen Umständen fand ich mich denn auch veranlasst, auf die erwähnten Abbildungen zu verzichten und dafür zu räumlichen Gebilden, zu Modellen zu greifen. Nun ist aber bekanntermassen der häufige Gebrauch von Modellen der Ausbildung des mit Denken verbundenen Sehens nachteilig, also bleibt nur ein einziges rationelles Mittel übrig: die Lernenden zu nötigen, Modelle nach gegebenen Bedingungen selbst anzufertigen. Der Gebrauch von Schulmodellen ist auf ein Minimum zu beschränken.

Unter diesem Gesichtspunkte wurden die Vorbegriffe im ersten Abschnitte geschrieben und sind die dabei vorkommenden Figuren derart, dass sie zu Modellen ergänzt werden müssen, um ihre Zwecke zu erfüllen. In sehr vielen Fällen eignen sich die zur Hand liegenden Requisiten, um vorübergehend Modelle

anzufertigen; in dieser Anfertigung soll der Lernende eine vorzugsweise Uebung erlangen.

Im ersten Abschnitte wurde noch die Kugel mit einigen ihrer Eigenschaften behandelt; im mündlichen Unterrichte wird ein Modell mit den geeigneten Schnitten anzuwenden sein. Das Notwendigste aus der Kreislehre, welche des Zusammenhanges wegen im nächsten Abschnitte betrachtet wird, kann hier eingeschaltet werden.

Der zweite Abschnitt besteht aus zwei Teilen, von welchen der erstere das Projicieren auf gerade Linien bespricht und eine wesentliche Vorbereitung für das Projicieren auf zwei oder mehrere Ebenen bildet.

Der zweite Teil handelt von den geometrischen Verwandtschaften solcher Figuren, die in einer und derselben Ebene liegen. Im constructiven Unterrichte bilden diese Verwandtschaften ein vorzügliches Materiale, die Fertigkeit im geometrischen Zeichnen zu erhöhen, namentlich wird aber durch die fortwährende Beziehung einer Figur auf eine andere, durch das Construieren verwandter Punkte, verwandter Geraden, verwandter Tangenten u. s. w., der Sinn für die Auffassung geometrischer Gebilde geweckt, und es verursacht keine besondere Mühe durch die Aufstellung einfacher metrischer Beziehungen auf das projectivische Grundgesetz überzugehen, welches durch den Begriff eines Punktwertes unter der Form geometrischer Proportionen gegeben wird.

Um die Stralenbüschel einer Vergleichung unterziehen zu können, ohne die trigonometrischen Functionen zu benützen, welche den Lernenden auf dieser Lehrstufe gewöhnlich noch unbekannt sind, wurden sie nach den Punktreihen beurteilt, welche sie auf Transversalen erzeugen; unter den harmonischen Gebilden wurden die halbierten hervorgehoben und eine involutorische Punktreihe wurde als eine solche erklärt, die ihre

eigene indirecte Projection in veränderter Reihenfolge aufnehmen kann.

Nach der Erklärung der Verschwindungselemente und einer Erwähnung der in der darstellenden Geometrie am öftesten angewendeten Kreiseigenschaften, wurden die harmonischen Eigentümlichkeiten des Kreises in den Hauptumrissen erwähnt, die den Kreisen verwandten Gebilde durch die Collinear - Projection aus dem Kreise abgeleitet, und die vom Kreise unabhängige Construction dieser Linien auf Grund ihrer projectivischen Eigenschaften gelehrt. Endlich fanden die Gesetze der Reciprocität eine kurze Besprechung, und wurde noch der Nachweis geliefert, dass das reciproke Gebilde einer Linie II. Ordnung der Inbegriff aller Tangenten irgend einer anderen oder derselben Linie II. Ordnung ist.

Im dritten Abschnitte wird gezeigt, welchen Einfluss die vorangegangenen Lehren auf jene Elemente der darstellenden Geometrie nehmen, welche kaum einer neuen Behandlung für fähig gehalten wurden. Das Charakteristische des ersten Teiles dieses Abschnittes ist zunächst, wie schon erwähnt, die Vermeidung aller in schiefer Projection anzufertigenden Hilfsfiguren, das Bemerkenswerteste die Einführung der Sehrichtungen in Pfeilen ausgedrückt, die Vereinigungsart der verschiedenen Projectionsebenen mit der Zeichnungsebene nach Ordinatengesetzen, der Gebrauch der Deckelemente, die Bezeichnungsweise der Spuren und der Nullseite einer Ebene, der Ersatz des Umlegens ebener Figuren durch congruentes Projicieren und die Verwandtschaft der orthogonalen Projectionen ebener Figuren.

Nachdem noch die Axendrehungen und die projectivischen Eigenschaften der Ebenenbüschel zur Sprache gekommen, werden in den folgenden Unterabteilungen des dritten Abschnittes die axonometrischen, schiefen, centralen und collinearen Raumprojectionen insoweit behandelt, als die entwickelten Lehren hin-

reichen, ein jedes Gebilde in einer dieser Projectionsarten direct herstellen zu können.

Beachtenswert ist die Methode der schiefen Projection, welche ich durch die Einführung eines Hilfsauges, der Fluchtelemente u. s. w., schon vor sieben Jahren am Wiener Polytechnikum zu jener Ausbildung gebracht habe, die sich der Methode der freien Perspective gleichberechtigt zur Seite stellen kann; und nicht ohne Interesse dürfte gelesen werden: Ermittelt man von einem Raumgebilde und irgend einer horizontalen Projection von ihm, aus **einem** Projections-Centrum die centralen Bilder auf einer Verticalebene, so sind diese ein orthogonaler Grund- und Aufriss eines Reliefs des gegebenen Raumgebildes. Hiedurch ist die Construction der Relief-Projectionen in das Gebiet der gewöhnlichen Central-Projectionen zurückgeführt, und es bedarf erst keiner neuen umfangreichen Studien, um direct ein Relief eines gegebenen Raumgebildes darzustellen.

Bei der Theorie der Flächen im vierten Abschnitte weiche ich in sehr vielen Beziehungen von der herkömmlichen Behandlungsweise ab. In der Haupteinteilung werden Regelflächen und ihr Gegensatz, Curvenflächen, unterschieden. Jede Fläche besteht aus Punkten und je drei gegenseitig sich berührende Punkte bilden ein Elementar-Dreieck, durch welches eine Berührungsebene bestimmt ist. Bei dieser Grundanschauung der Flächen als Punktgebilde erscheinen Punkte, die in Spitzen oder Kanten einer krummen Fläche liegen, nicht als Ausnahmen, für welche die üblichen Begriffe über berührende Ebenen nicht gelten, sondern im Gegenteile, gerade jener Charakter, der sonst nur einer Kegelspitze eigen ist, wird hier allen Punkten einer Fläche zuerkannt. Es sei noch bemerkt, dass ein Unterschied zwischen einer berührenden und einer tangierenden Ebene, einer berührenden und einer

tangierenden Geraden besteht, und dass nur für gewisse Fälle der Unterschied beider als verschwindend klein anzunehmen ist.

Das Elementar-Dreieck lässt übrigens auch die Natur mancher Flächen in klarster Weise erkennen, wie dies namentlich die Untersuchung des windschiefen Flächenelementes zeigt, auf welche hier hingewiesen wird.

Die Pyramiden-, Prismen-, Kegel- und Cylinderflächen werden unter Einem als Stralenflächen betrachtet; die Constructionen ihrer ebenen Schnitte unterliegen den Gesetzen der projectivischen Verwandtschaft und durch Rollen der Stralenflächen entstehen ihre Netze, sowie die Cykloiden und Evolventenflächen, aus welchen die Begriffe der Cykloiden und Evolventen-Linien hervorgehen.

Eine besondere Aufmerksamkeit dürfte wol die Entstehung und Untersuchung der Curvenflächen nach projectivischem Principe in Anspruch nehmen, da fast alle der bekannten Flächen nun zu einer Flächenfamilie gehören. Wenn man bedenkt, dass nach projectivischem Principe jeder Punkt einer stetig fortbewegten Ebene eine Linie, jede Linie dieser Ebene eine Fläche beschreibt, dass die Bedingungen der Bewegung und jene der projectivischen Beziehung auf das mannigfaltigste abgeändert werden können, so ahnt man die Existenz einer Unzahl noch ungekannter Flächen, und erkennt ein weites Feld für neue geometrische Untersuchungen.

Auch in dem fünften und sechsten Abschnitte, welche Durchdringungen und Beleuchtungs-Constructionen, sowie im siebenten Abschnitte, welcher in Kürze die geometrischen Orte bespricht und einige der früheren Theorien erweitert, lässt sich der fruchtbringende Einfluss der vermehrten Grundlehren der darstellenden Geometrie nicht verkennen.

Nachdem ich nun eifrigst bemüht war, ein Lehrbuch der beschreibenden Geometrie zu schaffen, welches in praktischer

und in theoretischer Beziehung Alles aufgenommen, was zu einer gründlichen, den Anforderungen der Zeit entsprechenden Vorbildung für höhere technische Studien unumgänglich notwendig ist; glaube ich auch ein Hinderniss beseitigt zu haben, um den projectivischen Unterricht an Mittelschulen im Sinne der neueren Geometrie vornehmen, und darauf basiert, an polytechnischen Schulen fortsetzen zu können. Für letztere gedenke ich noch einen Supplementband folgen zu lassen.

Wien, im September 1869.

Jos. Schlesinger.

Erster Abschnitt.

Vorbegriffe.

Zweck und Mittel der darstellenden Geometrie. Allgemeine Projectionsgesetze.

§. 1.

1. Die darstellende Geometrie ist jene Wissenschaft, welche uns räumliche Formen nach geometrischen Gesetzen abzubilden lehrt.

Der Zweck einer Abbildung besteht entweder darin, in unserem Geiste eine Vorstellung von der Gestalt eines wirklichen oder eines gedachten Gebildes hervorzurufen, oder darin, nebst der Form auch alle Abmessungen der Gebilde und etwaige Beziehungen derselben zu einander erkennen zu lassen.

Die Flächen, auf welchen geometrische Abbildungen construiert werden, sind in den gewöhnlichsten Fällen Ebenen, Bildebenen genannt.

Das Mittel zur bildlichen Darstellung räumlicher Formen ist das Projicieren dieser Formen aus einem Punkte auf die Bildfläche.

Wenn man aus einem Punkte S zu einem anderen Punkte a eine gerade Linie, die wir etwa l nennen wollen, gehen lässt, und sich diese Gerade ins Unendliche beiderseits verlängert denkt, so sagt man, der Punkt a werde aus dem Punkte S durch die Gerade l projiciert; die l ist ein projicierender Stral, a ist der projicierte Punkt und S der Projections-Mittelpunkt oder das Projections-Centrum.

2. Schneidet der projicierende Strahl l die Bildebene, so nennt man den Schnittpunkt die Projection des projicierten Punktes auf der Bildebene.

3. Das Projections-Centrum, der projicierte Punkt und seine Projection liegen demnach immer in einer

geraden Linie, oder was dasselbe bedeutet: Der projicierte Punkt und seine Projection liegen perspectivisch.

Wenn man mit einem Auge einen fisischen Punkt, z. B. die Bleistiftspitze, betrachtet, so wird diese mit einem Punkte des zunächst dahinter liegenden Gegenstandes zusammenzufallen scheinen. Jener Punkt ist die Projection der Bleistiftspitze aus dem Auge auf die Oberfläche des Gegenstandes, weil man nach geraden Linien sieht, so lange keine Ursachen zur Abweichung des sich geradlinig fortpflanzenden Lichtes von dieser Richtung vorhanden sind. Solche störende Ursachen wollen wir bei dem Projicieren als nicht vorhanden annehmen.

4. Sieht man mit einem Auge durch eine Fensterscheibe nach einem dahinter liegenden Gegenstande, so scheint jeder Punkt desselben mit einem Punkte der Scheibe zusammenzufallen. Markiert man an ihr alle sichtbaren Ecken und bemerkenswerten Linien des Gegenstandes, so erhält man auf der Glastafel ein lineares Bild desselben, welches als eine centrale Projection des Gegenstandes aus dem optischen Mittelpunkte des Auges anzusehen ist. Würde man jetzt den Gegenstand entfernen, so würde die Zeichnung auf der Glastafel dem Auge noch immer scheinbar das Object zeigen, und je vollkommener das Bild angefertigt ist, desto mehr werden wir uns zu glauben versucht fühlen, das Object wirklich selbst zu sehen.

Das Sehen ist demnach im Sinne der darstellenden Geometrie ein Projicieren der sichtbaren Dinge auf eine Fläche, am besten auf eine Ebene, die man sich durch die Vorstellungskraft irgendwo in der Luft aufgestellt denkt; daher kann man sich vorstellen, dass alles Sichtbare gleichsam auf einer Ebene liegt und desshalb ist es auch möglich, getreue Abbildungen von sichtbaren Dingen auf Ebenen zu erzeugen.

Ausser den Flächenabbildungen kann man noch andere Abbildungen körperlicher Dinge herstellen, die aber selbst wieder körperlich sind und desshalb als Modelle und Reliefs, wissenschaftlich als Raum- oder Collinear-Projectionen bezeichnet werden. Die Gesetze, nach welchen eine Collinear-Projection aus einem gegebenen Objecte abgeleitet wird, sind folgende zwei allgemeine Projectionsgesetze:

5. *a*) Die Collinear-Projection eines jeden Punktes ist wieder ein Punkt im projicierenden Strale.

6. *b*) Die Collinear-Projection einer jeden Geraden ist wieder eine Gerade, und die Schnittpunkte aller Geraden mit ihren Collinear-Projectionen liegen durchwegs in einer und derselben Ebene. (Begegnungsebene, Collineationsebene.)

Ein Beispiel, welches diese Bildung der Collinear-Projectionen, aber unter eingeschränkten Bedingungen zeigt, bietet die Spiegelung der Gegenstände auf ebenen Spiegelflächen. Denken wir uns, es sei hinter der Spiegelfläche, dort wo wir einen Gegenstand zu sehen vermeinen, wirklich ein Gegenstand statt dem Spiegelbilde eines gegebenen Objectes, so finden wir nach den Lehren der Fisik: 1. Jeder Punkt liegt mit seinem Spiegelbilde in einer zur Spiegelebene senkrechten Geraden, d. h. alle projicierenden Stralen sind parallel, oder das Projections-Centrum liegt unendlich weit von der Spiegelebene entfernt, und 2. jede Gerade des Gegenstandes begegnet in der Verlängerung ihrem Spiegelbilde in einem Punkte der Spiegelebene. Diese Eigenschaften stimmen mit den zwei allgemeinen Projectionsgesetzen vollständig überein, folglich ist das Spiegelbild, insoferne man es sich als wirklichen Gegenstand denkt, eine Collinear-Projection eines andern Gegenstandes aus einem unendlich fernen Projections-Centrum.

In ganz allgemeinen Fällen kann die Collinear-Projection eines Gegenstandes mit dem Gegenstande auch auf einerlei Seite der Begegnungsebene liegen.

Wir sollten nun auf die Constructionen der Abbildungen übergehen; allein die Nothwendigkeit, eine Reihe von für die darstellende Geometrie sehr wichtigen Vorbegriffen über die Lagen von Punkten, geraden Linien und Ebenen tüchtig inne zu haben, erfordert vorher diese Begriffe und Beziehungen zu besprechen.

Begriffe von geometrischen Flächen, Linien und Punkten. Gerade Linien und Ebenen.

§. 2.

7. Wie setzt die Geometrie den Raum, in dem sich alles Körperliche befindet, voraus?

Unendlich, d. i. ohne Ende.

8. Wie unterscheidet sich eine geometrische Fläche von einer fisischen?

Die Grenze eines jeden materiellen Körpers ist eine fisische Fläche. Alle materiellen festen Körper bestehen nach den Lehren der Fisik aus Molekülen, die durch anziehende und abstossende Kräfte verbunden sind; in Folge der letzteren Kräfte besteht zwischen je zwei benachbarten Molekülen noch ein unendlich kleiner Zwischenraum, und desshalb müssen wir schliessen, dass eine fisische Fläche eine unterbrochene, eine unstetige Fläche ist. Wenn wir uns aber eine ununterbrochene, eine stetige Fläche denken, so bezeichnen wir dieselbe als eine geometrische Fläche. Geometrische Flächen sind in Wirklichkeit nicht vorhanden, sie bestehen nur in unserer Einbildung. Geometrische Flächen sind also continuierlich, fisische Flächen discontinuierlich.

9. Was verstehen wir unter einem geometrischen Körper?

Einen leeren von geometrischen Flächen begrenzten Raum.

10. Was verstehen wir unter einem geometrischen Punkt?

Den kleinsten, also unteilbaren Raum. Wir können uns einen geometrischen Punkt ebensowenig vorstellen, wie den unendlichen Raum.

11. Wenn wir im Raume einen Punkt für das Auge sichtbar machen wollen, so setzen wir an die Stelle des geometrischen Punktes einen fisischen Punkt; wir sagen dann, wir haben uns den geometrischen Punkt versinnlicht. Je kleiner der fisische Punkt, desto enger schliesst er den geometrischen Punkt ein, ohne aber jemals ein solcher zu sein.

12. Was versteht man unter einer geometrischen Linie?

Eine stetige Aufeinanderfolge geometrischer Punkte.

13. Wodurch werden geometrische Flächen geteilt?

Durch geometrische Linien; diese sind demnach die Grenzen von geometrischen Flächen.

14. Geometrische Linien werden durch geometrische Punkte geteilt; diese sind also die Grenzen geometrischer Linien.

15. Welche Punkte des unbegrenzten Raumes werden unendlich ferne Punkte genannt?

Jene Punkte, welche sich von uns oder von einem anderen wirklichen Punkte unendlich weit entfernt befinden. Wir können

also wol von unendlich fernen Punkten sprechen, aber die Orte wo sie liegen, können wir uns nicht versinnlichen.

16. Was versteht man unter zwei congruenten Linien?

Zwei Linien, welche so ineinander gelegt werden können, dass sie ihrer ganzen Ausdehnung nach sich decken. Selbstverständlich darf keine Linie ihre Form dabei verändern.

17. Wann werden zwei congruente Linien gerade Linien genannt?

Wenn zwei unbegrenzte Linien ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen, sobald irgend zwei Punkte der einen Linie in der andern liegen.

Spannt man zwei feine Fäden schraff so an, dass sie so gut als möglich durch zwei gegebene Punkte gehen, so liegen diese Fäden ihrer Ausdehnung nach nebeneinander und versinnlichen uns annähernd zwei gerade Linien.

18. Wir sehen hieraus ohne Beweis ein, durch zwei Punkte kann eine und nur eine gerade Linie gezogen werden; auch erkennt man den Satz:

Alle geraden Linien sind untereinander congruent.

19. Was verstehen wir unter einer Strecke?

Eine durch zwei Punkte begrenzte Gerade.

20. Ist eine Strecke unendlich klein, so wird sie ein Linienelement genannt.

21. Was versteht man unter einer krummen Linie oder einer Curve?

Eine Linie, bei welcher die aufeinander folgenden Linienelemente, aus welchen man sie sich zusammengesetzt denkt, nicht in derselben Geraden liegen.

22. Was verstehen wir unter einer Tangente einer Curve?

Eine gerade Linie, welche mit einer Curve ein Linienelement gemeinsam hat (20); dasselbe wird Berührungselement, oft auch Berührungspunkt der Tangente genannt.

23. Was verstehen wir unter einer Ebene?

Eine Fläche von der Eigenschaft, dass jede gerade Linie, die man durch irgend zwei Punkte der Fläche zieht, ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Fläche liegt.

24. Wie kann man eine Ebene erzeugen?

Man verbindet einen ausserhalb einer unbegrenzten Geraden a liegenden Punkt A mit allen Punkten der Geraden a durch unbegrenzte gerade Linien; alle diese Geraden zusammen machen eine Ebene aus.

25. Was kann man von zwei sich schneidenden geraden Linien a und b behaupten?

Man kann durch sie eine und nur eine einzige Ebene legen. Denken wir uns eine Gerade c so angenommen, dass sie die beiden Geraden a und b schneidet; wählen wir dann in c einen beliebigen Punkt A und verbinden ihn mit allen Punkten von a durch gerade Linien, so müssen diese auch b schneiden, was wir ohne weiteren Beweis erkennen. Würde sich in A ein projicierendes Auge befinden, so würde diesem die Gerade a mit b zusammenfallend erscheinen.

26. Was sagt man von Punkten oder Linien, durch welche man eine und nur eine Ebene legen kann?

Sie seien Bestimmungsstücke einer Ebene.

Welches sind nun Bestimmungsstücke einer Ebene?

27. a) Eine Gerade und ein ausserhalb liegender Punkt;

28. b) zwei sich schneidende oder zwei parallele Gerade (33);

29. c) drei Punkte, die nicht in derselben geraden Linie liegen.

30. In wie viel Punkten kann eine Gerade eine Ebene schneiden?

Nur in einem Punkte; denn liegen zwei Punkte einer Geraden in einer Ebene, so muss die Gerade ganz in der Ebene liegen (23).

31. In was für einer Linie müssen sich zwei Ebenen schneiden?

In einer geraden Linie. Denn legt man durch irgend zwei Punkte der Schnittlinie eine Gerade, so muss diese in jeder der beiden Ebenen liegen (23).

32. Wann werden zwei Ebenen parallel genannt?

Wenn ihre Durchschnittsgerade im Unendlichen liegt.

33. Wann werden zwei gerade Linien parallel und wann sich kreuzend genannt?

Wenn sie sich in einem unendlich fernen Punkte schneiden, sind sie parallel; wenn sie aber weder parallel sind, noch sich schneiden, dann sagt man sie kreuzen sich.

34. Wie erhält man parallele gerade Linien?

Zieht man in einer Ebene gerade Linien, die weder nach der einen oder nach der anderen Seite hin verlängert sich schneiden, dann sind die Geraden parallel; ihr Schnittpunkt liegt im Unendlichen, was eben so viel bedeutet, als die Geraden liegen in einer Ebene und schneiden sich nicht.

35. Schneidet man zwei parallele Ebenen mit einer dritten Ebene, so entstehen zwei parallele Durchschnittsgerade; denn die beiden Geraden müssen sich in der Durchschnittslinie der beiden parallelen Ebenen, also in unendlicher Entfernung schneiden.

36. Was geschieht mit zwei unbegrenzten Ebenen, wenn sie drei Punkte, die nicht in derselben Geraden liegen, gemein haben?

Sie decken sich; denn alle Ebenen sind untereinander congruent (26, 29).

Wenn man durch alle Punkte einer Geraden eine Reihe paralleler Geraden zieht, was für eine Fläche wird durch sie gebildet? (24.)

Die ebenen Winkel. Rechte Winkel. Senkrechte Gerade. Dreieckswinkel.

§. 3.

37. Ein vollständiger ebener Winkel ist jener Raum, den eine unbegrenzte Gerade durchläuft, wenn sie sich um einen in ihr angenommenen festen Punkt dreht, und dabei eine Ebene beschreibt. Der feste Punkt ist der Scheitel, und die erste und die letzte Lage der sich bewegenden Geraden sind die Schenkel des Winkels.

38. Jede unbegrenzte Gerade wird durch jeden in ihr angenommenen Punkt in zwei Teile geteilt, deren jeder eine Halbgerade oder auch ein Halbstral genannt wird.

39. Ein vollständiger ebener Winkel besteht aus zwei einfachen Winkeln, Scheitelwinkel genannt.

40. Scheitelwinkel sind einander gleich, weil sie vermöge ihrer Entstehung aus gleich vielen Halbstralen zusammengesetzt sind.

41. Ist der Raum eines vollständigen ebenen Winkels noch keine vollständige Ebene, so ist der fehlende Teil abermals ein

vollständiger Winkel, der Ergänzungswinkel des gegebenen Winkels zu einem vollen Winkel.

42. Die Summe zweier Ergänzungswinkel ist demnach immer einer vollständigen Ebene gleich.

43. Jede unbegrenzte Gerade teilt eine Ebene in zwei Halbebenen.

44. Jede Halbebene kann als ein einfacher Winkel angesehen werden, der entsteht, wenn sich ein Halbstral um seinen festen Endpunkt so lange in einer Ebene weiter dreht, bis er die Verlängerung seiner ersten Lage bildet.

45. Ein der Halbebene gleicher Winkel heisst ein flacher Winkel.

46. Wird ein flacher Winkel in zwei einfache Winkel geteilt, so nennt man jeden den Nebenwinkel des andern. Die Summe von zwei Nebenwinkeln ist daher gleich einem flachen Winkel.

47. Die einfachen Winkel werden durch die Menge ihrer Halbstralen gemessen.

Die Menge der Halbstralen wächst in demselben Verhältnisse, in welchem der Kreisbogen wächst, den irgend ein Punkt des Halbstrales bei seiner Bewegung um den Scheitel des Winkels beschreibt (336).

48. Um Winkel in ihrer Grösse zu vergleichen, wird man also die Längen der Kreisbogen vergleichen, die man mit gleichen Radien aus den Winkelscheiteln als Mittelpunkte zwischen den Winkelschenkeln beschreiben kann.

49. Gleiche Winkel sind congruent, d. h. man kann sie zur Deckung bringen.

50. Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so wird jeder ein rechter Winkel oder kurzweg ein Rechter genannt.

Ein rechter Winkel ist sonach jener, der seinem Nebenwinkel gleich ist.

Ein rechter Winkel R ist die Hälfte eines flachen Winkels oder der vierte Teil einer Ebene, d. i. eines vollen Winkels.

51. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Die Summe von zwei Nebenwinkeln ist zwei Rechten gleich.

Jeder Winkel, der kleiner ist als ein Rechter, wird ein spitzer, jener Winkel, der grösser ist als ein Rechter, aber kleiner als ein flacher Winkel, wird ein stumpfer Winkel genannt.

Man sagt, zwei gerade Linien stehen aufeinander senkrecht, wenn sie einen rechten Winkel einschliessen.

52. Zwei sich schneidende unbegrenzte gerade Linien erzeugen in ihrer Ebene vier einfache Winkel, und sind die Geraden auf einander senkrecht, so ist jeder von ihnen ein rechter Winkel.

Der Winkel paralleler Geraden wird gleich Null gesetzt?

53. Drehen sich in einer Ebene zwei Halbstralen a und b um ihre festen Endpunkte A und B derart, dass sie stets zu einander parallel bleiben, so beschreiben beide Stralen einfache Winkel von gleich vielen Halbstralen, also gleiche Winkel; a und b können dabei entweder im gleichen oder auch im entgegengesetzten Sinne von ihren Scheitelpunkten aus betrachtet, parallel sein. Solche Winkel kann man parallele Winkel nennen. Parallele Winkel sind einander gleich.

54. Die Schenkel paralleler Winkel sind beziehungsweise zu einander parallel, und zu jedem Halbstral des einen Winkels gibt es einen parallelen Halbstral im andern Winkel.

55. Parallele Winkel sind gleichzeitig spitze oder gleizeitig stumpfe Winkel.

56. Sind die Schenkel zweier Winkel zwar parallel, ist aber der eine ein spitzer, der andere ein stumpfer Winkel, so ist die Summe beider Winkel gleich zwei Rechten. Denn die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten und jeder Nebenwinkel von einem der in Frage stehenden Winkeln ist ein Parallelwinkel zum andern, also jenem gleich.

57. Zieht man zu zwei sich kreuzenden Geraden, d. i. zu zwei Geraden, die sich nicht schneiden und nicht parallel sind, zwei beziehungsweise parallele sich schneidende Gerade, so nennt man den Winkel, den die letzteren einschliessen, auch den Winkel der sich kreuzenden Geraden (33).

58. Werden zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden geschnitten, so entstehen acht einfache Winkel; zu jedem gibt es zwei parallele Winkel, die zu einander Scheitelwinkel sind.

Werden zwei gerade Linien a und b einer Ebene von einer dritten Geraden in den Punkten A und B geschnitten und ist ein Winkel bei A dem correspondierenden bei B gleich, so sind beide Parallelwinkel, folglich sind a und b zu einander parallel. (53.)

59. Errichtet man in einer Ebene auf eine Gerade zwei andere Gerade senkrecht, so sind sie zu einander parallel; denn es

entstehen acht rechte Winkel, und wegen der Gleichheit aller rechten Winkel entstehen auch Parallelwinkel, folglich sind die zwei Senkrechten zu einander parallel (54).

60. Errichtet man in einer Ebene auf parallele gerade Linien Senkrechte, so sind diese letzteren auch untereinander parallel, weil Parallelwinkel entstehen.

61. Steht in einer Ebene eine gerade Linie auf einer von zwei parallelen Geraden senkrecht, so steht sie auch auf der anderen Geraden senkrecht, weil Parallelwinkel entstehen.

62. Sind die Schenkel eines spitzen oder stumpfen Winkels auf den Schenkeln eines anderen spitzen oder stumpfen Winkels beziehungsweise senkrecht, so sind die beiden Winkel einander gleich.

63. Sind die Schenkel eines spitzen oder stumpfen Winkels auf den Schenkeln eines anderen stumpfen oder spitzen Winkels beziehungsweise senkrecht, so ist die Summe beider Winkel gleich zwei Rechten.

Beide Sätze lassen sich leicht beweisen, wenn man durch den Scheitel des einen Winkels einen Parallelwinkel zum andern legt.

64. Verlängert man eine Dreiecksseite über einen Eckpunkt des Dreieckes hinaus, so entsteht ein Aussenwinkel des Dreieckes.

Jeder Aussenwinkel ist ein Nebenwinkel eines inneren Winkels.

Jedes Dreieck besitzt sechs Aussenwinkel.

65. Jene zwei inneren Winkel eines Dreieckes, welche nicht Nebenwinkel eines Aussenwinkels sind, heissen die Gegenwinkel des Aussenwinkels.

66. Jeder Aussenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe seiner Gegenwinkel. Denn zieht man durch den Scheitel des Aussenwinkels einen Halbstral parallel zur dritten Dreiecksseite so, dass er den Aussenwinkel teilt, so ist jeder Teil ein Parallelwinkel zu einem der beiden Gegenwinkel.

67. Die Summe der inneren Dreieckswinkel beträgt einen flachen oder zwei rechte Winkel?

68. Zieht man in einer Ebene eine gerade Linie *s* unter gleichen Winkeln gegen zwei Gerade *b* und *c*, dann sagt man *s* sei gegen *b* und *c* gleichgeneigt, oder auch *s* schneidet die Geraden *b* und *c* unter gleichen Winkeln.

Schneidet man vom Scheitel *a* des Winkels aus, auf beiden Geraden gleich lange Strecken ab, und verbindet sie durch gerade Linien, so erhält man zu *b* und *c* zwei gleichgeneigte Richtungen; die eine gehört zu dem spitzen, die andere zu dem stumpfen Winkel den *b* mit *c* bildet.

69. Sind zwei Dreieckseiten zur dritten Seite gleichgeneigt, so besitzt das Dreieck zwei gleiche Winkel, die an der dritten Seite liegen.

70. Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist bekanntlich auch gleichschenklig, denn halbiert man den dritten Winkel, so entstehen zwei congruente Dreiecke, woraus dann folgt: 1. die Halbierungsgerade steht auf der Grundlinie senkrecht; 2. sie halbiert die Grundlinie und 3. die beiden andern Dreiecksseiten sind einander gleich.

71. Sind je zwei Dreiecksseiten zur dritten Seite gleichgeneigt, so ist das Dreieck gleichseitig, folglich ist jeder Winkel Zweidrittel eines Rechten.

Flächenwinkel. Zu einander senkrechte Ebenen. Die Normalen einer Ebene.

§. 4.

72. Ein vollständiger Flächenwinkel ist jener Raum, den eine unbegrenzte Ebene durchläuft, wenn sie sich um eine in ihr angenommene feste Gerade dreht. Diese feste Gerade ist die Scheitellinie und die erste und letzte Lage der sich bewegenden Ebene sind die Schenkel des Winkels.

73. Ein vollständiger Flächenwinkel besteht aus zwei einfachen Flächenwinkeln, Scheitelwinkel genannt.

74. Scheitelwinkel sind einander gleich, weil sie vermöge ihrer Entstehung aus gleich vielen Halbebenen zusammengesetzt sind.

75. Ist der Raum eines vollständigen Flächenwinkels noch nicht der ganze unendliche Raum, so ist der fehlende Theil abermals ein vollständiger Flächenwinkel, der Ergänzungswinkel des gegebenen Winkels zum unbegrenzten Raum.

76. Die Summe zweier Ergänzungs-Flächenwinkel ist demnach dem ganzen unendlichen Raume gleich.

77. Jede unbegrenzte Ebene teilt den unendlichen Raum in zwei Halbräume.

78. Jeder Halbraum kann als ein einfacher Flächenwinkel angesehen werden, der entsteht, wenn sich eine Halbebene um ihre feste Begrenzungsgerade so lange weiter dreht, bis sie die Verlängerung oder Erweiterung ihrer ersten Lage bildet.

79. Ein dem Halbraume gleicher Flächenwinkel heisst ein flacher Flächenwinkel.

80. Wird ein flacher Flächenwinkel in zwei einfache Flächenwinkel geteilt, so nennt man jeden den Nebenflächenwinkel des andern. Die Summe von zwei Nebenflächenwinkeln ist daher gleich einem flachen Flächenwinkel.

. 81. Gleiche Flächenwinkel sind congruent, d. h. man kann sie so ineinander legen, dass die Schenkel des einen mit den Schenkeln des anderen zusammenfallen.

82. Sind zwei Nebenflächenwinkel einander gleich, so wird jeder ein rechter Flächenwinkel genannt.

Ein rechter Flächenwinkel ist sonach jener, der seinem Nebenflächenwinkel gleich ist.

83. Ein rechter Flächenwinkel R ist die Hälfte eines flachen Flächenwinkels oder der vierte Teil des unendlichen Raumes, d. i. eines vollen Flächenwinkels.

84. Alle rechten Flächenwinkel sind einander gleich.

Die Summe von zwei Nebenflächenwinkeln ist zwei rechten Flächenwinkeln gleich.

85. Jeder Flächenwinkel, der kleiner ist als ein rechter Flächenwinkel, wird ein spitzer; jener Flächenwinkel, der grösser ist als ein rechter aber kleiner als ein flacher Flächenwinkel, wird ein stumpfer Flächenwinkel genannt.

Fig. 1.

86. Man sagt zwei Ebenen stehen aufeinander senkrecht, wenn sie einen rechten Flächenwinkel einschliessen (82).

87. Zwei sich schneidende unbegrenzte Ebenen erzeugen im Raume vier einfache Flächenwinkel und sind die Ebenen aufeinander senkrecht, so ist jeder von ihnen ein rechter Flächenwinkel.

Der Winkel paralleler Ebenen wird gleich Null gesetzt?

88. Drehen sich im Raume zwei Halbebenen a und b um ihre festen Begrenzungsgeraden A und B derart, dass sie stets zu einander parallel bleiben, so beschreiben beide Halbebenen einfache Flächenwinkel von gleich vielen Halbebenen, also gleiche Flächenwinkel; a und b können dabei entweder im gleichen oder auch im entgegengesetzen Sinne von ihren Scheitellinien aus betrachtet, parallel sein. Solche Flächenwinkel kann man parallele Flächenwinkel nennen. Parallele Flächenwinkel sind einander gleich.

89. Die Schenkel paralleler Flächenwinkel sind beziehungsweise zu einander parallel und zu jeder Halbebene des einen Flächenwinkels gibt es eine parallele Halbebene im anderen Flächenwinkel.

90. Parallele Flächenwinkel sind gleichzeitig spitze oder gleichzeitig stumpfe Winkel.

91. Sind die Schenkel zweier Flächenwinkel zwar parallel, ist aber der eine ein spitzer, der andere ein stumpfer Winkel, so ist die Summe beider Winkel gleich zwei Rechten.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so entstehen acht einfache Flächenwinkel; zu jedem gibt es zwei parallele Flächenwinkel, die zu einander Scheitelwinkel sind.

92. Werden zwei Ebenen a und b von einer dritten Ebene in den Geraden A und B geschnitten und ist ein Winkel bei A dem correspondirenden Winkel bei B gleich, so sind beide Parallelwinkel; folglich sind die Ebenen a und b zu einander parallel.

93. Errichtet man in einer von zwei aufeinander senkrechten Ebenen auf die Durchschnittsgerade eine senkrechte Gerade, so steht diese auf allen Geraden senkrecht, die man in der anderen Ebene durch ihren Fusspunkt ziehen kann. Um diesen sehr wichtigen Satz in Verbindung mit sinnlicher Anschauung zu beweisen, nehme der Lernende in Ermanglung von wirklichen geometrischen Ebenen, zwei Blätter ebenen Papieres, bringe sie zur Deckung, ziehe im ersten Blatt zwei unter einem rechten Winkel sich schneidende gerade Linie a und xx (Fig. 1), sodann auch im zweiten Blatt zwei solche Gerade a' und $x'x'$, jedoch so, dass a und a', ebenso xx und $x'a'$ sich decken, so muss auch der Schnittpunkt A von a und xx den Schnittpunkt A' von a' mit $x'x'$ decken. Sodann ziehe man in der ersten Ebene durch A eine beliebige Halbgerade b mit A als Endpunkt und im zweiten Blatt eine Halb-

gerade b', die von b gedeckt wird, so ist der spitze Winkel w, den b mit x einschliesst, dem Winkel w' gleich, den b' mit x' bildet, weil sich beide Winkel decken.

Die Gerade xx teilt das erste Blatt in zwei Teile, B und C, wie es Fig. 1 zeigt; ebenso teilt auch $x'x'$ das zweite Blatt in zwei Theile B' und C'.

Nun falte man beide Blätter längs den Geraden xx und $x'x'$, stelle die Ebene B senkrecht zu C (86), so ist auch die Ebene B' senkrecht zu C' und ist nun zu beweisen, dass die Gerade a auf b, oder was dasselbe ist, dass a' auf b' senkrecht steht.

Man nehme das erste Blatt und lege es mit seiner Rückseite von B so an die Rückseite von B', dass xx mit $x'x'$ und A mit A' zusammenfällt, so muss auch a mit a' zusammenfallen, weil a auf xx und a' auf $x'x'$ senkrecht ist. Nun muss aber die Halbgerade b in die Verlängerung von b' fallen, denn erstens fällt schon die Ebene C in die Erweiterung von C', wegen des senkrechten Standes der Ebenen B gegen C und B' gegen C', und zweitens haben die einander gleichen Winkel w und w' den Scheitel A und einen Schenkel xx, welcher mit $x'x'$ zusammenfällt, gemein; folglich sind w und w' Scheitelwinkel und deshalb fällt b in die Verlängerung von b'.

Die beiden Winkel, welche von a mit b und von a' mit b' gebildet werden, sind jetzt Nebenwinkel; weil aber diese Winkel vorher, ehe man noch die Rückseiten von B und B' vereinigte, sich deckten, so sind sie einander gleich, mithin ist jeder ein Rechter, also ist a zu b senkrecht, was zu beweisen war (50).

Einige der folgenden Sätze betrachte man unter Ansicht des Modelles zu Fig. 1.

94. Eine Normale, ein Perpendikel oder eine Senkrechte zu einer Ebene ist jene Gerade, welche auf allen durch ihren Schnittpunkt in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht steht. In dem zu Fig. 1 angefertigten Modelle ist die Gerade a eine Normale zur Ebene C, weil a auf b senkrecht steht und b jede beliebige Gerade bedeutet, die man in der Ebene C durch den Fusspunkt A ziehen kann.

95. Zieht man durch irgend einen Punkt A einer Geraden a alle zu ihr möglichen Senkrechten, so bilden diese eine Ebene, auf der die Gerade a senkrecht steht; denn diese Gerade entspricht dem Begriffe einer Normale (94).

96. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so sagt man auch umgekehrt, *die Ebene stehe senkrecht auf der Geraden.*

97. Durch einen angenommenen Punkt einer Geraden kann man auf diese nur eine einzige senkrechte Ebene errichten. Ist die Gerade ein Schenkel und der angenommene Punkt der Scheitel eines rechten Winkels, und dreht man den rechten Winkel um den festen Schenkel, so beschreibt der andere Schenkel die einzig mögliche durch den Scheitel gehende senkrechte Ebene.

98. *Durch einen Punkt A einer Ebene kann man nur eine einzige Normale zur Ebene errichten*; denn ist a eine Normale zu einer Ebene C und denkt man sich durch A irgend eine Gerade p gezogen, welche aber nicht mit a zusammenfällt, so kann man durch a und p eine Hilfsebene legen, welche die Ebene C in einer Geraden schneiden wird, die wir b nennen wollen. Weil a auf der Ebene C senkrecht steht, so ist der von a mit b eingeschlossene Winkel ein Rechter, folglich ist der von p mit b eingeschlossene Winkel ein vom rechten Winkel verschiedener, d. h. p steht nicht senkrecht auf b, folglich auch nicht senkrecht auf der Ebene C, also ist a die einzige Normale durch A zur Ebene C.

99. *Steht eine Gerade auf zwei an deren sich schneidenden Geraden senkrecht, so ist sie auch senkrecht zur Ebene dieser Geraden*; denn steht bei dem Modell zu Fig. 1 die Gerade a auf b und xx senhrecht, so ist nachweisbar, dass der Flächenwinkel BC dem Flächenwinkel $B'C'$ gleich ist, dass also die Ebene B auf C, folglich auch a nach (93) auf der Ebene C senkrecht steht.

100. Bewegt sich eine Gerade in einer von zwei aufeinander senkrechten Ebenen so weiter, dass sie stets auf der Durchschnittsgeraden beider Ebenen senkrecht ist, so steht sie auch in jeder ihrer Lagen senkrecht auf der zweiten Ebene. Hieraus folgt:

Bewegt sich eine Gerade a so weiter, dass sie auf einer Ebene senkrecht bleibt und dabei stets eine und dieselbe Gerade der Ebene schneidet, so erzeugt sie eine zweite Ebene, die auf der ersteren senkrecht steht; die Gerade a bleibt zu ihrer ersten Lage parallel (59).

Um daher durch eine Gerade b, die schief zu einer Ebene u steht, eine Ebene senkrecht zur Ebene u zu legen, wird man durch irgend einen Punkt der Geraden b eine Normale zur Ebene

u ziehen, dann muss die durch diese Normale und die Gerade *b* gelegte Ebene senkrecht auf der Ebene *u* sein.

101. Steht eine Gerade *a* auf einer Ebene *C* senkrecht, so ist jede durch *a* gelegte Ebene *B* senkrecht zur Ebene *C*. Denn die Ebene *B* kann man sich entstanden denken durch die parallele Weiterbewegung der Geraden *a* längs einer in der Ebene *C* liegenden Geraden *xx* (100).

102. Stehen zwei Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht, so ist auch ihre Durchschnittsgerade auf der dritten Ebene senkrecht. Denn legt man durch eine zu einer Ebene senkrechte Gerade zwei Ebenen, so sind diese auf der gegebenen senkrecht, und hieraus erkennt man die Richtigkeit des Satzes.

103. Steht eine Ebene senkrecht auf zwei anderen Ebenen, so ist sie auch senkrecht zu deren Durchschnittslinie. Aus dem vorhergehenden Satze ist auch die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen.

104. Sind zwei Ebenen aufeinander senkrecht und errichtet man in den Durchschnittspunkten Normalen auf die eine Ebene, so bilden sie zusammen die zweite zur ersteren senkrechte Ebene (100).

105. Sind zwei gerade Linien auf einer und derselben Ebene senkrecht, so sind sie zu einander parallel (100).

106. Sind zwei Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht, sind aber die Durchschnittsgeraden mit der dritten Ebene parallel, so sind auch die zwei Ebenen zu einander parallel.

107. Steht eine Ebene *C* auf einer Geraden *a* senkrecht, so ist sie senkrecht auf jeder durch die Gerade *a* gelegten Ebene; denn legt man z. B. die Ebene durch *a* und *b*, so kann diese durch parallele Weiterbewegung von *a* entstanden gedacht werden, und weil *a* eine Normale zur Ebene *C* ist, so sind beide Ebenen aufeinander senkrecht.

108. Führt man auf eine Gerade *a* einer Ebene *B* eine senkrechte Ebene *C*, so müssen beide Ebenen aufeinander senkrecht stehen; denn man kann sich jede dieser zwei Ebenen durch die parallele Weiterbewegung der Normale entstanden denken (100).

109. Alle auf derselben Geraden oder zu parallelen Geraden senkrechten Ebenen sind untereinander parallel.

110. Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so ist sie auch zur zweiten Ebene senkrecht.

111. Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene kann man nur eine einzige Normale zur Ebene legen. Ist P der Punkt, a die Normale und p eine beliebige andere durch P gedachte Gerade, deren Fusspunkt in der Ebene C mit P' bezeichnet werden soll, während A der Fusspunkt von a, so ist das Dreieck PAP' bei A rechtwinklig, weil a eine Normale zur Ebene C, folglich kann die gedachte Gerade p mit AP' keinen rechten Winkel einschliessen, also kann auch p keine Normale zur Ebene C sein; mithin ist a die einzige Normale, die von P auf die Ebene C möglich ist.

112. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht sie auch auf jeder anderen sie kreuzenden (33), aber in der Ebene liegenden Geraden senkrecht (57).

113. Kann man durch eine von zwei sich kreuzenden Geraden eine Ebene senkrecht zur anderen Geraden legen, so ist der Winkel der sich kreuzenden Geraden ein Rechter.

114. Durch jede von zwei aufeinander senkrechten sich kreuzenden oder sich schneidenden Geraden kann man eine Ebene senkrecht auf die andere Gerade legen.

Von der Neigung und dem Parallelismus gerader Linien gegen Ebenen und Ebenen gegen Ebenen.

§. 5.

115. Zieht man von einem Punkte ausserhalb einer Ebene eine Normale zu einer Ebene, so nennt man den Schnitt mit der Ebene die senkrechte oder orthogonale Projection des Punktes auf der Ebene.

116. Die Entfernung eines Punktes von seiner orthogonalen Projection ist die kürzeste Strecke, die sich zwischen dem Punkte und der Ebene ziehen lässt. Denn bezeichnet man den Punkt ausserhalb der Ebene mit A, seine senkrechte Projection mit A' (lese A Strich, und wenn die Ziffer rechts unten steht, z. B. A_3 lese man A drei), und ist B irgend ein Punkt der Ebene, so ist das Dreieck $AA'B$ bei A rechtwinklig, folglich ist AB die Hypothenuse und demnach länger als die Kathete AA'. Da diese Bemerkung für alle Punkte der Ebene gilt, so ist AA' die kürzeste Strecke von A bis zur Ebene. Man bezeichnet sie als den Abstand des Punktes von der Ebene.

117. Alle Punkte einer Ebene, die von der orthogonalen Projection A' eines Punktes A gleiche Abstände haben, sind auch vom Punkte A gleich weit entfernt. Denn sind B und C irgend zwei Punkte der Ebene, wobei $A'B = A'C$, so ist $\triangle AA'B \cong \triangle AA'C$, weil sie zwei Seiten und den von ihnen bei A' eingeschlossenen rechten Winkel wechselseitig gleich haben, folglich ist $AB = AC$ w. z. b. w.

118. Eine gerade Linie, welche keine Normale zu einer Ebene ist, wird schief zur Ebene genannt, wenn sie die Ebene in einem wirklichen Punkte schneidet.

119. Schneidet eine gerade Linie eine Ebene in einem unendlich fernen Punkte, so sagt man, die Gerade ist zur Ebene, sowie auch die Ebene ist zur Geraden parallel.

120. Projiciert man eine beliebige Gerade orthogonal auf eine Ebene, so ist die Projection eine gerade Linie; denn zieht man durch alle Punkte einer zur Ebene schiefen oder parallelen Geraden Normalen zur Ebene, so erzeugen diese eine neue zur gegebenen Ebene senkrechte Ebene und die Projectionen aller Punkte der Geraden liegen sodann in der Durchschnittslinie beider Ebenen.

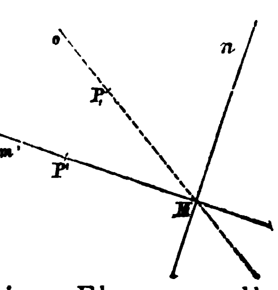
121. Die orthogonale Projection einer Normale ist ein Punkt.

122. Nähert sich ein Punkt in einer geraden Linie ihrem Durchschnitte mit einer Ebene, so nähert er sich seiner orthogonalen Projection auf der Ebene, folglich auch der Ebene.

Gelangt der Punkt in seine orthogonale Projection, so liegt er im Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

123. Fällt ein Punkt mit seiner Projection zusammen, so liegt er selbst in der Ebene, auf die man ihn projicierte.

Fig. 2.



124. Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, so kann sich der in ihr bewegende Punkt dem unendlich fernen Schnittpunkte nicht nähern, weil ja jeder wirkliche Punkt einer Geraden von ihrem unendlich fernen Punkte unendlich weit entfernt ist (15); der Punkt nähert oder entfernt sich also auch nicht von seiner Projection (122); somit haben alle Punkte einer Geraden, die zu einer Ebene parallel läuft, von der Ebene gleiche Abstände (116).

125. Ist eine Gerade p zu einer Ebene A parallel, so ist sie auch zu jeder Geraden der Ebene A parallel, welche in einer durch p beliebig geführten Ebene liegt.

126. Wenn zwei Ebenen A und B zu einer Geraden p parallel sind, so ist ihre Durchschnittslinie a zu p parallel; oder: wenn eine Gerade p zu zwei Ebenen A und B parallel läuft, so geht sie auch zur Durchschnittsgeraden a beider Ebenen parallel. Denn eine Ebene C, die durch p und irgend einen Punkt M der Geraden a geht, schneidet A und B in zwei zu p parallen Geraden (125). Beide haben M gemein, also fallen sie mit a zusammen, somit ist p zu a parallel.

127. Durch jede von zwei sich kreuzenden Geraden kann man eine Ebene legen, parallel zur anderen Geraden. Denn bezeichnet man die eine der sich kreuzenden Geraden mit a, die andere mit b, wählt in einer derselben, etwa in b einen Punkt B, durch welchen eine Gerade a' parallel zu a gezogen gedacht wird, so ist die durch b und a' bestimmte Ebene zu der Geraden a parallel.

128. Zieht man durch den Schnitt- oder Fusspunkt M einer Geraden m, die schief steht zu einer Ebene E, eine Normale p zur Ebene E, so ist der von der schiefen Geraden mit der Fusspunkt-Normale gebildete Winkel die normale Abweichung der Geraden gegen die Ebene.

129. Der Winkel, den eine Gerade mit ihrer orthogonalen Projection auf einer Ebene einschliesst, wird der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene genannt.

130. Die Summe aus dem Neigungswinkel und der normalen Abweichung einer Geraden gegen die Ebene beträgt einen rechten Winkel; ein Schenkel desselben ist die Fusspunktsnormale, der andere die orthogonale Projection der schiefen Geraden.

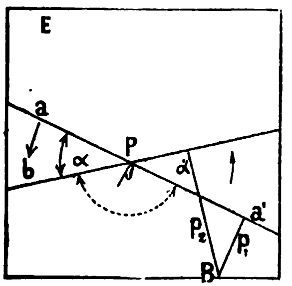
131. Zieht man durch den Fusspunkt M einer Geraden m, deren orthogonale Projection auf einer Ebene E mit m' bezeichnet werden soll, in der Ebene E auf m' eine Gerade n senkrecht, so steht auch n auf der Geraden m senkrecht; denn n ist eine Normale zu der Ebene mm', weil sie in der einen von zwei aufeinander senkrechten Ebenen, auf der Durchschnittsgeraden senkrecht steht (120, 140).

Zur Versinnlichung dieses Satzes halte der Lernende eine materielle gerade Linie, z. B. einen Drat, derart gegen die Zeichnung der Fig. 2, auf dass der Drat die Ebene E im Punkte M

trifft, und dass alle von dem Drat auf die Ebene E gedachten Normalen, die Ebene E in m' schneiden, so ist die durch m und m' gehende Ebene auf der Ebene E senkrecht, und man sieht ohneweiters ein, dass n auf m oder m auf n senkrecht steht. Gleichzeitig bemerkt man auch, dass die Neigung der Geraden m gegen ihre Projection m' beliebig gross angenommen werden kann.

132. Der Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene ist der kleinste unter allen jenen Winkeln, welche die Gerade mit den durch ihren Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet; denn nehmen wir in der zu Fig. 2 gehörigen Raumgeraden m einen Punkt P beliebig an, und setzen voraus, P' sei seine orthogonale Projection auf der Ebene E, so ist PP' die kürzeste Entfernung des Punktes P von der Ebene E. Ziehen wir durch den Fusspunkt M in der Ebene E eine beliebige Gerade o und machen $OP_1 = OP'$ (lese OP Eins gleich OP Strich), so haben die beiden im Raume liegenden Dreiecke MPP' und MPP_1 zwei Seiten wechselseitig gleich und die dritten Seiten ungleich; mithin ist der den dritten Seiten gegenüberliegende Winkel in jenem Dreiecke der kleinere, in welchem die dritte Seite die kleinere ist; sonach ist wirklich $\measuredangle PMP' < \measuredangle PMP_1$ w. z. b. w.

Fig. 3.



133. Flächenwinkel werden durch solche ebene Winkel gemessen, welche zu ihrem Nebenwinkel in demselben Verhältnisse stehen, wie der Flächenwinkel zu seinem Nebenflächenwinkel.

Bringen wir zum Zwecke der Versinnlichung des Messens von Flächenwinkeln eine materielle gerade Linie p in eine Lage zur Zeichnung der Fig. 3, bei welcher sie die Papierebene E in dem Punkte P schneidet und ausserdem noch auf der Ebene E, also auch auf den zwei beliebigen Geraden a und b senkrecht steht, so steht auch jede durch p gelegte Ebene senkrecht zu E. Dreht man die durch p und a gedachte Halbebene um p allmälig herum, und bewegt sich ihr Schnitt mit der Ebene E aus der Lage Pa über Pb nach Pa', so ist ohne weiteren Beweis ersichtlich, dass sich der von der unbegrenzt gedachten, um p beweglichen Halbebene zuerst durchlaufene Raum zum Nebenflächenwinkel verhält, wie der Winkel α zu seinem Nebenflächenwinkel β. Sonach ist $\measuredangle\ \alpha$ das Mass des zuerst besprochenen Flächenwinkels.

Durch diese Betrachtung gelangt man zu dem Schlusse:

134. Ein von zwei Halbebenen gebildeter Flächenwinkel wird von jenem ebenen Winkel gemessen, der entsteht, wenn man senkrecht zur Durchschnittsgeraden beide Ebenen mit einer dritten Ebene schneidet.

Je nachdem das Mass eines Flächenwinkels ein spitzer oder stumpfer ebener Winkel, ist auch der Flächenwinkel ein stumpfer oder spitzer. In Fig. 3 ist der einfache Flächenwinkel, dessen Schenkel die Halbebenen sind, die man durch die Normale p und die Halbgeraden b und a' legen kann, ein stumpfer Flächenwinkel und der ebene stumpfe Winkel β sein Mass.

135. Errichtet man in irgend einem Punkte der Durchschnittsgeraden zweier Halbebenen in jeder auf die Durchschnittsgerade eine Senkrechte, so bilden diese die Schenkel eines ebenen Winkels, welcher den Flächenwinkel der beiden Halbebenen miest.

136. Fällt man von irgend einem Punkte B des Raumes auf zwei Ebenen E_1 E_2 Normalen p_1 p_2, so müssen beide Normalen in einer Ebene liegen, welche senkrecht steht auf der Durchschnittsgeraden der Ebenen E_1 E_2.

Behufs der Versinnlichung dieses Satzes denke man sich bei Fig. 3 durch a und b zwei materielle Ebenen E_1 E_2 senkrecht zur Ebene E gehalten und fälle von irgend einem Punkte B der Ebene E Senkrechte p_1 und p_2 auf a und b, so sind diese auch Normalen auf die Ebenen E_1 und E_2 und man sieht, dass beide Normalen in einer Ebene E liegen, die auf E_1 E_2 und sonach auch auf der Durchschnittsgeraden p dieser zwei Ebenen senkrecht steht.

137. Fällt man von irgend einem Punkte auf zwei Ebenen Normalen, so ist der spitze Winkel der Normalen das Mass des spitzen Flächenwinkels. Dasselbe gilt auch für die beiden stumpfen Winkel. Die Richtigkeit des Satzes erkennt man aus Fig. 3.

138. Führt man auf zwei beliebige gerade Linien senkrechte Ebenen, so kreuzt (33) deren Durchschnittsgerade die gegebenen Geraden rechtwinklig (112).

Die Kugel.

§. 6.

139. Jede geschlossene Fläche, deren Punkte von einem ausser ihr gelegenen Punkte O gleiche Abstände besitzen, wird eine Kugelfläche genannt.

Dieser Punkt O ist der Mittelpunkt und seine Entfernung R von der Kugelfläche der Kugelradius oder Halbmesser der Kugel.

140. Schneidet man eine Kugel mit einer Ebene, so wird der Schnitt ein Kreis (336), dessen Mittelpunkt dort liegt, wo die aus dem Kugelmittelpunkt zur schneidenden Ebene gezogene Normale diese Ebene schneidet. Der Beweis lässt sich leicht mittelst (117) führen.

141. Ebenen, welche vom Kugelmittelpunkt gleiche Abstände haben, schneiden die Kugel in congruenten Kreisen (338).

142. Ebenen durch den Kugelmittelpunkt schneiden die Kugel in grössten Kreisen, d. i. in Kreisen, welche den Kugelhalbmesser zum Radius haben.

143. Wenn die Durchschnittsgerade zweier Ebenen die Kugel schneidet, so müssen sich in denselben Punkten auch die Kreise treffen, welche die Ebenen auf der Kugel erzeugen.

144. Ebenen, welche vom Kugelmittelpunkt die Entfernung gleich dem Kugelradius haben, berühren die Kugel in einem Punkte und werden desshalb tangierende Ebenen oder Tangentenebenen an die Kugel genannt.

145. Verbindet man den Berührungspunkt einer die Kugel berührenden Ebene mit dem Kugelmittelpunkt, so ist die Strecke dem Radius der Kugel gleich und steht auf der tangierenden Ebene senkrecht.

146. Eine Gerade kann eine Kugelfläche nur in zwei Punkten durchschneiden, weil es in einer Geraden höchstens zwei Punkte geben kann, welche vom Mittelpunkte O den Abstand R haben. Die von den Schnittpunkten begrenzte Strecke wird eine Kugelsehne genannt.

147. Jede durch den Kugelmittelpunkt gehende Kugelsehne ist ein Durchmesser der Kugel.

148. Zwei durch die Endpunkte desselben Durchmessers gelegte Tangentenebenen sind zu einander parallel (109).

149. Errichtet man zu einer durch den Kugelmittelpunkt gehenden Ebene alle möglichen senkrechten Sehnen, so werden diese von der Ebene halbiert. Ist z. B. $A_1 A_2$ eine solche Sehne und A ihr Schnittpunkt mit der Ebene, so ist $\triangle A_1 A O$ congruent mit dem $\triangle A_2 A O$, weil $A O$ gemeinschaftlich und die Hypothenuse $A O$ der Hypothenuse $A_2 O$ gleich ist; mithin folgt aus der Congruenz $A_1 A = A_2 A$, w. z. b. w.

150. Zieht man in einer Kugel eine beliebige Menge paralleler Sehnen, so liegen ihre Mittelpunkte in einer Ebene, welche eine **Diametralebene** genannt wird.

Unendlich kurze Kugelsehnen sind Linienelemente, die man als auf der Kugelfläche liegend ansehen kann.

151. Verlängert man ein Linienelement einer Kugelfläche zu einer Geraden, so entsteht eine Tangente der Kugelfläche.

152. Verlängert man alle Linienelemente einer Kugelfläche, welche auf demselben übrigens beliebigen Kugelkreise senkrecht stehen, zu Tangenten, so schneiden sich diese in einem einzigen Punkte, der in jener Geraden liegt, die man durch den Kugelmittelpunkt senkrecht auf die Kreisebene errichtet. Denn bezeichnet man die erwähnte Senkrechte mit Os, irgend einen Punkt des Kreises mit A, so ist das durch A gehende zum Kreise senkrechte Linienelement auch ein Linienelement jenes grössten Kreises, in welchem die Ebene OsA die Kugel schneidet, mithin trifft die Verlängerung desselben die Gerade Os in einem Punkte S, der für alle übrigen zum Kugelkreise senkrechten Linienelemente derselbe ist, indem in dem Dreiecke SAO die Seite AO und die Winkel bei A und O, den entsprechenden Seiten und Winkeln der übrigen Dreiecke SBO, SCO, . . gleich sind.

153. Zieht man von einem Punkte S ausserhalb einer Kugel Tangenten an sie, so liegen die Berührungspunkte in einem Kreise, der auf der Geraden SO senkrecht steht.

154. Liegt S im Unendlichen, so werden die Tangenten parallel und der Berührungskreis geht durch den Kugelmittelpunkt.

Zweiter Abschnitt.

Das Projicieren in der Ebene.

Das Projicieren in der Ebene auf eine oder auf mehrere Gerade. Projectionsarten. Sehpfeile. Ordinaten.

§. 7.

In §. 1 wurde der Begriff des Projicierens aufgestellt.

155. Liegen das Projectionscentrum und die zu projicierenden Punkte in einer und derselben Ebene, so liegen auch alle projicierenden Stralen in derselben Ebene und man sagt: wir projicieren in der Ebene.

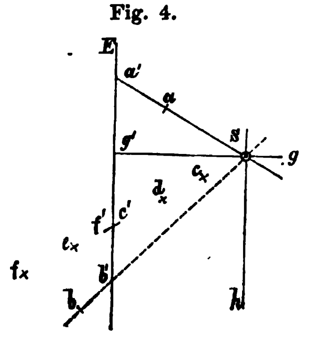
Bei dem Projicieren in der Ebene unterscheide man zwei Fälle:

a) Alle Projectionen der verschiedenen Punkte der Ebene liegen in einer und derselben geraden Linie, oder

b) die Projectionen werden nach den allgemeinen Projections-Gesetzen des §. 1 abgeleitet.

156. Das Projicieren in der Ebene auf eine Gerade.

Fig. 4.



Man bezeichne das Projectionscentrum mit S, die Projectionsgerade oder Bildgerade, welche die Projectionen aller Punkte der Ebene aufzunehmen bestimmt ist, mit E, die zu projicierenden Punkte mit Buchstaben ohne beigesetzte Striche und ihre Projectionen mit rechts oben beigesetzten Strichen.

157. Wie projiciert man in Fig. 4 den angenommenen Punkt a aus dem Centrum S auf die Gerade E?

Man zieht entweder wirklich den durch S und a gehenden projicierenden geradlinigen Stral und bestimmt die Projection a'

als Schnittpunkt des Strales mit der Projectionsgeraden *E*, oder man strichelt den projicierenden Stral und bezeichnet mit einer kurzen Linie die Projection, wie dies bei dem Punkte *b* geschehen, oder lässt endlich den projicierenden Stral ganz weg, wie dies bei der Reihe *cdef* zu ersehen ist.

158. Welche Lage kann der projicierte Punkt gegen die Projectionsgerade haben?

Entweder liegt er mit dem Projectionscentrum auf derselben Seite der Bildgeraden, oder auf verschiedenen Seiten.

159. Liegt ein Punkt mit dem Projectionscentrum auf einerlei Seite der Projectionsgeraden, so sagen wir er liege positiv, im entgegengesetzten Falle aber negativ. In Fig. 4 liegen *a*, *c*, *d*, *g*, *h* positiv, hingegen *b*, *e* und *f* negativ.

Liegt der projicierte Punkt positiv, so kann er entweder zwischen dem Projectionscentrum und der Bildgeraden liegen oder nicht. So ist z. B. die Lage des Punktes *g* eine positive, aber *g* liegt nicht mehr zwischen *S* und *E*.

160. Wenn man sich im Projectionscentrum *S* den optischen Mittelpunkt eines Auges denken würde, welches durch das Sehen die Punkte der Ebene auf die Gerade *E* projiciert, kann dann das Auge auch einen Punkt auf *E* projicieren, der eine solche Lage besitzt, wie der Punkt *g*?

Offenbar nicht; denn wenn das Auge nach *g* hin sieht, so kann es die Gerade *E* nicht sehen, folglich kann es auch auf *E* keine Projection erzeugen. Wenn man sich demnach die Projectionen auf der Geraden *E* durch das Sehen entstanden denkt, dann muss man den Punkt *g'* als eine eingebildete, als eine imaginäre Projection des Punktes *g* bezeichnen.

161. Was wird geschehen, wenn mehrere Punkte in einem und demselben projicierenden Strale liegen?

Alle diese Punkte werden eine gemeinsame Projection erhalten, und wenn an Stelle des Projectionscentrums sich ein projicierendes Auge befindet, so werden dem Auge alle diese Punkte als ein Punkt erscheinen. Da also dem Auge die Punkte als sich deckend vorkommen, so können wir sie auch Deckpunkte nennen.

In Fig. 4 sind *c*, *d*, *e* und *f* Deckpunkte; in *c'* liegen die Projectionen *c'*, *d'*, *e'* und *f'*.

162. Was wird geschehen, wenn ein Punkt eine derartige Lage besitzt, auf dass der projicierende Stral parallel zur Projectionsgeraden E wird?

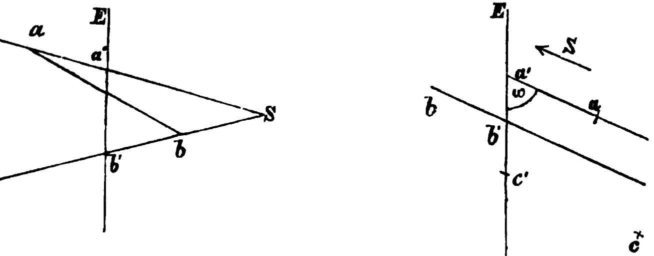
In diesem Falle liegt die Projection in dem unendlich fernen Punkte der Geraden E.

Ein solches Beispiel gibt der Punkt h in Fig. 4.

163. Wenn man in einer Ebene aus einem Punkte S eine Strecke ab auf eine Gerade E projiciert, wird die Projection $a'b'$ kleiner oder grösser oder vielleicht gleich lang mit ab werden?



Fig. 5. Fig. 6.



Es sind alle drei Fälle möglich. In Fig. 5 is $a'b'$ kleiner als ab. Läge a näher gegen S, so könnte ab gleich oder auch kleiner als $a'b'$ werden.

164. Welche Lage kann das Projectionscentrum S gegen die Projectionsgerade annehmen?

Das Projectionscentrum liegt entweder in einem wirklichen Punkte der Ebene, oder es liegt in einem unendlich fernen Punkte derselben (15). Im ersten Falle convergieren alle projicierenden Stralen im Projectionscentrum, im anderen Falle sind die projicierenden Strahlen zu einander parallel (33).

165. Projectionen, welche durch das Projicieren aus einem wirklichen Punkte entstehen, nennt man Central-Projectionen, jene aber, die durch das Projicieren mittelst paralleler Stralen erzeugt werden, Parallel-Projectionen. Fig. 4 und 5 sind Beispiele von centralen Projectionen.

166. In welche Arten zerfallen die Parallel-Projectionen?

In schiefe Projectionen, wenn die projicierenden Stralen schief auf der Projectionsgeraden stehen, und in orthogo-

nale oder senkrechte Projectionen, wenn die projicierenden Stralen mit der Bildgeraden einen rechten Winkel einschliessen. Fig. 6 zeigt eine schiefe Projection unter dem Winkel w.

167. Was muss man thun, um bei einer Parallel-Projection zu wissen, auf welcher Seite der Projectionsgeraden das unendlich ferne Projections-Centrum liegt?

Man gibt einen sogenannten Sehpfeil an, der erstens parallel zur projicierenden Richtung ist und zweitens mittels seiner Pfeilspitze die Bewegung vom Centrum gegen die Projectionsgerade anzeigt. In Fig. 6 ist der Sehpfeil mit S bezeichnet und wir erkennen, dass nur die Punkte a und c eine positive Lage haben, während b negativ liegt.

168. Wie kann man die Lage eines Punktes gegen seine Projection, oder wie wir auch häufig sagen werden, gegen sein Bild, bestimmen?

Durch die Entfernung des Punktes von seiner Projection. Diese Entfernung benenne man als eine Ordinate des Punktes und bezeichne sie symbolisch durch den Buchstaben ihrer Projection, denselben in zwei runde Klammern gesetzt. Sowol in Fig. 4, als auch in Fig. 6 wird man die Ordinate aa' symbolisch mit (a') bezeichnen und dieses Symbol aussprechen als: Ordinate a'.

169. Ist die Lage eines Punktes positiv (159), so nennen wir auch seine Ordinate positiv, und ist die Lage negativ, so ist auch die Ordinate negativ. In Fig. 6 sind die Ordinaten (a') und (c') positiv, die Ordinate (b') hingegen ist negativ.

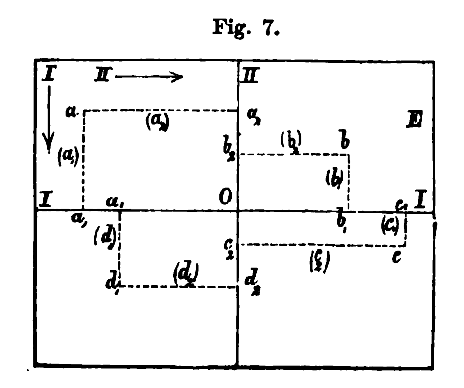
170. Welche Lage haben bei Parallel-Projectionen die Ordinaten und der Sehpfeil gegen die Projectionsgerade?

Sind die Ordinaten positiv, so liegen sie mit dem Sehpfeile gleich, d. i. auf derselben Seite der Projectionsgeraden; sind aber die Ordinaten negativ, so liegen sie mit dem Sehpfeile ungleich, also auf verschiedenen Seiten der erwähnten Geraden. In Fig. 6 liegt aa' mit dem Pfeile S gleich, also ist aa', d. i. (a') positiv; bb' liegt mit dem Sehpfeile ungleich, folglich ist $bb' = (b')$ negativ.

171. Zur sicheren Bestimmung des Ortes, den ein Punkt in einer Ebene einnimmt, pflegt man ihn auf zwei Projectionsgerade zu projicieren und beide Ordinaten anzugeben. Das einfachste Verfahren besteht wol darin, beide Projectionsgerade senkrecht

zu einander anzunehmen und auf beide die Punkte orthogonal zu projicieren.

Fig. 7.



In Fig. 7 wurden die Projectionsgeraden mit römischen Ziffern und die Projectionen der Punkte ausser den Buchstaben mit arabischen Ziffern so bezeichnet, dass man aus der Ziffer gleich erkennt, welche Projection gemeint wird. So ist c_2 (lese c zwei) die Bezeichnung für die Projection des Punktes c auf der Projectionsgeraden II.

172. **Vermag man aus zwei Ordinaten eines Punktes, diesen zu bestimmen, wenn die beiden Projectionsgeraden I und II schon aufgezeichnet sind?**

Nein; denn wenn die Sehpfeile noch nicht angegeben sind, so weiss man auch nicht, welche Lage des Punktes eine positive oder eine negative ist. Setzen wir also voraus, die Sehpfeile I und II sind angegeben, und betrachten wir jetzt die Lagen der Punkte.

Denken wir uns in Fig. 7 in der Ebene E ein Auge, welches parallel zum Sehpfeile I auf den Punkt a blickt, so muss a_1 mit a zusammenzufallen scheinen, also ist a_1 die orthogonale Projection von a auf der Geraden I.

Denken wir uns ein zweitesmal in der Ebene E ein Auge, welches parallel mit dem Sehpfeile II auf die Projectionsgerade II sieht, so scheint a_2 mit a zusammenzufallen und a_2 ist die zweite orthogonale Projection oder das zweite senkrechte Bild des Punktes a.

173. Bezeichnen wir den Schnittpunkt O der beiden Projectionsgeraden als einen Axenpunkt und vergleichen wir die Abstände der Projectionen von dem Axenpunkte mit den Ordinaten der Punkte.

Die Figuren $aa_1\ Oa_2$; $bb_1\ Ob_2$; $cc_1\ Oc_2$; $dd_1\ Od_2$ sind Rechtecke; folglich ist $aa_1 = a_2 O$; $bb_1 = b_2 O$, $cc_1 = c_2 O$; $dd_1 = d_2 O$ oder

1) . . $(a_1) = a_2\,O$; $(b_1) = b_2\,O$; $(c_1) = c_2\,O$; $(d_1) = d_2\,O$;
und ohne besondere Mühe erkennt man noch weiter:

2) . . $(a_2) = a_1\,O$; $(b_2) = b_1\,O$; $(c_2) = c_1\,O$; $(d_2) = d_1\,O$.

174. Die Gleichheiten in der Reihe 1) sagen uns: die erste Ordinate eines Punktes ist gleich der Entfernung seines zweiten Bildes vom Axenpunkte, und die Gleichheiten in der Reihe 2) sagen: die zweite Ordinate eines Punktes ist gleich der Entfernung seines ersten Bildes vom Axenpunkte.

175. Wenn wir einen Punkt auf zwei unter einem rechten Winkel gegen einander geneigte Axen senkrecht projicieren, so wollen wir sowol die beiden Axen, als auch die beiden Projectionen oder Bilder einander zugeordnet nennen. Alsdann vermögen wir die Gleichheiten der Reihen 1) und 2) in ein Ordinatengesetz zusammenzufassen.

176. Wie lautet das Ordinatengesetz?

Jeder Punkt ist von einem seiner orthogonalen Bilder ebensoweit entfernt, als das zugeordnete Bild vom Axenpunkt.

177. Man soll die Orte von folgenden Punkten aufsuchen: $(a_1) = 13^{mm}$ (13 Milimeter, oder 13 irgend welche zu Grunde gelegte Längeneinheiten), $(a_2) = 20$; $(b_1) = 7$, $(b_2) = -14$; $(c_1) = -4$, $(c_2) = -22$; $(d_1) = -10$, $(d_2) = 15$.

Construction des Ortes a. Man nimmt auf einem Massstabe die Länge der ersten Ordinate $(a_1) = 13$ in den Zirkel und trägt sie in der Projectionsgeraden II vom Axenpunkt O so auf, dass sie mit dem Sehpfeile I auf gleicher Seite von der Projectionsgeraden I liegt, weil (a_1) positiv ist; man findet dann den anderen Endpunkt der aufgetragenen Strecke als das zweite Bild a_2 des Punktes a.

Zieht man durch a_2 einen Sehstral senkrecht auf II, so muss in ihm a liegen. Nun ist (a_2) auch posttiv, folglich wird man die Länge $(a_2) = 20$, von a_2 aus auf dem Zweier-Sehstrale so auftragen, dass eben (a_2) positiv wird, d. h. dass aa_2 mit dem Sehpfeile II auf gleicher Seite von der Geraden II liegt; alsdann ist der Punkt a gefunden.

Man hätte auch umgekehrt vorgehen können. Dann würde man zuerst die zweite Ordinate $(a_2) = 20$ auf der Geraden I von O aufgetragen und dadurch a_1 gefunden haben. Durch a_1 einen Einser-Sehstral, d. i. einen Sehstral senkrecht zur Projections-

geraden I gezogen und auf ihm die erste Ordinate $(a_1) = 13$ von a_1 aus positiv aufgetragen, gibt den Punkt a.

Endlich könnte man a_1 und a_2 nach dem angegebenen Verfahren bestimmen, dann wäre der Schnittpunkt der beiden durch a_1 und a_2 gehenden Sehstralen der Ort des Punktes a.

Nach dieser Construction findet man sich zu folgendem Ausspruche veranlasst:

178. Mit Hilfe der ersten Ordinate findet man das zweite Bild und mit Hilfe der zweiten Ordinate das erste Bild.

179. Construction des Punktes c. Mit Hilfe der ersten Ordinate $(c_1) = -4$ findet man das zweite Bild c_2. Da (c_1) negativ ist, so muss man die 7 Einheiten auf der Geraden II mit dem Sehpfeile I entgegengesetzt auftragen; dadurch erhält man c_2. Durch c_2 einen Zweier-Sehstral gezogen und $(c_2) = -24$ entgegengesetzt dem Sehpfeile II aufgetragen, gibt den Ort c.

In Fig. 7 wurden alle 4 Punkte den Ordinaten entsprechend dargestellt.

Aufgabe. Man construiere unter Voraussetzung rechtwinkliger Projectionsgeraden und senkrechter Ordinaten folgende Punkte: $(a_1) = -12$, $(a_2) = +6$; $(b_1) = -12$, $(b_2) = +12$; $(c_1) = 8$, $(c_2) = -14$; $(d_1) = 8$, $(d_2) = -8$; $(e_1) = 0$, $(e_2) = 10$; $(f_1) = 0$, $(f_2) = -10$; $(g_1) = 6$, $(g_2) = 0$; $(h_1) = -6$, $(h_2) = 0$; $(i_1) = 0$; $(i_2) = 0$.

Das collineare Projicieren in der Ebene. Begriff und Einteilung der projectivischen Verwandtschaften.

§. 8.

Wenn man die in §. 1 aufgestellten zwei allgemeinen Projectionsgesetze für das Projicieren in der Ebene specialisiert, wie lauten dieselben?

180. a) Die Collinear-Projection eines jeden Punktes ist wieder ein Punkt im projicierenden Strale (5).

181. b) Die Collinear-Projection einer jeden Geraden ist wieder eine Gerade und die Schnittpunkte aller Geraden mit ihren Collinear-Projectionen liegen durchwegs in einer und derselben Geraden, Begegnungsgerade genannt (6).

182. Welche gegenseitige Lage können das Projections-Centrum S und die Begegnungsgerade β in der Ebene gegen einander annehmen?

Es sind folgende vier Fälle denkbar:

A) *S* und β liegen im Unendlichen;

B) *S* liegt im Endlichen, β im Unendlichen;

C) *S* liegt im Unendlichen, β im Endlichen, und

D) *S* und β liegen beide im Endlichen.

183. Welche Unterschiede werden in Folge dieser Einteilung bei den Constructionen eintreten müssen?

In jenen zwei Fällen, wo das Projections - Centrum *S* im Unendlichen liegt, werden alle projicierenden Stralen untereinander parallel, und in jenen zwei Fällen, wo die Begegnungsgerade β im Unendlichen liegt, wird jede Collinear - Projection einer Geraden zur Geraden selbst parallel, weil jede Gerade ihre Projection in einem Punkte der unendlich fernen Begegnungsgeraden β, also in einem unendlich fernen Punkte treffen muss.

Liegen aber *S* und β im Endlichen, so sind die projicierenden Stralen nicht parallel, sondern central und nicht jede Gerade ist mit ihrer Projection parallel.

184. Wenn man nach den zwei allgemeinen Projectionsgesetzen zu jedem zu projicierenden Gebilde die Collinear-Projection aufsucht, so sagt man, die beiden Gebilde seien zu einander projectivisch verwandt, oder sie stehen in projectivischer Verwandtschaft.

185. Die Lage von zwei projectivisch verwandten Gebilden, in welcher sie die Projection erzeugt, nennt man eine perspectivische (3).

186. Jeder Punkt ist zu seiner Collinear-Projection verwandt, also auch jede Gerade zu ihrer Collinear-Projection; daher:

c) Verwandte Linien gehen immer durch verwandte Punkte, und verwandte Punkte liegen in verwandten Geraden.

187. Zu einem zu projicierenden Gebilde seine Collinear-Projection aufzusuchen ist ganz dasselbe, als zu einem gegebenen Gebilde ein ihm projectivisch verwandtes Gebilde in perspectivischer Lage zu construiren. Desshalb werden wir häufig statt von einem gegebenen Gebilde und seiner Collinear - Projection nur von projectivisch verwandten Gebilden in perspectivischer Lage sprechen; es kann dann jedes derselben die Collinear Projection des anderen sein.

188. Das so häufig vorkommende Wort „projectivisch" wird durch das Zeichen $\barwedge$ ausgedrückt, welches aus dem griechischen Buchstaben π abgeleitet wurde.

189. Wie werden die durch die Lagen von S und β bedingten Geraden projectivischer Verwandtschaft bebenannt?

A. Perspectivische Congruenz;

B. perspectivische Aehnlichkeit;

C. perspectivische Affinität und

D. perspectivische Collineation.

Welches sind die charakteristischen Merkmale dieser ⊼ Verwandtschaften?

190. *A.* Bei der persp. Congruenz sind die projicierenden Stralen untereinander parallel; je zwei verwandte Gerade sind gleichfalls parallel.

191. *B.* Bei der persp. Aehnlichkeit sind die projicierenden Stralen central; je zwei verwandte Gerade sind parallel.

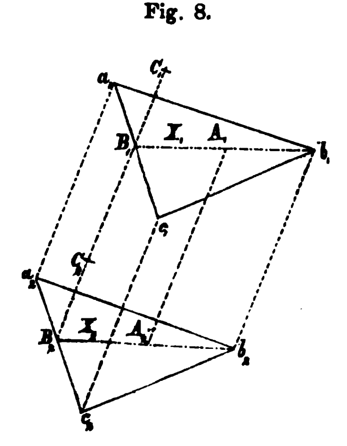
192. *C.* Bei der persp. Affinität sind die projicierenden Stralen parallel; je zwei verwandte Stralen sind im Allgemeinen nicht parallel, und

193. *D.* bei der persp. Collineation sind die projicierenden Stralen central und je zwei verwandte Gerade sind im Allgemeinen nicht parallel (183).

A. Die perspectivische Congruenz.

§. 9.

Fig. 8.



Bei der perspectivischen Congruenz sind alle projicierenden Stralen untereinander parallel, und je zwei verwandte Gerade sind gleichfalls zu einander parallel.

194. Was für eine Uebereinstimmung müssen zwei Gebilde perspectivischer Congruenz in Folge des Parallelseins von je zwei verwandten Geraden zeigen?

Das Parallelsein je zwei verwandter Geraden bedingt die Gleichheit verwandter Winkel (54). Verwandte Winkel sind selbstverständlich solche, bei welchen jeder Schenkel des einen ⊼ verwandt ist zu einem Schenkel des andern (187).

195. Und was für eine Uebereinstimmmung zwischen perspectivisch congruenten Gebilden muss in Folge dessen bestehen, dass nicht nur je zwei verwandte Gerade, sondern auch alle projicierenden Stralen parallel sind?

In Folge dieser Umstände liegen je zwei verwandte Strecken zwischen parallelen Stralen, mithin müssen die verwandten Strecken auch der Länge nach einander gleich sein, also gleiche Richtung und gleiche Länge haben.

196. Je zwei verwandte Dreiecke in perspectivisch congruenten Gebilden sind congruent, weil sie wegen der gleichen Richtung verwandter Seiten gleiche Winkel, und wegen der gleichen Länge verwandter Strecken auch die Seiten wechselweise gleich haben. In Fig. 8 sieht man zwei perspectivisch liegende congruente Dreiecke $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$ gezeichnet; in diesen Dreiecken ist a_2 der mit a_1 verwandte Punkt, d. i. eine Collinear-Projection von a_1; b_2 der zu b_1 und c_2 der zu c_1 verwandte Punkt. Die durch zwei verwandte Punkte gehenden Geraden sind projicierende Stralen, welche vermöge der Voraussetzung parallel zu einander sein müssen; also ist $a_1 a_2 \parallel b_1 b_2 \parallel c_1 c_2$.

Von den Dreiecksseiten sind jene verwandt, welche beziehungsweise durch verwandte Punkte gehen; so ist z. B. $a_1 b_1$ verwandt mit $a_2 b_2$, weil a_1 dem a_2 und b_1 dem b_2 verwandt ist.

197. Wenn man in perspectivisch congruenten Gebilden in dem einen, etwa durch b_1, eine Gerade x_1 zieht, von der man voraussetzt, dass sie dem ersten Gebilde angehören soll; wie findet man die ihr verwandte Gerade x_2 im anderen Gebilde?

Man zieht durch den mit b_1 verwandten Punkt b_2 eine Gerade x_2, welche der x_1 in einem Punkte der Begegnungsgeraden β begegnet, d. h. die x_1 in jenem Punkte schneidet, in welchem die x_1 die Begegnungsgerade β trifft. Bezeichnen wir diesen Schnittpunkt stets als einen Begegnungspunkt, so können wir bei perspectivisch congruenten Gebilden sagen, dass der Begegnungspunkt von zwei verwandten Geraden ein unendlich ferner Punkt ist, mithin muss die Gerade x_2 parallel zu x_1 gezogen werden.

198. Wie findet man zu irgend einem Punkte A_1 des einen Gebildes, den verwandten Punkt A_2 im zweiten Gebilde?

Den verwandten Punkt A_2 kann man auf zweierlei Art bestimmen. Die erste allgemeine Art besteht darin, den Punkt A_1 mit einem Punkte b_1 desselben Gebildes, welchem A_1 angehört, durch eine Gerade x_1 zu verbinden, durch den verwandten und bekannten Punkt b_2 die zu x_1 verwandte Gerade x_2 nach dem Begegnungspunkte von x_1 hin zu ziehen, und mittels des durch A_1 gehenden projicierenden Strales in der Geraden x_2 den Punkt A_2 anzugeben.

199. Die zweite Art beruht auf dem speciellen Verwandtschaftsgrade der perspectivischen Congruenz; denn bei dieser ist, wie leicht einzusehen, die Entfernung aller Punkte des einen Gebildes von ihren verwandten Punkten des anderen Gebildes eine constante Grösse. Trägt man demnach die Länge $a_1 a_2$ auf der projicierenden Geraden durch A_1 entsprechend auf, so dass $A_1 A_2 = a_1 a_2$ wird, so ist A_2 der mit A_1 verwandte Punkt.

200. Was versteht man unter Probepunkten und Probelinien?

Jene Punkte und Linien, welche bei einer Construction dazu dienen, die Richtigkeit und Genauigkeit der Construction zu prüfen, sind Probepunkte oder Probelinien. Wenn man in Fig. 8 den Punkt A_2 nach der allgemeinen Methode ermittelt hat, so muss bei einer Prüfung der Genauigkeit der Arbeit sich ergeben, dass die Strecke $A_1 A_2$ der Strecke $b_1 b_2$ oder $c_1 c_2$ oder $a_1 a_2$ an Länge gleich ist, folglich ist die Strecke $A_1 A_2$ eine Probestrecke. Wenn man aber nach der zweiten Art den Punkt A_2 bestimmt, so muss durch die Probe sich ergeben, dass $b_2 A_2$ mit $b_1 A_1$ oder $a_2 A_2$ mit $a_1 A_1$ oder $c_2 A_2$ mit $c_1 A_1$ parallel ist, mithin sind die letzteren Geraden Probelinien.

Sind $x_1 x_2$ zwei verwandte Gerade, deren richtige Lage man prüfen will, so suche man in ihnen zwei Punkte auf, welche verwandt sein sollen und prüfe ihre Richtigkeit. Zwei solche Punkte sind z. B. die Schnitte von x_1 mit $a_1 c_1$ und von x_2 mit $a_2 c_2$. Zeigt sich nun, dass die Gerade $B_1 B_2$ mit $a_1 a_2$, $b_1 b_2 \ldots$ parallel ist, dass ferner die Strecke $B_1 B_2 = a_1 a_2 = b_1 b_2 = \ldots$, so schöpft man hieraus die Beruhigung für eine genaue Arbeit. Finden sich bei solchen Prüfungen Fehler, so können diese von zweierlei Art sein. Entweder entpringen sie aus irgend einem Irrthume bei der Verbindung der Punkte durch Linien oder bei der Verbindung der Linien zu Punkten, d. h. bei der Bestimmung der Durchschnitte von Linien — oder sie sind in Folge von ungenauer

Arbeit, z. B. der Anwendung stumpfer Bleistifte, ungerader Lineale und Dreiecke, fehlerhafter rechter Winkel oder des ungenauen Ziehens von geraden Linien durch bestimmte Punkte, des ungenauen Ziehens paralleler Geraden u. s. w. entstanden.

201. Der Zeichnende unterlasse es nie, schon während einer Construction eine Prüfung auf die Richtigkeit seiner Arbeit vorzunehmen, weil er sich dadurch sehr gut vor dem Misslingen derselben schützen kann. Wer seine Arbeiten zu prüfen versteht und sie wirklich prüft, zeigt auch einerseits Verständnis und geistige Auffassung der zu lösenden Aufgabe und andererseits das Bestreben correct zu arbeiten.

202. Was versteht man unter einem ebenen Gebilde?

Alle Punkte und Linien, die man in einer Ebene entweder willkürlich annimmt oder durch Construction erhält, welche aber zusammengenommen ein Ganzes ausmachen, bilden ein ebenes Gebilde. In Fig. 8 sind zwei ebene Gebilde vorhanden; die Punkte des einen sind mit dem Zeiger 1, die des andern mit dem Zeiger 2 versehen. Wählt man einen Punkt C beliebig und versieht ihn mit dem Zeiger 1, so erklärt man hiedurch, dass man ihn dem ersten Gebilde einverleibt; ebenso zeigt C_2 einen Punkt des zweiten Gebildes an.

203. Welcher Unterschied besteht nun zwischen einem ebenen Gebilde und einem ebenen Systeme?

Unter einem ebenen Gebilde versteht man eine Zusammenstellung von Punkten oder Linien einer Ebene zu irgend einer Form, während ein ebenes System der Inbegriff von Gebilden und von Punkten der Ebene sein kann, die auf irgend eine Art in einem Zusammenhange stehen, wobei es auf die Formen und auf die Anzahl der vereinigten Gebilde gar nicht ankommt.

204. Kann man in der darstellenden Geometrie die Construction congruenter Gebilde in perspectivischer Lage verwenden?

Bei manchen Abbildungen von Prismen und Cylinderflächen, wenn sie durch parallele Ebenen in ihrer Längenausdehnung begrenzt werden. Die projicierenden Stralen werden dann als Bilder von den Längenkanten benützt.

Fig. 9.

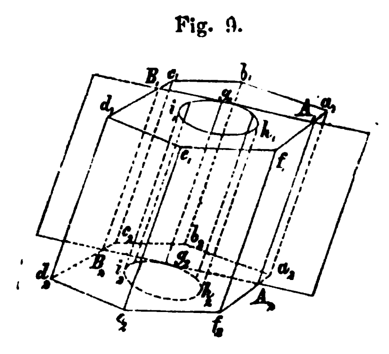


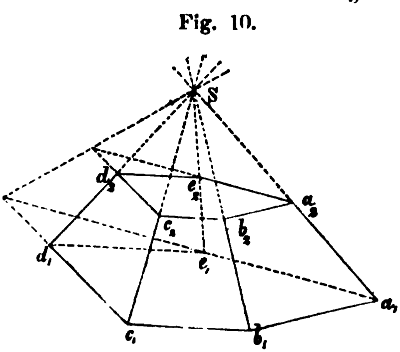
Fig. 9 zeigt eine solche Abbildung als Anwendung der perspectivischen Congruenz. In diese Figur ist eine Curve mit aufgenommen worden, zu welcher die verwandte Curve construiert wurde, indem man die Geraden $g_1 g_2$, $h_1 h_2 \ldots = a_1 a_2$ machte. Die Curven wurden verwendet, um das Bild einer cylindrischen Höhlung zu gestalten, welche das Prisma durchzieht. Die Tangenten in g_1 und g_2 sind verwandte gerade Linien und deshalb zu einander parallel. Das Parallelogramm $A_1 B_1 B_2 A_2$ stellt das Bild eines Schnittes vor, den eine Ebene auf dem Prisma erzeugt, welche durch die beiden parallelen Tangenten der Curven gelegt wird.

Obwol der Ort viel später gesucht werden muss, an welchem die Abbildungen der Prismen-, Cylinder-, Pyramiden- und Kegelflächen ausführlich erörtert werden, so ist es doch angezeigt, dass sich der Lernende schon bei der Construction der projectivisch verwandten Gebilde, mit Hilfe seiner Vorstellungsgabe, in der Verwendung collinearer Gebilde zu Bildern von körperlichen Formen übe.

B. Die perspectivische Aehnlichkeit. Proportional-Dreiecke.

§. 10.

Fig. 10.



Bei perspectivisch ähnlichen Gebilden sind die projicierenden Stralen central und je zwei verwandte Gerade sind parallel; denn S liegt im Endlichen, β hingegen im Unendlichen (191).

205. **Was muss man angeben, um zu einem Gebilde einer Ebene ein perspectivisch ähnliches in derselben Ebene construieren zu können?**

Ausser der Angabe des einen Gebildes oder Systemes bedarf man noch: 1. des Projections-Centrums S und 2. eines Paares verwandter Punkte, d. i. eines Punktes und seiner Collinear-Projection.

206. Wie construiert man dann zu irgend einem Punkte des einen Systemes seinen verwandten Punkt im anderen Systeme?

Nehmen wir an, $a_1\, a_2$ sei in Fig. 10 ein Paar verwandter Punkte und es soll der zu b_1 verwandte Punkt b_2 gesucht werden. Zunächst zieht man durch b_1 einen projicierenden Stral (180), so muss b_2 in ihm liegen; sodann zieht man durch b_1 eine Gerade, deren verwandte Gerade im anderen Systeme sich construieren lässt (186). Diese Gerade ist $b_1\, a_1$; denn zieht man durch a_2 eine Gerade zu dem unendlich fernen Begegnungspunkte der Geraden $a_1\, b_1$, so erhält man durch a_2 ein Parallele zu $a_1\, b_1$ und im Schnitte mit dem durch b_1 gehenden projicierenden Stral den Punkt b_2.

Auf diese Art erhält man alle übrigen Punkte und dadurch das zweite System.

207. Wie sind in perspectivisch ähnlichen Systemen die verwandten Winkel beschaffen?

Sie sind einander gleich, weil die verwandten Schenkel parallel laufen (54).

208. Wie steht es in perspectivisch ähnlichen Systemen mit den Entfernungen von jedem Punkte zu seinem verwandten Punkte?

Um diese Frage beantworten zu können, wird man die Lage der verwandten Punkte mit der Lage des Projections-Centrums vergleichen. Das Vergleichen geschieht am einfachsten durch die Ausmittelung einer Zahl, die man durch die Untersuchung findet, wie oft die Entfernung eines Punktes vom Centrum S in der Entfernung seines verwandten Punktes vom Centrum S enthalten ist.

Wir haben also die Zahlenwerte zu untersuchen, welche durch die Brüche $\frac{a_1 S}{a_2 S}, \frac{b_1 S}{b_2 S}, \frac{c_1 S}{c_2 S}, \ldots$ angegeben sind.

209. Wie findet man den Zahlenwert eines solchen Bruches, z. B. von $\frac{a_1 S}{a_2 S}$?

Misst man auf irgend einem Massstabe die Längen $a_1 S$ und $a_2 S$ sehr genau ab, so erhält man Zahlen, welche anzeigen, wie oft die angenommene Längeneinheit in den Längen $a_1 S$ und $a_2 S$

enthalten ist; dividiert man die Zahl der Länge $a_1 S$ durch jene der Länge $a_2 S$, so ist der Quotient der Zahlenwert des Bruches $\frac{a_1 S}{a_2 S}$.

210. Wird der Wert des Bruches $\frac{a_1 S}{a_2 S}$ ein anderer, wenn die Längeneinheit eine andere wird, mit welcher man die Länge $a_1 S$ und $a_2 S$ misst?

Der Wert des Bruches $\frac{a_1 S}{a_2 S}$ ist von der Längeneinheit unabhängig; denn werden zwei Längeneinheiten l und l' zum Messen verwendet, und ist beispielsweise l doppelt oder n mal so gross wie l', so wird l' sowol in $a_1 S$ als auch in $a_2 S$ doppelt oder n mal so oft enthalten sein, als l in diesen Längen enthalten ist; mithin wird sich im Quotienten $\frac{a_1 S}{a_2 S}$, wenn er mit l' gemessen wird, durch die Zahl 2 oder n Zähler und Nenner abkürzen lassen, wodurch dann derselbe Bruch entsteht, den man durch das Messen mit l erhält.

211. Wie gross sind in perspectivisch ähnlichen Systemen die Zahlenwerte der anderen Punktpaare.

Alle diese Zahlenwerte sind einander gleich. Denn ist $b_1 b_2$ irgend ein Paar verwandter Punkte, so muss $a_1 b_1$ parallel zu $a_2 b_2$ sein, folglich wird nach der Lehre von der proportionalen Teilung:

$$b_1 S : b_2 S = a_1 S : a_2 S \text{ oder } \frac{b_1 S}{b_2 S} = \frac{a_1 S}{a_2 S},$$

w. z. b. w.

212. Den Zahlenwert $\frac{a_1 S}{a_2 S}$, der für alle Paare verwandter Punkte unveränderlich ist, wollen wir als den Modulus des ersten Systems bezeichnen und dafür den Buchstaben m_1 setzen. Wir erhalten daher

$$\frac{a_1 S}{a_2 S} = m_1 \text{ sonach } a_1 S = m_1 \,.\, a_2 S.$$

Fig. 11.

213. Den reciproken Wert $\frac{a_2 S}{a_1 S} = m_2$ erkläre man als den Modulus des zweiten Systemes; sodann ist $a_2 S = m_2 \,.\, a_1 S$, und $m_1 . m_2 = +1$.

214. Wenn man für perspectivisch ähnliche Systeme einen Modulus, z. B. m_2 angibt, vermag man dann

zu jedem Punkte des ersten Systemes den verwandten Punkt im zweiten Systeme aufzufinden?

Gewiss; denn ist z. B. in Fig. 11 $m_2 = 3$, und X_1 irgend ein Punkt des ersten Systemes, so ist nach dem Begriffe vom Modulus des zweiten Systemes (213) $X_2 S = m_2 \,.\, X_1 S = 3 \,.\, X_1 S$. Trägt man sonach die dreifache Länge $X_1 S$ von S aus auf dem durch X_1 gehenden projicierenden Strale auf, so ist der andere Endpunkt dieser Strecke der gesuchte Punkt X_2.

Da $X_2 S = m_2 \,.\, X_1 S$ und $X_2 S = X_2 X_1 + X_1 S$, so folgt $X_2 X_1 + X_1 S = m_2 \,.\, X_1 S$, mithin $X_2 X_1 = (m_2 - 1)\, X_1 S$. Diese letzte Formel zeigt, dass die Distanz $X_2 X_1$ zweier verwandten Punkte von zwei Dingen abhängig ist, einmal vom Modulus und das anderemal von der Entfernung des einen Punktes vom Projections-Centrum.

215. Wie kann man es durch den Modulus ersichtlich machen, wenn je zwei verwandte Punkte auf entgegengesetzten Seiten vom Projections-Centrum S liegen?

Dies geschieht durch das Vorzeichen. Sind X_1 und X_2 zwei Punkte auf entgegengesetzten Seiten von S, so ist auch die Richtung von X_1 nach S entgegengesetzt jener von X_2 nach S, folglich ist man berechtigt, in diesem Falle den Wert des Quotienten $\frac{X_1 S}{X_2 S}$ negativ anzunehmen.

216. In welcher Beziehung stehen irgend zwei verwandte Strecken in zwei perspectivisch ähnlichen Systemen?

Das Verhältnis verwandter Strecken ist dem Modulus des Systemes gleich. Sind z. B. in Fig. 10 $a_1 c_1$ und $a_2 c_2$ irgend zwei verwandte Strecken (186), so ist in Folge ähnlicher Dreiecke $a_1 c_1 : a_2 c_2 = a_1 S : a_2 S$; und weil $a_1 S : a_2 S = m_1$ der Modulus des ersten Systemes ist, so ist auch $a_1 c_1 : a_2 c_2 = m_1$, w. z. b. w.

Wäre der Modulus $= -1$, so würde $a_1 c_1 = c_2 a_2$ werden.

217. Kann man annehmen, dass bei zwei perspectivisch ähnlichen Systemen an einem und demselben Orte zwei Punkte vereinigt liegen, deren jeder einem anderen Systeme angehört?

Nehmen wir an, es liegen in Fig. 11 an einem Orte die Punkte X_1 und Y_2 beisammen und $m_2 = 3$ sei der Modulus des

zweiten Systemes, so ist nach (213) $m_1 = \frac{1}{m_2} = \frac{1}{3}$ der Modulus des ersten Systemes, folglich erhalten wir: $X_2 S = m_2 . X_1 S = 3 . X_1 S$ und $Y_1 S = m_1 . Y_2 S = \frac{1}{3} Y_2 S$. Da man nun X_2 und Y_1 gefunden hat, so ist auch die Frage im bejahenden Sinne beantwortet.

218. Aus dieser Betrachtung ziehen wir einen weiteren Schluss, indem wir sagen: zu jedem Punkte in der Ebene von zwei perspectivisch ähnlichen Systemen gehören im Allgemeinen zwei verschiedene Punkte, je nachdem man den angenommenen Punkt dem ersten oder dem zweiten Systeme angehören lässt.

219. Wenn aber zu jedem Punkt in der Ebene von zwei projectivischen Systemen in perspectivischer Lage immer nur wieder derselbe Punkt als verwandt dazu gehört, man mag den ersteren Punkt dem ersten oder dem zweiten Systeme angehören lassen, dann sagt man, die Punktepaare und auch die beiden Systeme seien einander doppelt verwandt, oder sie seien **involutorisch.**

220. **Wodurch wird die involutorische Lage von zwei perspectivisch ähnlichen Systemen bedingt?**

Fig. 12.

Durch den Wert des Modulus (212). Ist dieser $= - 1$, so liegen die Systeme involutorisch.

Nehmen wir an, in Fig. 12 sei $m_1 = -1$, folglich auch $m_2 = \frac{1}{m_1} = -1$ (213) und a_1 ein Punkt der Ebene, an welchem Orte a_1 auch ein Punkt A_2 des zweiten Systemes liegen soll, so kann man fragen, wo der Punkt a_2 des zweiten Systemes und A_1 des ersten Systemes liegt In Folge der Gleichheit von m_1 und m_2 findet man die Punkte a_2 und A_1 wieder vereinigt, also bilden jene zwei Orte, wo a_1 und a_2 liegen, ein doppelt verwandtes Punktepaar.

221. **Wie sind perspectivisch ähnliche Gebilde in involutorischer Lage beschaffen?**

Sie sind congruent, weil alle verwandten Winkel und Strecken einander gleich sind (207, 216).

222. **Gibt es bei perspectivisch ähnlichen Systemen auch Probepunkte und Probelinien?** (200.)

Schneiden sich zwei Gerade des einen Systemes, so ist ihr Schnittpunkt zu jenem Punkte ein Probepunkt, in welchem sich die zwei verwandten Geraden schneiden; beide Punkte müssen

mit dem Projections-Centrum S in einer geraden Linie liegen. In Fig. 10 sind zwei Probepunkte durch Verlängerung von Polygonseiten angegeben. Zieht man die Geraden $a_1 c_1$, $a_2 c_2$, so müssen sie zu einander parallel sein, mithin sind sie Probelinien.

223. Kann man die Construction perspectivisch ähnlicher Gebilde zu Abbildungen geometrischer Gebilde verwerten?

Wird eine Pyramide oder eine Kegelfläche mit zwei parallelen Ebenen begrenzt, so gibt es gewisse Arten von Abbildungen dieser begrenzten Körper, welche genau so wie perspectivisch ähnliche Systeme construiert werden. Beachtet man den Vorgang in Fig. 9 und vergleicht hiemit Fig. 10, so sieht man ein, dass aus Fig. 10 das Bild einer fünfseitigen, parallel mit der Basis abgeschnittenen Pyramide hergestellt werden kann. Würde man die Basis $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ als sichtbar annehmen, so würden die Geraden $a_2 b_2$, $b_2 c_2$, $c_2 d_2$ und $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ als Bilder von unsichtbaren Linien zu stricheln sein.

Benützt man Curven, so erhält man Bilder von Kegelflächen und kann man auf eine ähnliche Art wie in Fig. 9 auch Ebenen abbilden, welche durch die Spitze der Pyramiden- oder Kegelfläche gehen.

224. Proportionaldreiecke und Proportionalwinkel.

Jene Dreiecke, welche zu dem Zwecke construiert werden, um mit ihrer Hilfe die Längen gegebener Strecken nach einem gegebenen Verhältnisse zu verändern, nennt man Proportionaldreiecke.

225. Auf welchem Grundsatze beruhen die Proportionaldreiecke?

Sie beruhen auf dem Grundsatze: Wenn die Seiten der Dreiecke beziehungsweise parallel sind, so sind in jedem Dreiecke die Verhältnisse der Seitenlängen dieselben.

Die Proportionaldreiecke werden gewöhnlich so gezeichnet, dass alle einen gemeinsamen Winkel haben.

226. Bei der Benützung treten zwei Fälle ein; entweder benützt man das Verhältnis der den gemeinsamen Winkel einschliessenden Seiten oder das Verhältnis einer dieser Seiten zu der dem gemeinsamen Winkel gegenüberliegenden Seite.

227. Im letzteren Falle macht man am einfachsten die den gemeinsamen Winkel einschliessenden Seiten einander gleich, und bezeichnet den Winkel als Proportionalwinkel.

Beispiel. Man soll mehrere gegebene Längen l_1 l_2 nach dem Verhältnisse von $AB : AC$ verändern.

228. 1. **Auflösung.** Man zeichne ein Dreieck ABC, in welchem zwei Seiten die gegebenen Längen AB und AC erhalten (225). Die dritte Seite kann entweder beliebig sein, oder ebenfalls nach irgend einem brauchbaren Verhältnisse angenommen werden. In Fig. 13 wurde BC gleich Zweidrittel von AB

Fig. 13.

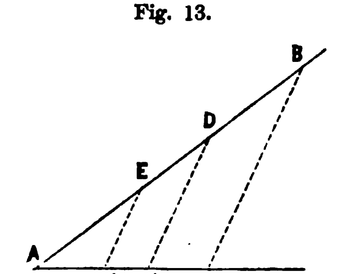
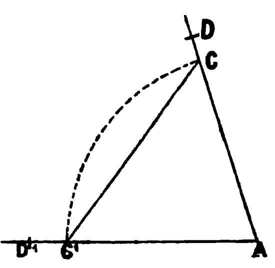


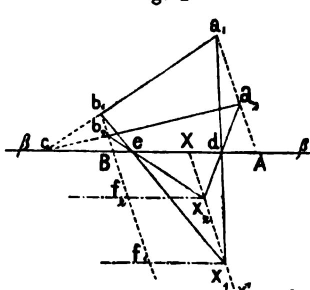
Fig. 14.



gesetzt. Macht man jetzt $AD = l_1$ und zieht durch D eine Parallele zur dritten Dreiecksseite BC, so erhält man AD' als die nach dem Verhältnisse von $AB : AC$ veränderte Länge von l_1, die man mit l'_1 bezeichne. Die Gerade DD' ist zugleich Zweidrittel der gegebenen Länge l_1. Auf dieselbe Art verändert man auch die Länge $l_2 = AE$.

229. Ist das Verhältnis der Längenänderung nicht in Strecken, sondern in Zahlen gegeben, soll z. B. $l'_1 = \frac{6}{5}\, l_1$ werden, so wird man eine Dreiecksseite, etwa AB, gleich 5, die andere AC gleich 6 beliebigen gleichen Teilen setzen und l_1 auf der Seite der 5 Teile auftragen, weil ja l'_1 grösser wird als l_1.

Fig. 15.



230. 2. **Auflösung.** Man construire ein Dreieck, in welchem zwei Seiten die Länge von AC erhalten und die dritte Seite der veränderten Länge AB entspricht (227). In Fig. 14 ist nun $AC' = AC$ und $CC' = \frac{6}{5}\, AB$ gemacht worden. Trägt man die Länge l_1 auf den gleichen Seiten nach AD und AD' auf, so ist offenbar die Seite DD' parallel zu CC' und in Folge dessen $AD : DD' = AC : CC'$, mithin ist die Entfernung der Punkte D und D' schon die gesuchte Länge $l'_1 = \frac{6}{5}\, l_1$.

Diese Methode mit dem Proportionalwinkel ist in den meisten Fällen anwendbar und desshalb sehr bequem, weil man sich das Ziehen paralleler Geraden ersparen kann.

231. Bei der Construction perspectivisch ähnlicher Systeme wird man die Proportionaldreiecke sehr gut verwerten können, weil ja das Verhältnis der Entfernungen verwandter Punkte vom Project ionscentrum, d. i. der Modulus, eine constante Grösse ist.

C. Perspectivische Affinität.

§. 11.

232. Welche Lage haben bei perspectivisch affinen Gebilden die projicierenden Stralen?

Sie sind parallel, liegen in einerlei Ebene und je zwei verwandte Gerade schneiden sich in einem Punkte der endlich gelegenen Begegnungsgeraden (181).

233. Von zwei perspectivisch affinen Systemen pflegt man gewöhnlich ein System, die Begegnungsgerade β und ein Paar verwandter Punkte anzugeben.

234. Ist in Fig. 15 $a_1 a_2$ ein solches Punktepaar und b_1 ein neuer Punkt des ersten Systemes, so liegt nach dem ersten allgemeinen Projectionsgesetze (180) b_2 in einem durch b_1 gehenden projicierenden Strale; zieht man demnach durch b_1 eine Parallele zu $a_1 a_2$, so muss in ihr b_2 liegen.

Verbindet man ferner a_1 mit b_1 und sucht den Begegnungs punkt c, so muss nach dem zweiten allgemeinen Projectionsgesetze (181) die zu $a_1 b_1$ verwandte Gerade durch c gehen, folglich ist der Schnitt der Geraden $a_2 c$ mit dem durch b_1 gehenden projicierenden Strale der gesuchte mit b_1 verwandte Punkt b_2 (186).

235. Welche durch Zahlen ausdrückbare Beziehungen ergeben sich in perspectivisch affinen Systemen in der Lage verwandter Punkte gegen die Begegnungsgerade β?

Das Verhältnis ihrer in der Richtung der projicierenden Stralen gemessenen Entfernungen von der Begegnungsgeraden β ist eine constante Grösse.

Beweis. Projiciert man die drei Punkte $a_1 a_2 A$ aus irgend einem Punkte d der Begegnungsgeraden β auf einen beliebigen durch das in unendlicher Entfernung liegende Projections-Centrum

S gehenden Stral x', so sind die projicierenden Geraden da_1 und da_2 offenbar verwandte Gerade der perspectivisch affinen Systeme (234), folglich müssen auch die Punkte $x_1\, x_2$ verwandte Punkte dieser Systeme sein. Die dritte projicierende Gerade dA fällt mit β zusammen und erzeugt auf x' den Punkt X.

In Folge ähnlicher Dreiecke erhält man nun:

$$x_1 X : x_2 X = a_1 A : a_2 A \text{ oder } \frac{x_1 X}{x_2 X} = \frac{a_1 A}{a_2 A},$$

w. z. b. w.

Man bezeichnet den Quotienten $\frac{a_1 A}{a_2 A}$ mit m_1 als Modulus des ersten, und $\frac{a_2 A}{a_1 A}$ mit m_2 als Modulus des zweiten Systemes.

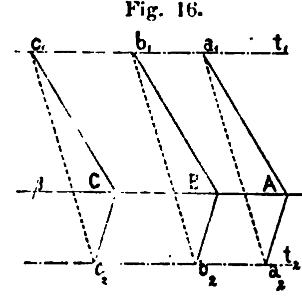
236. **Wenn man aus dem Punkte x_1 den Punkt x_2 mit Hilfe eines anderen Paares verwandter Punkte hätte ableiten wollen, würde man denselben Punkt x_2 gefunden haben, der bei der Benützung des Punktepaares $a_1 a_2$ erhalten wurde?**

Nach dem vorhergehenden Beweise ist

$\frac{x_1 X}{x_2 X} = \frac{a_1 A}{a_2 A}$ und ebenso $\frac{b_1 B}{b_2 B} = \frac{a_1 A}{a_2 A}$, mithin ist auch $\frac{x_1 X}{x_2 X} = \frac{b_1 B}{b_2 B}$.

Verbindet man b_1 mit x_1, wodurch man einen Begegnungspunkt e erhält, und zieht man $b_2 e$ bis der Stral x' getroffen wird, in einem Punkte x'_2, so ist $\frac{x_1 X}{x'_2 X} = \frac{b_1 B}{b_2 B}$; mithin erhält man, wenn die dem Bruche $\frac{b_1 B}{b_2 B}$ gleichen Werte einander gleichgesetzt werden: $\frac{x_1 X}{x_2 X} = \frac{x_1 X}{x'_2 X}$ und hieraus folgt $x'_2 X = x_2 X$, d. h. x'_2 muss mit dem früher gefundenen x_2 zusammenfallen.

Fig. 16.



Hieraus geht hervor, dass man zur Bestimmung eines neuen Paares verwandter Punkte irgend eines der bereits bekannten Punktepaare benützen kann.

237. **Kann man bei der Construction perspectivisch affiner Systeme auch die Proportionaldreiecke verwerten?**

Weil das Verhältnis der Entfernungen verwandter Punkte, in der Richtung der projicierenden Stralen gemessen, von der Begegnungsgeraden β eine constante Grösse ist (235), so darf

man nur zwei Seiten eines Proportionaldreieckes den Längen $a_1 A$ und $a_2 A$ gleich machen (228), um nach demselben Verhältnisse jede andere Länge $x_1 X$ zu verändern, und dadurch x_2 zu finden.

Bezeichnet man $\frac{a_1 A}{a_2 A}$ mit m_1 und $\frac{a_2 A}{a_1 A}$ mit m_2, so wird $m_1 . m_2 = \frac{a_1 A}{a_2 A} \cdot \frac{a_2 A}{a_1 A} = 1$, folglich sind wieder die beiden Moduli m_1, m_2 einander reciprok, wie dies bei den perspectivisch ähnlichen Systemen der Fall war (213).

238. Gibt es in perspectivisch affinen Systemen verwandte Gerade, die zu einander parallel sind?

Ist eine Gerade des einen Systemes zur Begegnungsgeraden β parallel, so liegt der Begegnungspunkt mit ihrer verwandten Geraden im Unendlichen (181), folglich ist sie zu ihrer verwandten Geraden parallel. Es sind sonach in perspectivisch affinen Systemen nur jene verwandten Geraden parallel, welche gleichzeitig auch mit der Begegnungsgeraden parallel sind; $x_1 f_1$ und $x_2 f_2$ sind verwandte und || Gerade in Fig. 15.

239. In welchem Verhältnisse stehen in perspectivisch affinen Systemen die Längen von je zwei verwandten Strecken?

Dieses Verhältnis ist nur für verwandte Strecken, die in denselben zwei verwandten Geraden liegen, constant; für andere verwandte Gerade haben diese Verhältnisse andere Werte. So ist z. B. $\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = \frac{b_1 c}{b_2 c}$ und $\frac{a_1 d}{a_2 d} = \frac{a_1 x_1}{a_2 x_2}$, aber $\frac{a_1 d}{a_2 d}$ ist nicht gleich $\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$.

Sind die verwandten Geraden parallel, so wird das Verhältnis der Einheit gleich; es ist daher $\frac{x_1 f_1}{x_2 f_2} = 1$. Fig. 15.

240. Wenn in einem von zwei perspectivisch affinen Systemen eine Reihe von Geraden untereinander parallel sind, so sind auch die ihnen verwandten Geraden untereinander parallel.

Es sei in Fig. 16 $a_1 a_2$ ein Paar verwandter Punkte und die Geraden Bb_1, Cc_1 seien zu Aa_1 parallel. Man ziehe durch a_1 eine Gerade t_1 zu β parallel, so geht t_2 durch a_2 auch zu β parallel (238). Die projicierenden Stralen durch b_1 und c_1 bestimmen in t_2 die Punkte $b_2 c_2$; dabei ist $a_2 b_2 = a_1 b_1$, und weil $a_1 b_1 = AB$, so ist auch $a_2 b_2 = AB$ und hieraus folgt, dass Aa_2 mit Bb_2 parallel sein muss. Auf gleiche Art ergibt sich auch Cc_2 parallel zu Aa_2 w. z. b. w.

241. **Wie viele Paare verwandter Punkte sind erforderlich, um zwei perspectivisch affine Systeme zu bestimmen?**

Drei Paare, die nicht in derselben Geraden liegen. Nehmen wir z. B. in Fig. 15 die Punktepaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $x_1 x_2$ an, welche in drei parallelen Geraden $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $x_1 x_2$ liegen, so geben diese Geraden die Richtung der projicierenden Stralen an. Die Geraden $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ geben einen Punkt c, durch welchen die Begegnungsgerade β gehen muss. Einen zweiten Punkt d geben die Geraden $a_1 x_1$, $a_2 x_2$ und durch c und d geht β. Sobald nun β gefunden, kann man jedes beliebige Punktepaar construieren.

Aus dieser Betrachtung erkennt man folgende Wahrheit:

242. Sind zwei Dreiecke $a_1 b_1 x_1$ und $a_2 b_2 x_2$ so gelegen, dass die drei Geraden $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $x_1 x_2$ parallel gehen, so liegen die Schnittpunkte c, d und e der verwandten Seiten in einer geraden Linie.

243. **Wann werden zwei perspectivisch affine Systeme congruent?**

Wenn die projicierenden Stralen auf der Begegnungsgeraden senkrecht stehen und wenn je zwei verwandte Punkte auf entgegengesetzten Seiten von β in gleichen Distanzen von β liegen, wenn also der Modulus eines jeden der beiden Systeme $= -1$ ist.

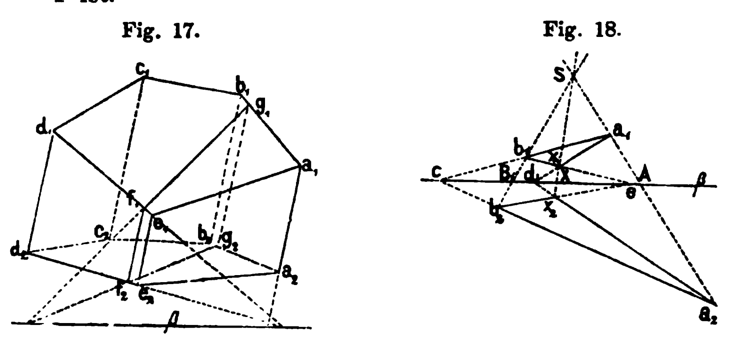


Fig. 17. Fig. 18.

244. Der negative Modulus zeigt immer an, dass je zwei verwandte Punkte auf entgegengesetzten Seiten der Begegnungsgeraden liegen. In Fig. 15 ist der Modulus positiv, in Fig. 16 negativ.

245. Auf eine ähnliche Art wie bei perspectivisch congruenten und perspectivisch ähnlichen Systemen kann man perspecti-

visch affine Systeme zur Darstellung von Abbildungen prismatischer und cylindrischer Formen benützen, wie dies an einem einfachen Beispiele in Fig. 17 zu ersehen.

Wichtig sind bei derartigen Constructionen die Probepunkte und Probelinien, welche der Lernende bei seinen Zeichnungen aufzusuchen nicht unterlassen wolle. Zieht man in Fig. 17 z. B. $f_1 f_2$ und $g_1 g_2$ zur projicierenden Richtung parallel, so muss die Probe zeigen, dass $f_1 g_1$ und $f_2 g_2$ sich in einem Punkte der β schneiden.

246. Die genauesten Resultate erzielt man bei perspectivisch ähnlichen und affinen Systemen immer durch die Anwendung der Proportionaldreiecke auf die Ausmittelung verwandter Punkte (225).

Aufgabe. Es ist zu irgend einer geschlossenen Curve eine affine Curve nach dem Modulus $m_2 = -2$ aufzusuchen und sodann das Bild einer Cylinderfläche herzustellen; die Richtung der projicierenden Stralen gegen β kann beliebig angenommen werden.

D. Die perspectivische Collineation. Begriff von Punktwerten. Involutorisches System.

§. 12.

Bei der perspectivischen Collineation sind die projicierenden Stralen central und die Begegnungsgerade β liegt im Endlichen (193).

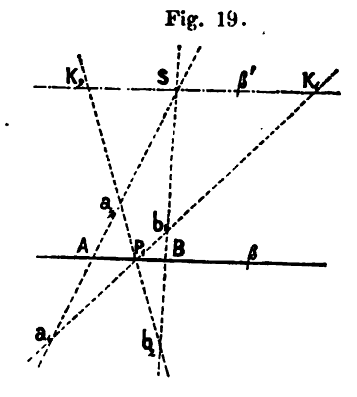
247. Die perspectivische Collineation kann am einfachsten durch das Projectionscentrum S, die Begegnungsgerade β und ein Paar verwandter Punkte angegeben werden.

Ist $a_1 a_2$ ein solches Punktepaar in Fig. 18 und b_1 ein Punkt des ersten Systemes, so muss b_2 in dem Strale Sb_1 liegen (180). Zieht man $a_1 b_1$, bestimmt den Begegnungspunkt c, so muss nach dem zweiten allgemeinen Projectionsgesetz (181) die verwandte Gerade oder Colinear-Projection $a_2 b_2$ auch durch c gehen, sonach schneidet die Gerade $a_2 c$ den Stral Sb_1 in dem gesuchten Punkte b_2 (186).

Auf diese Art kann man jedes andere Paar verwandter Punkte construieren, wenn man einen Punkt desselben kennt. In Fig. 18 wurde das Punktepaar $x_1 x_2$ sowol aus $a_1 a_2$ als auch aus $b_1 b_2$ bestimmt; dabei haben wir nur zu beweisen, dass man stets denselben Punkt x_2 findet, ob man $a_1 a_2$ oder $b_1 b_2$ benützt.

248. Wie kann man bei der perspectivischen Collineation die Lage eines Punktes bestimmen?

Fig. 19.



Man ziehe in Fig. 19 durch den Punkt, z. B. durch a_1, einen projicierenden Stral $S a_1$, so wird dieser die Begegnungsgerade β in einem Punkte A schneiden; gibt man an, wie oft $a_1 A$ in $a_1 S$ enthalten ist, so weiss man auch, wo a_1 in dem Strale $a_1 S$ liegt. Wäre z. B. $a_1 A$ in $a_1 S$ dreimal oder n-mal enthalten, so muss $a_1 A$ in $A S$ offenbar um einmal weniger oft, d. i. zweimal oder $(n-1)$ mal enthalten sein. Teilt man dann $A S$ in zwei oder $(n-1)$ gleiche Teile und macht $a_1 A$ einem dieser Teile gleich, so hat man a_1 fixiert.

Liegt ein Punkt zwischen A und S, wie z. B. a_2, so wird man ebenfalls die Lage von a_2 durch die Zahl anzeigen, die angibt, wie oft $a_2 A$ in $a_2 S$ enthalten ist.

Wäre etwa $a_2 A$ in $a_2 S$ zweimal oder n-mal enthalten, so ist $a_2 A$ in $A S$ um einmal öfter, d. i. dreimal oder $(n+1)$ mal enthalten. Teilt man dann $A S$ in drei oder $(n+1)$ gleiche Teile und macht $a_2 A$ einem Teil gleich, so hat man a_2 gefunden.

249. Warum gibt man nicht einen Punkt, wie z. B. a_1, durch den Abstand von S an, warum wählt man die beiden Abstände $a_1 S$ und $a_1 A$?

Wenn man die Entfernung $a_1 S$ angibt, so muss man einen Massstab haben, auf welchem man die Länge $a_1 S$ abmisst; wenn man aber angibt, wie oft $a_1 A$ in $a_1 S$ enthalten ist, so bedarf man dazu keines Massstabes und kann doch den Ort bestimmen, wo a_1 liegt (248).

250. Worin besteht demnach das neue Mittel, die Lage eines Punktes in einer geraden Linie anzugeben?

Fig. 20.

M S A

Es besteht in Folgendem: Man wählt sich in der geraden Linie zwei feste Punkte, z. B. S und A in Fig. 20, und gibt den Quotienten der Entfernungen des zu fixierenden Punktes M von diesen Punkten S und A an.

251. Einen derartigen Quotienten wollen wir einen Punktwert nennen; die beiden festen Punkte S und A, mit welchen man

die Lage der übrigen Punkte der Geraden vergleicht, bezeichne man als Vergleichspunkte und zwar jenen als den ersten, der im Punktwert im Zähler steht, den andern als den zweiten Vergleichspunkt. In den Punktwerten $\frac{MS}{MA}$ oder $\frac{a_1 S}{a_1 A}$ oder $\frac{a_2 S}{a_2 A}$ ist S der erste und A der zweite Vergleichspunkt.

Ein Punktwert soll positiv genannt werden, wenn man vom Punkte aus in demselben Sinne zu beiden Vergleichspunkten gelangt; sonst aber negativ. Demnach ist für Fig. 19 $\frac{a_1 S}{a_1 A}$ ein positiver, $\frac{a_2 S}{a_2 A}$ ein negativer, für Fig. 20 $\frac{MS}{MA}$ ein positiver Punktwert.

252. In welcher Beziehung stehen nun die Punktwerte von zwei verwandten Punkten in zwei perspectivisch collinearen Systemen?

Das Verhältnis der Punktwerte (251) von zwei verwandten Punkten ist in zwei perspectivisch collinearen Systemen eine unveränderliche Grösse, d. h. dividirt man den Punktwert eines Punktes des ersten Systemes durch den Punktwert des verwandten Punktes vom zweiten Systeme, so ist der Quotient aus je zwei verwandten Punktwerten derselbe, wenn das Projectionscentrum stets der erste und der im projicierenden Strale liegende Begegnungspunkt der zweite Vergleichspunkt ist.

Beweis. Nehmen wir an, in Fig. 19 sei $a_1 a_2$ ein Paar verwandter Punkte, P ein beliebiger Begegnungspunkt in β; also sind Pa_1 d. i. p_1 und Pa_2 d. i. p_2 zwei verwandte Gerade (186), und zieht man durch S irgend einen projicierenden Stral, so sind dessen zwei Schnitte mit p_1 und p_2 jederzeit zwei verwandte Punkte.

253. Unter all' den möglichen Stralen durch S ziehen wir den zur Begegnungsgeraden β parallelen β' und bezeichnen ihn als die Centrale der beiden Systeme.

Vergleicht man dann die Lagen von a_1 a_2 mit k_1 und k_2, so gelangt man zur Erkenntnis des zu beweisenden Satzes.

Der Punktwert von a_1 ist $\frac{a_1 S}{a_1 A}$; sieht man in die ähnlichen Dreiecke $a_1 Sk_1$ und $a_1 AP$, so erkennt man die Gleichheit der beiden Quotienten $\frac{a_1 S}{a_1 A}$ und $\frac{K_1 S}{P A}$.

Der Punktwert von a_2 ist $\frac{a_2 S}{a_2 A}$; sieht man in die ähnlichen Dreiecke $a_2 Sk_2$ und $a_2 AP$, so erkennt man auch die Gleich-

heit der beiden Quotienten $\frac{a_2 S}{a_2 A}$ und $\frac{k_2 S}{PA}$, woraus sich ergibt: $\frac{a_1 S}{a_1 A} : \frac{a_2 S}{a_2 A} = \frac{k_1 S}{PA} : \frac{k_2 S}{PA}$. Schafft man die gleichen Nenner des dritten und vierten Gliedes fort, so erhält man:

$$\frac{a_1 S}{a_1 A} : \frac{a_2 S}{a_2 A} = k_1 S : k_2 S \;\ldots\ldots\; 1)$$

254. **Was hat diese Gleichung für eine Bedeutung?** Sie gibt uns an, wie man das Verhältnis von zwei Punktwerten $\frac{a_1 S}{a_1 A}$ und $\frac{a_2 S}{a_2 A}$ durch das Verhältnis von zwei Strecken ausdrücken kann; in die Wortsprache übersetzt, sagt sie Folgendes aus:

Um das Verhältnis von zwei Punktwerten $\frac{a_1 S}{a_1 A} : \frac{a_2 S}{a_2 A}$ durch ein Verhältnis von zwei Strecken auszudrücken, projiciere man aus einem beliebig gewählten Punkte P der Geraden β ausserhalb der Geraden SA die beiden Punkte $a_1 a_2$ auf die Centrale β' (253) nach k_1 und k_2, dann geben die Projectionen $k_1 k_2$ der Punkte $a_1 a_2$ mit ihren Entfernungen von S, d. i. mit $k_1 S$ und $k_2 S$ das Verhältnis der Punktwerte an; es ist nämlich dies Verhältnis der Punktwerte $= k_1 S : k_2 S$.

Ist $k_2 S$ in $k_1 S$ zweimal oder n-mal enthalten, so ist auch der Punktwert $\frac{a_2 S}{a_2 A}$ in $\frac{a_1 S}{a_1 A}$ zwei- oder n-mal enthalten.

Es ist bemerkenswert, dass vom Punkte A die Projection auf den unendlich fernen Punkt in β' fallen muss, weil PA mit β' parallel ist.

255. Schreibt man die Gleichung 1) in folgender Ordnung:

$$k_1 S : k_2 S = \frac{a_1 S}{a_1 A} : \frac{a_2 S}{a_2 A} \;\ldots\ldots\; 2)$$

so sagt die Gleichung 2) folgendes aus:

Projiciert man die Strecken $k_1 S$, $k_2 S$, sowie auch den unendlich fernen Punkt der Geraden $k_1 S k_2$ aus einem beliebigen Begegnungspunkte P auf einen beliebigen durch S gehenden Stral SA, so geht das Verhältnis der Abstände der Punkte k_1 und k_2 von S auf das Verhältnis der Punktwerte ihrer Projectionen unverändert über, wenn man S zum ersten und die Projection A des unendlich fernen Punktes in β' zum zweiten Vergleichspunkt wählt.

Nach diesem höchst wichtigen Gesetze ist nun auch

$$k_1 S : k_2 S = \frac{b_1 S}{b_1 B} : \frac{b_2 S}{b_2 B},$$

folglich erhält man durch Gleichsetzung mit 2)

$$\frac{a_1 S}{a_1 A} : \frac{a_2 S}{a_2 A} = \frac{b_1 S}{b_1 B} : \frac{b_2 S}{b_2 B} \;\ldots\ldots\; 3)$$

was in (252) behauptet wurde.

256. In Fig. 18 ist nun $\frac{x_1 S}{x_1 X} : \frac{x_2 S}{x_2 X}$ sowol dem $\frac{a_1 S}{a_1 A} : \frac{a_2 S}{a_2 A}$ als auch dem $\frac{b_1 S}{b_1 B} : \frac{b_2 S}{b_2 B}$ gleich; mithin kann man, wenn x_1 angenommen ist, immer nur denselben Punkt x_2 finden, man mag $a_1 a_2$ oder $b_1 b_2$ zur Bestimmung von x_2 benützen.

257. Das constante Verhältnis der verwandten Punktwerte in zwei perspectivisch collinearen Systemen bezeichne man als den Modulus der Systeme; es ist also:

$$\frac{a_1 S}{a_1 A} : \frac{a_2 S}{a_2 A} = m_1 \text{ und } \frac{a_2 S}{a_2 A} : \frac{a_1 S}{a_1 A} = m_2, \text{ folglich } m_1 \cdot m_2 = 1.$$

258. Der Modulus ist positiv, wenn beide Punktwerte positiv sind, negativ im entgegengesetzten Falle. In Fig. 19 ist der Modulus negativ, denn $\frac{a_1 S}{a_1 A}$ ist positiv, $\frac{a_2 S}{a_2 A}$ negativ, oder auch $k_1 S$ hat den entgegengesetzten Sinn von $k_2 S$, also sind $m_1 = \frac{k_1 S}{k_2 S}$ und $m_2 = \frac{k_2 S}{k_1 S}$ negative Moduli.

259. Wie kann man nach einem gegebenen Modulus zwei perspectivisch collineare Systeme construieren?

Nehmen wir an, es sei $m_1 = -2$.

Man ziehe irgend eine Begegnungsgerade β, wähle irgend einen Punkt S als Projectionscentrum in der Ebene, ziehe eine Centrale, d. i. zu β eine Parallele β' durch S, und wähle in ihr, weil der Modulus negativ ist, auf entgegengesetzten Seiten von S zwei Punkte k_1 und k_2 derart, auf dass der Grösse nach $k_1 S : k_2 S = 2$ wird, so sind k_1 und k_2 (Fig. 19) zwei verwandte Punkte der perspectivisch collinearen Systeme. Zieht man dann durch S einen beliebigen Stral SA und projiciert aus irgend einem Punkte P der Begegnungsgeraden β die verwandten Punkte $k_1 k_2$ auf diesen Stral, so sind die Projectionen $a_1 a_2$ abermals zwei verwandte Punkte der perspectivisch collinearen Systeme. Auf ähnliche Art kann man $k_1 k_2$ für die übrigen Punktepaare,

oder auch als Probepunkte für bereits bekannte Punktepaare Fig. 18 benützen.

260. **Für welchen Wert des Modulus entstehen involutorische Systeme?** (219.)

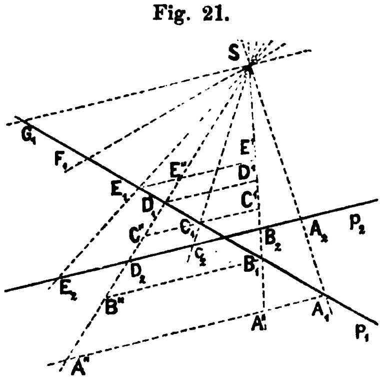
Für $m_1 = m_2 = -1$ (257). Würde demnach in Fig. 19 $k_1 S = S k_2 = -k_2 S$ angenommen werden, dann würde man zu dem Orte a_1 stets den Ort a_2 finden, einerlei, ob man den Ort a_1 dem ersten oder dem zweiten Systeme angehören lässt. Zwei derart verwandte Systeme machen zusammen ein sogenanntes involutorisches System aus; denn je zwei verwandte Punkte bilden ein involutorisches Punktepaar, weil es zwei Paare verwandter Punkte involviert.

261. **Durch wie viele Paare verwandter Punkte sind zwei perspectivisch collineare Systeme bestimmt?**

Durch drei Paare. Nehmen wir an, in Fig. 18 seien $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $x_1 x_2$ drei solche Paare, so müssen sie zuerst die Bedingung erfüllen, dass die drei Geraden $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $x_1 x_2$ sich in einem einzigen Punkte S schneiden, welcher das Projectionscentrum ist. Sucht man dann zwei Paare verwandter Geraden, etwa $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ und $a_1 x_1$, $a_2 x_2$, so geben diese zwei Punkte c und d, welche in β liegen, wodurch nun β gefunden ist. Nun erscheint $x_1 x_2$ als ein Paar verwandter Punkte, das aus S, β, a_1, a_2 nach dem Verfahren des räumlichen Projicierens bestimmt wird, woraus wir schliessen, dass auch der Schnitt e von $b_1 x_1$ mit $b_2 x_2$ in β liegen muss.

262. **Durch wieviele Paare verwandter Geraden sind zwei perspectivisch collineare Systeme bestimmt?**

Fig. 21.



Durch drei Paare; die drei Schnittpunkte der drei Paare von Seiten müssen in einer Gerade liegen, welche die Begegnungsgerade der beiden Systeme wird. Sucht man dann zwei Paare verwandter Punkte, so geben diese zwei projicierende Stralen, deren Schnittpunkt S das Projectionscentrum wird. Sodann sind die perspectivisch collinearen Beziehungen wie bei Fig. 18 hergestellt und muss dann auch der Stral durch das dritte Paar verwandter Punkte durch S gehen.

263. Wann liegen sonach zwei Dreiecke in einer Ebene perspectivisch collinear?

Sie liegen perspectivisch collinear entweder, wenn drei Verbindungsgerade von Eckenpaaren sich in einem einzigen Punkte schneiden, oder wenn drei Schnittpunkte von Seitenpaaren in einer geraden Linie liegen. Findet sich eine dieser beiden Eigenschaften bei zwei Dreiecken einer Ebene vor, so ist auch die andere Eigenschaft vorhanden.

264. Perspectivisch collineare Gebilde können ebenso wie die früher besprochenen perspectivischen Gebilde zur Erzeugung von Abbildungen körperlicher Formen, von Pyramiden, Prismen, Kegeln und Cylindern verwendet werden und kann sich der Lernende leicht nach dem früher befolgten Vorgange solche Bilder entwerfen.

Auch ist die Ausmittelung der Probepunkte und Probelinien eine nun selbstverständliche Sache (200).

Aufgabe. Man gebe einem Kreise specielle Lagen gegen S und β, und construiere die Collinear-Projection des Kreises.

Das projectivische Grundgesetz von projectivisch verwandten geraden Punktreihen.

§. 13.

265. In welcher durch Zahlen ausdrückbaren Beziehung stehen zwei projectivisch verwandte gerade Punktreihen?

Die Verhältnisse der Punktwerte in der einen Reihe sind gleich den Verhältnissen der verwandten Punktwerte in der anderen Reihe.

Beweis. In Fig. 21 wird die gerade Punktreihe $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \ldots$ der Geraden p_1 aus irgend einem Punkte S auf eine beliebige andere Gerade p_2 projiciert, wodurch eine zweite gerade Punktreihe $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 \ldots$ entsteht, welche man der ersteren Reihe $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \ldots$ projectivisch verwandt nennt. Wählt man aus den Punkten der ersten Reihe zwei beliebige derselben zu Vergleichspunkten, etwa B_1 zum ersten und D_1 zum zweiten und ihre Projectionen B_2 zum ersten und D_2 zum zweiten Vergleichspunkt, so sind die Werte, welche

zwei verwandten Punkten entsprechen, auch verwandte Punktwerte; man hat demnach zu beweisen, dass das Verhältnis von irgend zwei Punktwerten der einen Reihe, gleich ist dem Verhältnisse der ihnen verwandten Punktwerte in der anderen Reihe, etwa:

$$\frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} : \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1} = \frac{A_2 B_2}{A_2 D_2} : \frac{C_2 B_2}{C_2 D_2},$$

oder:

$$\frac{C_1 B_1}{C_1 D_1} : \frac{E_1 B_1}{E_1 D_1} = \frac{C_2 B_2}{C_2 D_2} : \frac{E_2 B_2}{E_2 D_2},$$

u. s. w.

Um diese Gleichheiten zu beweisen, ziehe man durch die Punkte $A_1\, C_1\, E_1 \ldots$ Parallelen zu p_2, bis sie die Vergleichsstralen SB_1 und SD_1 treffen, so gelten, wie leicht einzusehen, folgende Proportionen:

$A_1 B_1 : C_1 B_1 = A_1 A' : C_1 C' \ldots . 1)$, weil $\triangle A_1 B_1 A' \sim \triangle C_1 B_1 C'$
$A_1 D_1 : C_1 D_1 = A_1 A'' : C_1 C'' \ldots 2)$, weil $\triangle A_1 D_1 A'' \sim \triangle C_1 D_1 C''$.

Durch Division der Proportion 1) durch die gleichvielten Glieder der Proportion 2) erhält man:

$$\frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} : \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1} = \frac{A_1 A'}{A_1 A''} : \frac{C_1 C'}{C_1 C''} \ldots . . 3)$$

Nun ist aber $\frac{A_1 A'}{A_1 A''} = \frac{A_2 B_2}{A_2 D_2}$, weil die Gerade $A_2 B_2 D_2$ zu $A_1 A' A''$ parallel ist, und ebenso ist $\frac{C_1 C'}{C_1 C''} = \frac{C_2 B_2}{C_2 D_2}$, mithin erhält man aus der Proportion 3) die folgende

$$\frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} : \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1} = \frac{A_2 B_2}{A_2 D_2} : \frac{C_2 B_2}{C_2 D_2},$$

welche zu beweisen war.

Die übrigen Proportionen können in derselben Weise bewiesen werden, mithin ist die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung dargethan.

266. Anstatt mehrere einzelne Verhältnisse von Punktwerten in Form von Projectionen aufzuschreiben, pflegt man die Verhältnisse in folgende Form zusammenzufassen:

$$\frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} : \frac{B_1 B_1}{B_1 D_1} : \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1} : \frac{D_1 B_1}{D_1 D_1} : \frac{E_1 B_1}{E_1 D_1} : \ldots =$$
$$\frac{A_2 B_2}{A_2 D_2} : \frac{B_2 B_2}{B_2 D_2} : \frac{C_2 B_2}{C_2 D_2} : \frac{D_2 B_2}{D_2 D_2} : \frac{E_2 B_2}{E_2 D_2} : \ldots = 4).$$

Nimmt man aus der ersten Seite irgend zwei Punktwerte in ein Verhältnis, so gehören die gleichvielten Glieder der zweiten Seite in die Proportion zu den zwei Punktwerten der ersten Seite.

267. Wenn man also eine beliebige Reihe von Punkten einer geraden Linie auf eine andere Gerade projiciert, welche Eigenschaft tritt da jederzeit auf?

Es sind die Verhältnisse der Punktwerte der gegebenen Reihe ganz gleich den Verhältnissen der Punktwerte in der Projection, d. i. in der $\barwedge$ verwandten geraden Punktreihe.

268. Welche Punkte muss man zu Vergleichspunkten wählen?

Zwei beliebige Punkte der einen Reihe, denn der Beweis des Gesetzes wurde ja für zwei beliebige Vergleichspunkte geführt.

269. Welches sind dann die Vergleichspunkte in der zweiten Reihe?

Die Projectionen der Vergleichspunkte der ersten Reihe.

Man kann daher für je zwei andere Vergleichspunkte eine Gleichung nach dem Gesetze der Gleichung 4) gebaut, aufschreiben.

Dass zwei gerade Punktreihen $\barwedge$ verwandt sind, pflegt man symbolisch also aufzuschreiben: $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \ldots . \barwedge A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 \ldots .$; dabei ist A_1 $\barwedge$ verwandt zu A_2, B_1 $\barwedge$ verwandt zu B_2, u. s. w.

270. Dieses für die Lehre der Projectionen so äusserst wichtige Gesetz 4), bezeichnet man als das projectivische Grundgesetz, welches in Worten kurz ausgedrückt auch lautet:

Die Verhältnisse der Punktwerte einer geraden Punktreihe gehen durch Projicieren auf eine Gerade ungeändert auf die Projection über.

271. Was geschieht wol, wenn in der einen geraden Punktreihe der zweite Vergleichspunkt in's Unendliche fällt?

Die gerade Punktreihe, welche den zweiten Vergleichspunkt im Unendlichen besitzt, gibt die Verhältnisse der Punktwerte der ersten Reihe in Strecken an.

Nehmen wir an, der Stral SD_1 sei in Fig. 22 zu p_2 parallel, so liegt D_2 in p_2 im Unendlichen. Es sei nun A_1 der erste, D_1 der zweite, mithin auch A_2 der erste und D_2 der zweite Vergleichspunkt, so ist nach dem projectivischen Grundgesetze:

$$\frac{B_1 A_1}{B_1 D_1} : \frac{C_1 A_1}{C_1 D_1} = \frac{B_2 A_2}{B_2 D_2} : \frac{C_2 A_2}{C_2 D_2} \ldots\ldots 5)$$

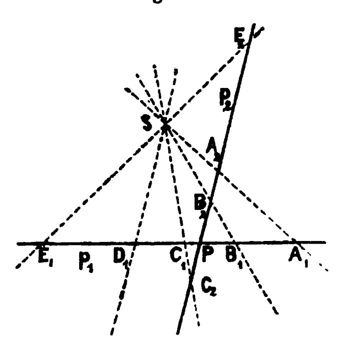


Fig. 22.

Die Längen $B_2 D_2$ und $C_2 D_2$ sind beide ohne Ende gross und nur die eine ist um die Länge $B_2 C_2$ grösser als die andere. Bei einer unendlichen Länge ist aber jede messbare Länge so klein, dass sie in Beziehung auf die ganze Länge verschwindet, demnach kann man $B_2 D_2$ und $C_2 D_2$ als gleich ansehen, und die beiden Nenner $B_2 D_2$, $C_2 D_2$ abkürzen, wodurch man erhält:

$$\frac{B_1 A_1}{B_1 D_1} : \frac{C_1 A_1}{C_1 D_1} = B_2 A_2 : C_2 A_2.$$

In gleicher Art ist:

$$\frac{B_1 A_1}{B_1 D_1} : \frac{E_1 A_1}{E_1 D_1} = B_2 A_2 : E_2 A_2$$

oder auch

$$\frac{B_1 A_1}{B_1 D_1} : \frac{C_1 A_1}{C_1 D_1} : \frac{E_1 A_1}{E_1 D_1} : \ldots\ldots = B_2 A_2 : C_2 A_2 : E_2 A_2 \ldots\ldots 6)$$

272. Durch diese Eigenschaften ist man in den Stand gesetzt, eine gerade Punktreihe zu erzeugen, bei welcher die Punktwerte in gegebenen Verhältnissen stehen. Sollten z. B. drei Punktwerte sich verhalten wie die Zahlen $2 : 6 : -7$, so würde man etwa wie in Fig. 22 $A_2 B_2 = 2$, $A_2 C_2 = 6$, $A_2 E_2 = 7$ beliebigen gleichen Teilen, aber $A_2 E_2$ entgegengesetzt von $A_2 C_2$ annehmen, und die Reihe $A_2 B_2 C_2 \infty E_2$ aus irgend einem Punkte S auf eine beliebige Gerade p_1 projicieren und die Projection A_1 von A_2 zum ersten, jene D_1 vom unendlich fernen Punkt, den man mit ∞ bezeichnet, zum zweiten Vergleichspunkt wählen; dann hat man die Aufgabe gelöst.

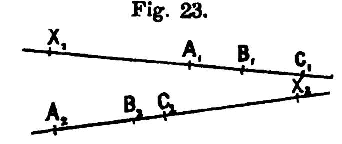


Fig. 23.

273. Wenn zwei $\overline{\wedge}$ verwandte gerade Punktreihen so liegen, dass wirklich die eine als Projection der andern erscheint, wie in Fig. 21 oder Fig. 22, so sagt man, die geraden Punktreihen liegen perspectivisch.

274. Was hat der Durchschnittspunkt P der die perspectivischen Punktreihen tragenden Geraden $p_1 p_2$ für eine Eigenschaft?

In ihm fallen zwei verwandte Punkte zusammen. Denn betrachtet man P als einen Punkt der Geraden p_1 und sucht zu P die Projection in der Geraden p_2, so muss die Projection mit P zusammenfallen.

275. Wie ist bei zwei projectivisch verwandten geraden Punktreihen das Verhältnis von je zwei verwandten Punktwerten beschaffen?

Es ist unveränderlich. Sind z. B. in Fig. 21 $B_1 D_1, B_2 D_2$ die Vergleichspunkte, so erhält man nach dem $\overline{\wedge}$ Grundgesetz:

$$\frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} : \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1} = \frac{A_2 B_2}{A_2 D_2} : \frac{C_2 B_2}{C_2 D_2};$$

vertauscht man die mittleren Glieder dieser Proportion, so erhält man:

$$\frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} : \frac{A_2 B_2}{A_2 D_2} = \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1} : \frac{C_2 B_2}{C_2 D_2} \quad \ldots\ldots 7)$$

d. h. der Wert des Punktes A_1 verhält sich zum Werte seines verwandten Punktes A_2, wie der Wert irgend eines Punktes C_1 der ersten Reihe zu dem Werte seines verwandten Punktes C_2 der anderen Reihe, w. z. b. w.

276. Wie viele Paare verwandter Punkte sind von zwei geraden Punktreihen nothwendig und hinreichend, um die $\overline{\wedge}$ Verwandtschaft zwischen ihnen herzustellen?

Drei Paare verwandter Punkte, weder weniger noch mehr. Denn sind drei Paare angegeben, so kann man zwei Paare zu Vergleichspunkten wählen, die Punktwerte des dritten Paares geben dann schon das Verhältnis an, in welchem je zwei verwandte Punktwerte zu einander stehen müssen.

In Fig. 23 sind auf zwei geraden Linien je drei Punkte angenommen und ihre verwandtschaftliche Beziehung durch die Bezeichnung ersichtlich gemacht worden. Wählt man $A_1 B_1, A_2 B_2$ zu Vergleichspunkten, so sind $\frac{C_1 A_1}{C_1 B_1}$, sowie $\frac{C_2 A_2}{C_2 B_2}$ Punktwerte und wird der erstere durch den letzteren dividiert irgend einen Quotienten q geben.

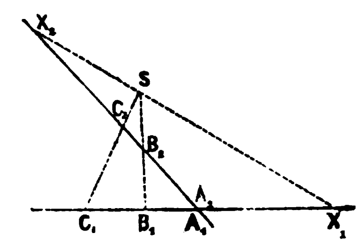
Ist dann X_1 ein beliebiger Punkt der ersten Geraden und wird der ihm verwandte Punkt in der zweiten Geraden mit X_2 bezeichnet, so muss $\frac{X_1 A_1}{X_1 B_1} : \frac{X_2 A_2}{X_2 B_2} = q$ sein, folglich wird $\frac{X_2 A_2}{X_2 B_2} = \frac{X_1 A_1}{X_1 B_1} : q$. Da nun $\frac{X_1 A_1}{X_1 B_1}$, sowie q bekannte Zahlen sind, so kann man den Wert $\frac{X_1 A_1}{X_1 B_1} : q$ berechnen, wodurch der Wert $\frac{X_2 A_2}{X_2 B_2}$ gefunden ist.

Kennt man aber den Wert eines Punktes, sowie die Vergleichspunkte, so kann man nach (248) den Punkt X_2 finden.

277. Wann liegen zwei projectivisch verwandte gerade Punktreihen perspectivisch?

Wenn in dem Schnittpunkt ihrer Träger zwei verwandte Punkte zusammenfallen. Denn sind irgend zwei gerade Punktreihen $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$ .... und $A_2\, B_2\, C_2\, D_2$ ... projectivisch verwandt (265), und legt man die eine Reihe geneigt zur anderen, jedoch so, dass ein Paar verwandte Punkte, z. B. $A_1\, A_2$ in einem Punkte zusammenfallen, so geben zwei Gerade $B_1\, B_2$, $C_1\, C_2$ einen Punkt S; projiciert man die Reihe, welcher D_1 angehört, aus S auf die Gerade, in welcher D_2 liegt, so gehen die Verhältnisse der Punktwerte der ersten Reihe auf die zweite Reihe über, und weil nach der Voraussetzung in der zweiten Reihe die Punktwerte dieselben Verhältnisse haben, wie in der ersten, so erkennt man mit Sicherheit, dass die Projection der Reihe $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$ ... aus S auf die andere Gerade mit $A_2\, B_2\, C_2\, D_2$ ... zusammenfällt, wenn schon vermöge der Annahme $A_2\, B_2\, C_2$ Projectionen von $A_1\, B_1\, C_1$ sind.

Fig. 24.



278. Constructiv verfährt man daher, um X_2 zu finden, wie Fig. 24 zeigt: Im Schnittpunkt zweier beliebigen Geraden lässt man ein Paar verwandter Punkte $A_1\, A_2$ zusammenfallen, die beiden anderen Paare $B_1\, B_2$ und $C_1\, C_2$ geben das Projectionscentrum S und hiedurch ergibt sich die Projection X_2 des Punktes X_1; überträgt man die Länge $B_2 X_2$ aus Fig. 24 nach $B_2 X_2$ in Fig. 23, so hat man zu X_1 den verwandten Punkt X_2 constructiv gefunden.

279. Wenn zwei projectivisch verwandte gerade Punktreihen nicht perspectivisch liegen, wie in Fig. 23, so sagt man sie liegen *schief*. Bei schief liegenden ⊼ verwandten geraden Punktreihen können im Schnittpunkt ihrer Träger keine verwandten Punkte zusammentreffen, weil dies eine Eigenschaft der perspectivischen Lage ist.

280. *Welcher Unterschied besteht zwischen zwei ⊼ verwandten geraden Punktreihen, wenn sie central, oder wenn sie durch parallele Stralen erzeugt werden?*

Wenn zwei verwandte gerade Punktreihen auf zwei nicht parallelen Geraden durch centrale Stralen erzeugt werden, so stehen die *Punktwerte* der einen Reihe in denselben Verhältnissen zu einander, wie die Punktwerte der zweiten Reihe; entstehen aber die Projectionen durch parallele Stralen, so findet zwar diese Eigenschaft auch statt, aber ausserdem sind, wie schon bekannt, die Verhältnisse der *Strecken* in der einen Reihe, gleich den Verhältnissen der verwandten Strecken in der anderen Reihe.

Diese letztere Eigenschaft findet auch statt, wenn man eine gerade Punktreihe central auf eine zu ihr parallele Gerade projiciert.

281. Wenn von zwei geraden Punktreihen die *Punktwerte* der einen Reihe in denselben Verhältnissen stehen, wie die verwandten Punktwerte der anderen Reihe, so sind die Reihen projectivisch verwandt und wir sagen auch, sie seien *projectivisch proportional*; sind aber auch noch die Verhältnisse der *Strecken* der einen Reihe gleich den Verhältnissen der verwandten Strecken in der anderen Reihe, so sagen wir, die geraden Punktreihen seien *geometrisch proportional*.

282. *Von welcher Beschaffenheit sind die verwandten geraden Punktreihen bei den verschiedenen Arten der ⊼ Verwandtschaften?*

Bei der perspectivischen Congruenz sind die verwandten geraden Punktreihen congruent, bei der perspectivischen Aehnlichkeit und Affinität sind sie geometrisch proportional und bei der perspectivischen Collineation projectivisch proportional.

Der Stralenbüschel.

§. 14.

283. **Was versteht man unter einem Vielstral oder Stralenbüschel?**

Eine beliebige Menge von Stralen, welche erstens sich in einem Punkte schneiden, den man den Scheitel des Vielstrales nennt, und bei dem zweitens alle Stralen in derselben Ebene liegen. In Fig. 21 oder 22 ist S der Scheitel eines Stralenbüschels.

284. Eine Gerade, welche alle Stralen eines Vielstrales schneidet, ohne durch dessen Scheitel zu gehen, bezeichnet man als eine Transversale.

285. Jeder Stralenbüschel erzeugt auf jeder Transversale eine gerade Punktreihe von so vielen Punkten, als er Stralen besitzt; jeder Stral wird zu dem Punkt der geraden Punktreihe verwandt oder auch homolog genannt, den er auf der Transversale als Durchschnittspunkt erzeugt.

286. Alle in demselben Stralenbüschel liegenden geraden Punktreihen sind untereinander projectivisch proportional, weil sie perspectivisch liegen. In Fig. 21 st $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1 \ldots \barwedge A_2\ B_2\ C_2\ D_2\ E_2 \ldots.$ (265).

287. Die Stralenbüschel beurteilt man nach den Verhältnissen der Punktwerte, welche sie auf Transversalen erzeugen.

Fig. 25.

Wenn ein Stralenbüschel gerade Punktreihen erzeugt (286), die den geraden Punktreihen eines zweiten Stralenbüschels projectivisch proportional sind, so sagt man die Stralenbüschel seien einander $\barwedge$ verwandt oder $\barwedge$ proportional, und je zwei verwandte Stralen werden auch homologe Stralen genannt.

288. Congruente Stralenbüschel müssen $\barwedge$ verwandt sein, weil man ja zu jeder geraden Punktreihe des einen Büschels eine congruente Reihe im anderen Büschel zeichnen kann.

289. **Wie kann man zu einem Stralenbüschel einen ihm projectivisch proportionalen Stralenbüschel construieren?**

Man ordnet drei Stralen des einen Büschels, drei Stralen des andern Büschels als ⩞ verwandt zu (276), und construiert zwei Transversalen $p_1 p_2$, auf welchen beide Stralenbüschel congruente Punktreihen erzeugen; dann kann man zu jedem Stral des einen Büschels den verwandten Stral im anderen Büschel durch die verwandten Punkte der congruenten Reihen angeben.

290. Construction der congruenten geraden Punktreihen in zwei ⩞ verwandten Stralenbüscheln.

In Fig. 25 sei S_1 $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ der eine Stralenbüschel, dem man einen anderen Stralenbüschel S_2 ⩞ derart zuordnen soll, auf dass a_2 ⩞ verwandt zu a_1, b_2 ⩞ verwandt zu b_1 und c_2 ⩞ verwandt zu c_1 werde; wohin kommt der mit d_1 ⩞ verwandte Stral d_2?

In jedem Vielstral ziehen wir eine Transversale parallel zu einem von zwei verwandten Stralen; also $p_1 \parallel a_1$ und $p' \parallel a_2$, so erzeugen die Stralen $a_1 b_1 c_1$ und $a_2 b_2 c_2$ die Punkte $\infty\ B_1\ C_1$, $\infty\ B' C'$. Macht man $B' C'' = B_1 C_1$, zieht $C'' C_2 \parallel b_2$ und durch C_2 eine Parallele p_2 zu a_2, so ist p_2 die Transversale, welche im Vielstrale S_2 eine gerade Punktreihe erzeugt, die jener congruent ist, welche der Stralenbüschel S_1 auf der Geraden p_1 hervorbringt.

Beweis. Nach der Voraussetzung, dass die Stralenbüschel $S_1 S_2$ ⩞ verwandt sein sollen, müssen die geraden Punktreihen des einen Büschels den geraden Punktreihen des andern Büschels projectivisch proportional sein. Wählt man in der Geraden p_1 den Punkt B_1 zum ersten und den unendlich fernen Punkt ∞ zum zweiten Vergleichspunkt, so muss man in p_2 die verwandten Punkte zu Vergleichungspunkten wählen, nämlich B_2 zum ersten und ∞ zum zweiten.

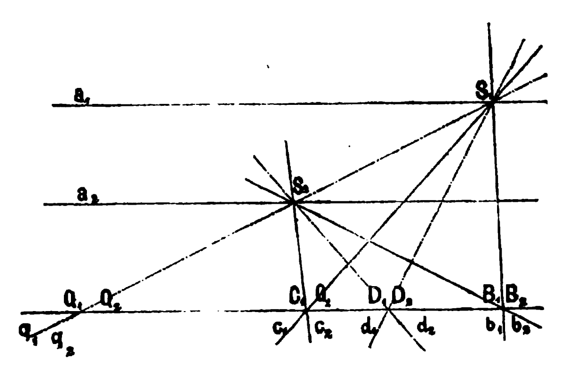
Die Punkte C_1 und D_1 erhalten die Punktwerte $\frac{C_1 B_1}{C_1 \infty}$, $\frac{D_1 B_1}{D_1 \infty}$, deren Verhältnis $= C_1 B_1 : D_1 B_1$ ist, weil die Nenner $C_1 \infty$, $D_1 \infty$ als einander gleich angenommen werden müssen.

Auf eine ganz gleiche Art schliesst man auch:

$$\frac{C_2 B_2}{C_2 \infty} : \frac{D_2 B_2}{D_2 \infty} = C_2 B_2 : D_2 B_2.$$

Nach der Voraussetzung ist aber das Verhältnis der Punktwerte der einen Reihe gleich jenem der anderen Reihe, mithin ist $C_1 B_1 : D_1 B_1 = C_2 B_2 : D_2 B_2$, und weil $C_2 B_2 = C_1 B_1$ angenommen wurde, so muss auch $D_1 B_1 = D_2 B_2$ sein. Was aber für das Punktepaar $D_1 D_2$ erwiesen wurde, lässt sich für jedes andere Paar verwandter Punkte erweisen, sonach sind beide Reihen in p_1 und p_2 congruent, w. z. b. w.

Fig. 26.



Trägt man die Länge $D_1 B_1$ entsprechend auf p_2 auf, so erhält man den Punkt D_2 und dadurch den mit d_1 verwandten Stral d_2.

291. In welche gegenseitige Lage können sich zwei $\overline{\wedge}$ verwandte Vielstralen immer bringen lassen?

In eine solche Lage, bei welcher sie eine gerade Punktreihe gemein haben.

Bei dieser Lage sagt man, die beiden Stralenbüschel projicieren eine und dieselbe gerade Punktreihe und liegen perspectivisch.

Legt man die Stralenbüschel der Fig. 25 so zusammen, dass B_1 mit B_2, C_1 mit C_2 zusammenfällt, so entsteht die Fig. 26, nämlich zwei Vielstralen in perspectivischer Lage.

Fig. 27.

D C B A
H G F E
L K T

292. Wenn zwei Vielstralen perspectivisch liegen, so liegen in der durch die Scheitelpunkte bestimmten Geraden $S_1 S_2$ zwei verwandte Stralen.

Denn projiciert man den Punkt Q_1 Fig. 26 aus S_1 und Q_2 aus S_2, so sind die Stralen $q_1 q_2$ $\overline{\wedge}$ verwandt und liegen in der Geraden $S_1 S_2$.

293. Haben zwei $\overline{\wedge}$ verwandte Stralenbüschel in einer Ebene eine solche Lage, dass in der Scheitellinie $S_1 S_2$ zwei verwandte Stralen liegen, so liegen die Stralenbüschel perspectivisch, d. h. die Schnittpunkte aller verwandten Stralen liegen in einer geraden Linie. Hätten die beiden Stralenbüschel in dieser Lage keine gerade Punktreihe gemein, so könnten sie nicht projectivisch proportional sein.

294. Wie kann man also zwei $\overline{\wedge}$ verwandte Stralenbüschel auf die einfachste Art in eine perspectivische Lage bringen?

Man legt in einer Ebene den einen Stralenbüschel so gegen den andern, dass in der Scheitellinie irgend ein Paar verwandter Stralen liegen.

Die harmonische gerade Punktreihe und der harmonische Vielstral. Die harmonischen Eigenschaften eines vollständigen Viereckes. Projectivische Vertauschung der vier Punkte einer geraden vierpunktigen Reihe. Involutorische Punktreihe und Stralenbüschel.

§. 15.

295. Wenn eine Strecke innerhalb und ausserhalb nach demselben Verhältnisse geteilt wird, so ist das Verhältnis der Werte von den teilenden Punkten $= -1$ und man sagt, die Punkte teilen die Strecke harmonisch oder die vier Punkte liegen harmonisch.

In Fig. 27 ist beispielsweise die Strecke AC innerhalb nach dem Verhältnisse von $1:2$ geteilt, weil BC in AB zweimal enthalten ist. Und weil DC in DA ebenfalls zweimal enthalten, so ist auch die äussere Teilung der Strecke AC in demselben Verhältnisse vollführt, wie die innere, mithin besteht:

$$1)\ \begin{cases} \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = -1 \text{ oder } \frac{DA}{DC} : \frac{BA}{BC} = -1, \text{ oder} \\ \frac{BC}{BA} : \frac{DC}{DA} = -1 \text{ oder } \frac{DC}{DA} : \frac{BC}{BA} = -1, \end{cases}$$

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man für die Strecken

die Verhältnisse ihrer Längen berücksichtigt; so ist z. B. $\frac{BC}{BA} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{DC}{DA} = +\frac{1}{2}$, also $\frac{BC}{BA} : \frac{DC}{DA} = -\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = -1$.

296. **Was sagen denn die unter 1) aufgeschriebenen vier Quotienten aus?**

Sie sagen, es ist einerlei, ob man von der geteilten Strecke AC den einen oder den andern Endpunkt zum ersten Vergleichspunkt macht und dass es einerlei ist, ob man den Wert des inneren teilenden Punktes B durch den Wert des äusseren Teilungspunktes D, oder umgekehrt, dividiert; man erhält immer als Quotient die Zahl -1.

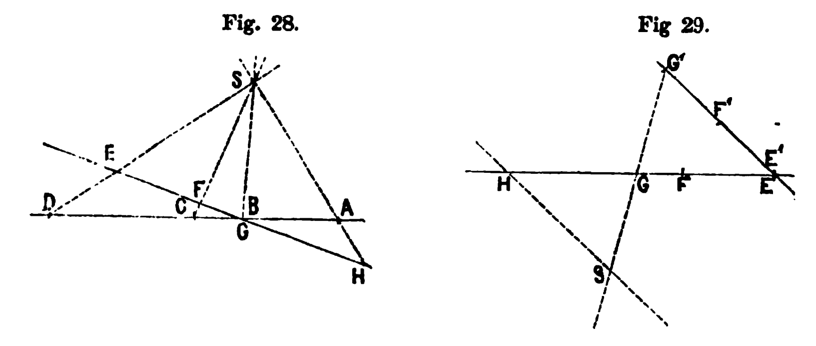
297. Wird eine Strecke AC durch zwei Punkte B und D harmonisch geteilt, so teilen auch die Punkte A und C die Strecke BD harmonisch. Denn aus $\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = -1$ folgt auch $\frac{BA}{DA} : \frac{BC}{DC} = -1$ oder $\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = -1$ w. z. b. w.

298. Man kann daher bei vier harmonisch liegenden Punkten je zwei **getrennte** Punkte zu Vergleichspunkten wählen, es ist dann immer das Verhältnis der Punktwerte der beiden anderen Punkte $= -1$.

299. **Was ist die Folge dieser Eigenschaft?**

Die Folge ist die, dass je zwei harmonische gerade Punktreihen perspectivisch liegen müssen, sobald sie einen Punkt gemein haben (277).

Fig. 28. Fig 29.



Ist in Fig. 27 $EFGH$ eine harmonische Punktreihe, so wird die Strecke EG durch F und H oder FH durch E und G harmonisch geteilt. Legt man in Fig. 28 die Gerade EH so gegen die Gerade AD, dass etwa G mit B zusammenfällt, und zieht man die Geraden AH und ED, welche sich in

S schneiden, so muss der Punkt S mit F und C auch in einer geraden Linie liegen, weil vermöge des projectivischen Grundgesetzes der Wert $\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = -1$ auf die Projection $\frac{BH}{BF} : \frac{EH}{EF}$ übergeht, und nach der Voraussetzung $\frac{GH}{GF} : \frac{EH}{EF}$ wirklich $= -1$ ist.

300. Ein Stralenbüschel, welcher eine harmonische gerade Punktreihe projiciert, ist ein harmonischer Stralenbüschel; jede in ihm liegende gerade Punktreihe ist wieder harmonisch vermöge des Gesetzes (286).

301. Die einfachste harmonische gerade Punktreihe ist die halbierte harmonische Punktreihe, d. i. jene, bei welcher ein Punkt im Unendlichen liegt; der innere Teilungspunkt halbiert die geteilte Strecke. In Fig. 27 ist $LK = KT$, folglich ist $LKT\infty$ eine halbierte harmonische Punktreihe. Sind L und T Vergleichspunkte, so ist $\frac{KL}{KT} = -1$ und $\frac{\infty L}{\infty T} = +1$, daher $\frac{KL}{KT} : \frac{\infty L}{\infty T} = -1$, wie es sein soll.

302. Wozu kann man die halbierte harmonische gerade Punktreihe benützen?

Um eine Strecke harmonisch zu teilen, wenn ein Teilpunkt gegeben ist.

Nehmen wir in Fig. 29 an, EG soll innerhalb durch einen Punkt F so geteilt werden, wie H die Strecke EG äusserlich teilt, so wird man nur durch E eine beliebige Gerade ziehen, $E'F' = F'G'$ von beliebiger Länge machen, so ist $E'F'G'\infty$ eine harmonische Reihe; G' mit G und H mit ∞ verbunden geben S und SF' gibt F.

303. Welches ist der einfachste harmonische Vielstral?

Der halbierte harmonische Vielstral, welcher entsteht, wenn man die beiden Winkel von zwei sich schneidenden Geraden halbiert.

Bekanntlich stehen die Geraden, welche Nebenwinkel halbieren, aufeinander senkrecht; schneidet man den in Rede stehenden Vielstral mit einer Transversale parallel zu einer der winkelhalbierenden Geraden, so entsteht auf ihr eine halbierte harmonische Punktreihe, und desshalb ist der Stralenbüschel selbst ein harmonischer (300).

304. Sind in einem harmonischen Stralenbüschel zwei getrennte Stralen aufeinander senkrecht, so halbieren sie die Winkel der beiden anderen Stralen (303).

Der Beweis ist ohne Mühe durchführbar.

305. Was wird geschehen, wenn man bei zwei perspectivisch collinearen Systemen den Modulus $m_1 = -1$, also auch $m_2 = -1$ annimmt?

Je zwei verwandte Punkte müssen mit dem Projectionscentrum und dem in dem projicierenden Strale liegenden Begegnungspunkte eine harmonische gerade Punktreihe bilden. Wenn z. B. in Fig. 19 $k_1 S = S k_2$ gemacht worden wäre, dann müssten $S a_2 A a_1$ und $S b_1 B b_2$ harmonische Reihen sein.

306. In einem involutorischen Systeme (260) wird demnach jedes Paar verwandter Punkte durch das Projectionscentrum und die Begegnungsgerade harmonisch geteilt.

Die harmonischen Eigenschaften eines vollständigen Viereckes.

Fig. 30.

307. Vier in einer Ebene liegende Punkte, von welchen keine drei in derselben Geraden liegen, bestimmen ein ebenes Viereck, oder schlechtweg Viereck genannt, von dem die gegebenen Punkte die vier Ecken bilden.

Ein jedes Viereck bestimmt sechs gerade Linien, Seiten des Viereckes; je zwei Seiten, welche keinen Eckpunkt gemein haben, heissen Gegenseiten, der Schnittpunkt zweier Gegenseiten ist ein Diagonalpunkt und eine durch zwei Diagonalpunkte gehende Gerade eine Diagonale.

Ein vollständiges Viereck besitzt sonach: 4 Eckpunkte, 6 Seiten (davon drei Paare Gegenseiten), 3 Diagonalpunkte und 3 Diagonalen. In Fig. 30 sind *A*, *B*, *C*, *D*, — *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, *AC*, *BD* — (*AB*, *CD*, — *AD*, *BC*, — *AC*, *BD*), — *G*, *F*, *E*, — *EF*, *FG*, *GE* die genannten Stücke.

Ein vollständiges Viereck besitzt also 7 benannte Punkte (4 Ecken, 3 Diagonalpunkte) und 9 benannte Gerade (6 Seiten, 3 Diagonalen).

308. Jede der 9 Geraden eines vollständigen Viereckes ist der Träger einer 4punktigen Reihe, und jede der 7 Ecken der

Scheitel eines 4straligen Büschels; sowol diese geraden 4punktigen Reihen, als die 4straligen Büschel sind harmonisch.

Beweis. $GCJD$ ist eine 4punktige Reihe auf der Seite CD. Projiciert man diese Reihe aus den nicht in dieser Seite CD liegenden Diagonalpunkten E und F auf die Gegenseite zu CD, d. i. auf AB, so erhält man von $GCJD$ zwei Projectionen und zwar ist $GCJD \barwedge GAHB$, wenn man aus E projiciert; und $GCJD \barwedge GBHA$, wenn man aus F projiciert; mithin sind sowol in $GAHB$ als auch in $GBHA$ die Punktwerte in gleichen Verhältnissen, d. h. es ist $\underbrace{GAHB}_{R_1} \barwedge \underbrace{GBHA}_{R_2}$ (269). Wählt man in R_1 den ersten und dritten Punkt zu Vergleichungspunkten, so muss man dasselbe auch in R_2 thun, folglich erhält man:

$$\underbrace{\frac{AG}{AH} : \frac{BG}{BH}}_{R_1} = \underbrace{\frac{BG}{BH} : \frac{AG}{AH}}_{R_2}.$$

Diese Gleichheit — bei welcher die Verhältnisse der Punktwerte, wie man aus der Figur sieht, negativ sind — kann nur bestehen, wenn $\frac{AG}{AH} : \frac{BG}{BH} = -1$ ist, denn dann ist auch $\frac{BG}{BH} : \frac{AG}{AH} = -1$. Ist aber dies Verhältnis der Punktwerte $= -1$, so ist die Punktreihe $GBHA$ eine harmonische.

Nun kann man aber die übrigen 8 vierpunktigen Reihen aus $GBHA$ durch Projection ableiten, und jeder der 7 vierstraligen Büschel projiciert einige dieser Reihen, mithin sind alle diese vierpunktigen Reihen und vierstraligen Büschel harmonisch, w. z. b. w.

309. Wenn man anschreibt $GAHB \barwedge GBHA$, wobei vor und hinter dem Projectivzeichen $\barwedge$ dieselben 4 Buchstaben stehen, so deutet man dadurch an, dass die eine Reihenfolge aus der andern durch Projicieren abgeleitet gedacht werden kann. Wenn man $GAHB$ aufschreibt, so muss man von G nach A in der Richtung gehen, dass man dabei H und B nicht überschreitet, also von G durch den unendlich fernen Punkt; überhaupt muss man sich es angewöhnen, bei geraden Punktreihen den Sinn der Richtung beizubehalten, und nicht von Punkt zu Punkt planlos herumzuspringen.

Berücksichtigt man den Richtungssinn von $GAHB$ und $GBHA$, so sieht man, dass der eine dem andern entgegengesetzt ist. Würde man in der einen Reihe von G über A nach H gehen,

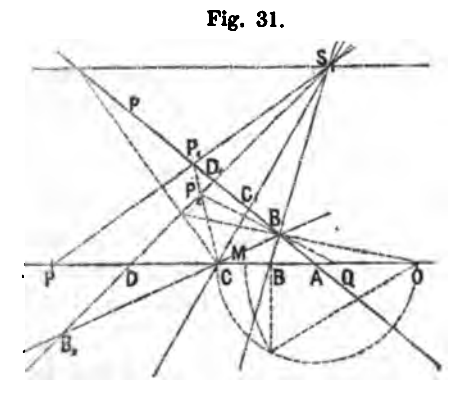
so muss der projectivisch verwandte Punkt der anderen Reihe von G über B nach H gehen.

Dass wirklich aus $GAHB$ durch Projicieren die Reihe $GBHA$ aufgefunden werden kann, sieht man aus Fig. 30. Projiciert man aus E auf die Seite CD, so ändert sich G nicht, weil G beiden Geraden gemein ist, von B kommt die Projection nach D, von H nach J und von A nach C, also ist $GDJC$ die wirkliche und directe Projection von $GBHA$. Projiciert man $GDJC$ aus F zurück auf die Seite AB, so wird von G die Projection in G bleiben; von D kommt sie nach A, und weil D die directe Projection von B war, so ist jetzt A die indirecte Projection von B. Von J kommt die Projection nach H, und weil J die directe Projection von H war, so fällt die indirecte Projection von H wieder mit H zusammen. Die directe Projection von B war D und die Projection von D ist A, mithin ist A die indirecte Projection von B; also ist wirklich die Reihenfolge $GBHA$ aus der Reihenfolge $GAHB$ durch Projection ableitbar.

310. Wenn man daher in einer Aufeinanderfolge von 4 Punkten $GAHB$ ein getrenntes Punktepaar, z. B. A und B vertauschen kann, wodurch man $GBHA$ erhält, und es ist die neue Reihenfolge mit der ersteren projectivisch proportional, so folgt mit Sicherheit daraus, dass die 4 Punkte harmonisch liegen.

Von diesem wichtigen Kennzeichen der harmonischen Punktlage wird oft Gebrauch gemacht.

Fig. 31.



311. Nicht nur 4 harmonisch liegende Punkte können indirect in einer anderen Reihenfolge auf sich zurückprojiciert werden, sondern je 4 beliebige in einer Geraden liegende Punkte.

Nehmen wir an, in Fig. 31 soll die Reihe $ABCD$ auf sich so zurückprojiciert werden, dass von B die Projection nach C, von C nach B und von A nach D kommt. Führt man die Projection aus, so findet man immer, dass auch

die Projection von D nach A kommen muss, dass also $ABCD \barwedge DCBA$ ist.

Beweis. Wir legen durch einen der 4 Punkte, etwa durch A, eine Gerade p und projicieren aus einem beliebigen Punkt S_1 diese 4 Punkte auf p, so wird $ABCD \barwedge AB_1 C_1 D_1$. Weil nach unserem Verlangen B indirect nach C projiciert werden soll, so wähle man jetzt C als zweites und sodann B_1 als drittes Projectionscentrum wie folgt: Die Reihe $AB_1 C_1 D_1$ projiciert man aus C auf den Stral $S_1 D$, wodurch man findet $AB_1 C_1 D_1 \barwedge DB_2 S_1 D_1$, folglich ist auch $ABCD \barwedge DB_2 S_1 D_1$. Projiciert man $DB_2 S_1 D_1$ aus B_1 zurück auf die gegebene Gerade AD, so erhält man $DB_2 S_1 D_1 \barwedge DCBA$, folglich ist auch $ABCD \barwedge DCBA$ w. z. b. w.

312. Wenn man also in einer beliebigen geraden vierpunktigen Reihe $ABCD$ ein **beliebiges** Paar Punkte mit einander vertauscht, und dasselbe auch mit dem übrig gebliebenen Paare vornimmt, so ist die neue Reihenfolge der 4 Punkte projectivisch mit der gegebenen Reihenfolge.

313. **Wodurch unterscheidet sich die projectivische Vertauschung (312) bei 4 beliebigen Punkten einer Geraden gegen jene bei 4 harmonisch liegenden Punkten (310)?**

Bei 4 harmonisch liegenden Punkten kann man ein Paar getrennt liegende Punkte vertauschen und das andere Paar ungeändert lassen, so ist die neue Reihenfolge noch immer der gegebenen projectivisch; bei 4 beliebigen Punkten bedingt aber jede Vertauschung eines Paares auch die des anderen Paares, wenn die neue Reihenfolge der gegebenen projectivisch sein soll.

314. **Wenn man bei dem Projectionsverfahren der Fig. 31 einen beliebigen Punkt P mitprojiciert, wodurch der Reihe nach die Projectionen P_1 durch den Stral $S_1 P$, P_2 durch den Stral CP_1 und Q durch den Stral $B_1 P_2$ entstehen; wohin wird die Projection von Q kommen, wenn man Q ebenfalls zuerst aus S_1 auf p, von dort aus C auf $S_1 D_1$ und von hier endlich aus B_1 nach der Geraden AB projiciert?**

Die Projection von Q kommt auf jenen Punkt P zurück, aus welchem Q durch Projection abgeleitet wurde.

Um dies zu beweisen, nehme man an, die Projection von Q komme auf einen unbekannten Punkt X, so entsteht aus der

Reihe $ABCDPQ$ die Projection $DCBAQX$. Nun wähle man zwei Punkte, deren Projectionen in umgekehrter Ordnung aufeinander liegen, z. B. B und C für die Reihe $ABCDPQ$, folglich ihre Projectionen C und B für die zweite Reihe zu Vergleichspunkten (269), und vergleiche die Punktwerte von P und Q mit jenen von Q und X (270), so erhält man:

$$\frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC} = \frac{QC}{QB} : \frac{XC}{XB}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{XC}{XB} = 1, \text{ oder } \frac{PB}{PC} = \frac{XB}{XC}.$$

Wenn nun die Punktwerte von P und X, welche sich auf dieselben Vergleichspunkte B und C beziehen, einander gleich sind, so muss X mit P zusammenfallen; also liegt wirklich die Projection von Q in P, wie es behauptet wurde.

315. Ein Punktepaar wie B und C, oder A und D, welches seine eigene Projection in umgekehrter Reihenfolge aufnimmt, wird ein involutorisches oder auch ein conjugiertes Punktepaar genannt; und eine gerade Punktreihe, welche aus involutorischen Punktepaaren zusammengesetzt ist, bezeichnet man als eine involutorische Punktreihe; ebenso wird ein Vielstral oder Stralenbüschel als involutorisch bezeichnet, wenn die von ihm erzeugten geraden Punktreihen als involutorisch sich erweisen; und liegt eine gerade Punkreihe p so zwischen den Stralen eines Büschels, dass sie mit der geraden Punktreihe, welche der Büschel auf der Geraden p erzeugt, eine involutorische Reihe bildet, dann sagt man auch, die gerade Punktreihe und der Stralenbüschel liegen involutorisch.

316. Gewöhnlich pflegt man die zusammengehörigen oder conjugierten Punkte einer ⩫ Reihe (lese : involutorischen Reihe) durch einerlei Buchstaben mit verschiedenen Zeigern zu bezeichnen. Man schreibt z. B. $A_1 A_2 \,.\, B_1 B_2 \,.\, C_1 C_2 \,\ldots\ldots$ ⩫ $A_2 A_1 \,.\, B_2 B_1 \,.\, C_2 C_1 \,\ldots$, aus welcher Aufschreibung man sieht, dass die Projection von A_1 auf A_2, von A_2 auf A_1 u. s. w. fällt.

317. Eine involutorische Punktereihe ist somit ein Inbegriff von zwei projectivisch proportionalen geraden Punktereihen, welche eine solche Lage in einer Geraden haben, dass je zwei verwandte Punkte ein ⩫ Punktepaar bilden.

318. **Wenn in einer Geraden zwei projectivisch proportionale gerade Punktreihen liegen, wie viele involutorische Punktepaare müssen vorhanden sein, damit man schliessen kann, es liegen auch alle anderen Paare, d. h. die Reihen selbst involutorisch?**

Ist ein Paar involutorischer Punkte vorhanden, so sind auch alle übrigen Paare verwandter Punkte involutorisch. Der Beweis wird wie bei (314) geführt. Ist nämlich $A_1 A_2 BC \ldots \overline{\wedge}\, A_2 A_1 CX \ldots$ so wählt man links $A_1 A_2$, rechts $A_2 A_1$ zu Vergleichspunkten und findet:

$$\frac{BA_1}{BA_2} : \frac{CA_1}{CA_2} = \frac{CA_2}{CA_1} : \frac{XA_2}{XA_1} \text{ und hieraus folgt } \frac{BA_1}{BA_2} = \frac{XA_1}{XA_2},$$

d. h. X fällt mit B zusammen, weil X und B einerlei Punktwert haben; also ist BC ein involutorisches Punktepaar, w. z. b. w.

319. **Durch wieviele Punktepaare ist eine involutorische Reihe bestimmt?**

Durch zwei Punktepaare. Nimmt man dann in der Geraden einen fünften Punkt an, so kann man seinen conjugierten Punkt construieren. In Fig. 31 wurde angenommen, AD sei ein und BC ein zweites Paar conjugierter Punkte; zu P wurde Q auf die in (311) angegebene Art construiert.

320. **Welchen Punkt nennt man den Mittelpunkt einer involutorischen Reihe?**

Jenen Punkt, dessen conjugierter Punkt (315) im Unendlichen liegt. In Fig. 31 wurde der in AB liegende unendlich ferne Punkt aus S_1 zuerst auf p, von dort aus C auf $S_1 D$ und von hier aus B_1 nach O projiciert, mithin ist O der **Mittelpunkt der Involution.**

321. **Welche Eigenschaft besitzt der Mittelpunkt einer involutorischen Reihe?**

Das Product der Abstände zweier conjugierter Punkte vom Mittelpunkt ist für jede involutorische Reihe eine constante Grösse.

Beweis. Ist $AD.BC.O\infty \ldots$ eine involutorische Reihe mit den $\overline{\wedge}$ Punktepaaren $AD, BC, O\infty$ u. s. w. (Fig. 31), so ist $AD.BC.O\infty \ldots \overline{\wedge}\, DA.CB.\infty O \ldots$ Wählt man links von $\overline{\wedge}$ O und ∞, rechts also ∞O zu Vergleichspunkten, so ist $\frac{AO}{A\infty} : \frac{BO}{B\infty} = \frac{D\infty}{DO} : \frac{C\infty}{CO}$ oder $AO : BO = \frac{1}{DO} : \frac{1}{CO}$ und hieraus folgt $AO.DO = BO.CO$. Bezeichnet man $AO \, . \, DO$ mit k, und ist P und Q

ein anderes $\overline{\wedge}$ Punktepaar, so zeigt man auf dieselbe Art $AO.DO = PO.QO = k$ w. z. b. w.

Wenn also bei einer $\overline{\wedge}$ Reihe ein Punkt P sich vom Mittelpunkt O entfernt, so muss wegen des constanten Wertes k des Productes $PO.QO$, der Punkt Q sich O nähern.

322. Wie viele Arten involutorischer Reihen unterscheidet man?

Zwei Arten. Bei der einen Art liegen je zwei conjugierte Punkte immer gleichzeitig auf einerlei Seite von O (siehe Fig. 31), während bei der zweiten Art zwei conjugierte Punkte immer auf verschiedenen Seiten von O liegen. Im ersten Fall ist $PO.QO$ positiv, im zweiten Falle negativ. Im ersten Falle ist die Bewegung zweier conjugierter Punkte gegenläufig, im zweiten Falle gleichläufig.

323. Welche Punkte einer involutorischen Reihe nennt man Ordnungspunkte?

Jene Punkte, welche mit ihren conjugierten Punkten zusammenfallen. Nur die gegenläufigen involutorischen Reihen besitzen zwei Ordnungspunkte; von den gleichläufigen $\overline{\wedge}$ Reihen sagt man, ihre zwei Ordnungspunkte seien imaginär.

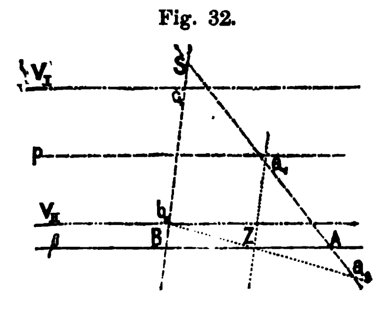
324. Wie construiert man die Ordnungspunkte?

Ist M ein Ordnungspunkt, so muss $OM.OM = OA.OD = OB.OC$ Fig. 31 sein, mithin ist OM die mittlere geometrische Proportionale zwischen OA und OD, oder OB und OC (355).

Der zweite Ordnungspunkt N liegt links von O, so dass $NO = OM$ ist.

325. Wenn man zwei $\overline{\wedge}$ Paare $AD.BC$ einer involutorischen Reihe angibt, wie kann man erkennen, ob sie Ordnungspunkte besitzt?

Fig. 32.



Wenn die Punkte eines conjugierten Paares durch die Punkte des anderen Paares nicht getrennt sind, so besitzt die Reihe Ordnungspunkte; sind sie aber durch einander getrennt, so besitzt die Reihe keine Ordnungspunkte. Der Beweis ist leicht zu führen, wenn man $OP.OQ$ einmal positiv und einmal negativ annimmt, jedesmal zwei Punktepaare bestimmt und sie gegen einander vergleicht. In Fig. 31 ist das Punktepaar AD durch das

Punktepaar BC nicht getrennt; denn wenn man von A über O durch das Unendliche geht, so kommt man von der anderen Seite zu D hin, ohne dass man B oder C passieren musste.

326. Welche Lage haben je zwei conjugierte Punkte einer involutorischen Reihe gegen die Ordnungspunkte?

Sie teilen die von den Ordnungspunkten gebildete Strecke harmonisch (295). Denn sind M und N zwei Ordnungspunkte und A und D zwei conjugierte Punkte, so ist $MAND \barwedge MDNA$ (323), folglich:

$$\frac{AM}{AN} : \frac{DM}{DN} = \frac{DM}{DN} : \frac{AM}{AN}$$

oder:

$$\left(\frac{AM}{AN}\right)^2 = \left(\frac{DM}{DN}\right)^2,$$

$$\text{d. i. } \frac{AM}{AN} = \pm \frac{DM}{DN} \text{ oder } \frac{AM}{AN} : \frac{DM}{DN} = \pm 1.$$

Weil aber A zwischen M und N, D aber ausserhalb liegt, so wird $\frac{AM}{AN} : \frac{DM}{DN} = -1$, d. h. $NAMD$ ist eine harmonische Reihe.

Die Verschwindungslinien collinearer Systeme.

§. 16.

327. Welche Punkte in zwei perspectivisch collinearen Systemen nennt man Verschwindungspunkte?

Jene Punkte des ersten Systems, deren verwandte Punkte des zweiten Systemes im Unendlichen liegen, bezeichnet man als Verschwindungspunkte des ersten Systemes, und jene Punkte des zweiten Systemes, deren verwandte Punkte des ersten Systemes im Unendlichen liegen, sind Verschwindungspunkte des zweiten Systemes.

328. Unter der Verschwindungslinie des einen Systemes bei zwei perspectivischen Systemen einer Ebene verstehen wir jene Linie, deren Collinear-Projection oder projectivisch verwandte Linie des anderen Systems im Unendlichen liegt.

Nehmen wir an, es seien in Fig. 32 zwei perspectivisch collineare Systeme durch S, β, $a_1 a_2$ gegeben, und b_1 sei ein unendlich ferner Punkt des ersten Systems, welcher zugleich in dem beliebig gezogenen Strale SB liegt, so ist $a_1 b_1$ eine Gerade des ersten Systemes, die durch a_1 geht und mit SB parallel läuft; die $a_1 b_1$ erzeugt einen Begegnungspunkt Z, folglich muss $a_2 Z$

die zu $a_1\,b_1$ verwandte Gerade sein, daher muss der Schnittpunkt von $a_2 Z$ mit dem Strale SB den mit b_1 verwandten Punkt b_2 geben, d. h. b_2 muss ein Verschwindungspunkt des zweiten Systemes sein (327), weil b_1 im Unendlichen liegt.

Zieht man durch b_2 eine Parallele V_{II} zu β, so muss die ihr verwandte Gerade des ersten Systemes im Unendlichen liegen, also ist V_{II} die Verschwindungsgerade des zweiten Systemes.

329. Welche Lage besitzt der Verschwindungspunkt b_2 zwischen S und B?

Die gerade Punktreihe $Sa_1\,Aa_2$ wird aus Z auf SB nach $S\infty Bb_2$ projiciert, wodurch $Sa_1 Aa_2 \,\overline{\wedge}\, S\infty Bb_2$ wird. Wählen wir S und B, also auch S und A zu Vergleichspunkten, so wird sich der Wert des Punktes b_2 zum Werte des Punktes ∞ verhalten, wie der Wert des Punktes a_2 zum Werte von a_1; nämlich:

$$\frac{b_2 S}{b_2 B} : \frac{\infty S}{\infty B} = \frac{a_2 S}{a_2 A} : \frac{a_1 S}{a_1 A}.$$

Nun stellt jeder dieser Quotienten den Modulus m_2 vor (257), also ist: $\frac{b_2 S}{b_2 B} : \frac{\infty S}{\infty B} = m_2$, und weil der Wert eines unendlich fernen Punktes $= 1$ ist, so folgt $\frac{b_2 S}{b_2 B} : 1 = m_2$ oder

$$\frac{b_2 S}{b_2 B} = m_2.$$

330. Was sagt dieser Ausdruck aus?

Jede Strecke vom Projectionscentrum bis zur Begegnungsgeraden wird durch die Verschwindungslinie nach dem Modulus jenes Systemes geteilt, dem die Verschwindungsgerade angehört. Also muss auch die Verschwindungsgerade V_I des ersten Systemes diese Strecke nach dem Modulus des ersten Systemes teilen, d. h. es ist:

$$\frac{c_1 S}{c_1 B} = m_1.$$

Nun ist das Product $m_1\,.\,m_2$, jederzeit $= 1$, (257), also erhalten wir:

$$\frac{b_2 S}{b_2 B} \cdot \frac{c_1 S}{c_1 B} = 1,$$

oder:

$$\frac{b_2 S}{b_2 B} = \frac{c_1 B}{c_1 S}$$

oder, wie leicht einzusehen:

$$\frac{b_2 B + BS}{b_2 B} = \frac{c_1 S + SB}{c_1 S}$$

und hieraus folgt nach einer einfachen Reduction:

$$b_2 B = S c_1$$

d. h. die eine Verschwindungslinie ist von β ebensoweit entfernt, wie die andere von S.

331. Zieht man in der Mitte von S bis β zu β eine Parallele p, d. i. eine Mittellinie, so kann man sagen: Die beiden Verschwindungslinien liegen symmetrisch zur Mittellinie.

332. Müssen die Verschwindungslinien immer zwischen S und β liegen?

Nein; sie liegen nur dann zwischen S und β, wenn der Modulus negativ ist; denn $\frac{c_1 S}{c_1 B} = m_1$ ist negativ.

333. Wozu können die Verschwindungslinien nützlich sein?

Sie dienen zur Erkenntnis, ob bei der Construction collinearer Gebilde unendlich ferne Punkte in den Gebilden vorkommen. Würde z. B. ein dem ersten Systeme angehöriges Polygon die Verschwindungslinie des ersten Systemes in 2 Punkten schneiden, so wüsste man im Vorhinein, dass die Collinear-Projection dieses Polygones zwei unendlich ferne Punkte besitzen muss.

334. Wenn ein Stralenbüschel des ersten Systemes seinen Scheitel in der Verschwindungslinie V_I des ersten Systemes besitzt, was wird die Collinear-Projection des Stralenbüschels?

Sie wird ein Parallelstralenbüschel, weil der Scheitel im Unendlichen liegt. Ist der Scheitel des ersten Büschels mit M_1 bezeichnet worden, so sind die Stralen des zweiten Büschels mit SM_1 parallel, denn M_2 liegt in SM_1 im Unendlichen.

In gleicher Weise entspricht jedem Stralenbüschel des zweiten Systemes, wenn der Scheitel in V_{II} liegt, ein Parallelstralenbüschel im ersten Systeme.

335. Welche Lagen müssen die Verschwindungslinien erhalten, wenn der Modulus des ersten, folglich auch des zweiten Systemes $= -1$ ist?

In diesem Falle liegen beide Verschwindungslinien in einer Geraden, nämlich in der Mittellinie p von S und β, denn $\frac{c_1 S}{c_1 B} = -1$ und $\frac{b_2 S}{b_2 B} = -1$ sagen dann aus, dass $c_1 S = B c_1$ und $b_2 S = B b_2$ werden muss.

Ein involutorisches System (219) vereinigt sonach beide Verschwindungslinien in einer Geraden, in der Mittellinie zwischen der Centrale und der Begegnungsgeraden.

Nach diesen hauptsächlichsten Untersuchungen über projectivische Verwandtschaften und projectivische Eigenschaften gerader Punktreihen und Stralenbüschel betrachte man den Kreis in seinen für die Construction besonders wichtigen Eigenschaften, sowie die dem Kreise projectivisch verwandten Gebilde, nämlich seine Collinear-Projectionen.

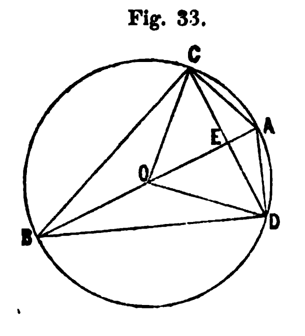
Der Kreis.

§. 17.

336. Jeder Kreis ist der Ort aller Punkte einer Ebene, welche von einem gegebenen Punkte derselben gleiche Abstände haben.

Jeder Kreis ist eine geschlossene Linie; es gibt also in der Kreisebene Punkte innerhalb, ausserhalb und Punkte auf dem Kreise, d. i. auf seinem Umfange, seiner Periferie.

Fig. 33.



Jede Strecke, welche zwei Punkte einer Curve verbindet, heisst eine Sehne.

337. Wenn ein Punkt die Eigenschaft besitzt, alle durch ihn gehenden Sehnen derselben Curve zu halbieren, dann nennt man ihn den Mittelpunkt der Curve.

Der Punkt in der Ebene eines Kreises, von dem alle Periferiepunkte gleiche Abstände haben, halbiert alle durch ihn gehenden Kreissehnen, also ist er der Mittelpunkt des Kreises. In Fig. 33 ist O der Mittelpunkt.

Jede Gerade von irgend einem Periferiepunkt des Kreises zum Mittelpunkt desselben ist ein Radius des Kreises.

338. Kreise von gleichen Radien sind congruent, weil sie sich deckend übereinander gelegt werden können.

339. Wenn eine gerade Linie eine Reihe paralleler Sehnen einer Curve halbiert, so wird sie ein Durchmesser der Curve genannt.

340. Zwei Durchmesser heissen conjugierte Durchmesser, wenn jeder die Sehnen halbiert, die zum anderen parallel sind

341. Jede durch einen Kreismittelpunkt gehende, in der Kreisebene liegende Gerade, halbiert alle zu ihr senkrechten Sehnen, mithin ist jede derselben ein Kreisdurchmesser.

Beweis. In Fig. 33 gehe die Gerade AB durch den Mittelpunkt O und CD sei eine beliebige zu AB senkrechte Sehne; verbindet man C und D mit O, so ist das Dreieck CEO congruent mit $\triangle DEO$, weil sie zwei Seiten, nämlich $DO = CO$ und $EO = EO$, wechselseitig gleich, und den der grösseren Seite gegenüberliegenden, d. i. den rechten Winkel E gleich haben. Aus der Congruenz folgt $DE = EC$, d. h. die beliebige zu AB senkrechte Sehne wird von AB halbiert, w. z. b. w.

342. Im Kreise sind sonach je zwei aufeinander senkrechte Durchmesser conjugiert (340).

Aus der Congruenz der Dreiecke folgt aber noch die Gleichheit der Winkel DOE und COE, sowie auch die Gleichheit der Bögen $\widehat{DA}$ und $\widehat{AC}$, folglich muss man behaupten:

343. Halbiert man einen Centriwinkel eines Kreises, so wird auch die Sehne und der Bogen des Centriwinkels halbiert.

344. Errichtet man im Halbierungspunkt einer Sehne auf diese eine senkrechte Sehne, so ist die letztere ein Kreisdurchmesser, geht also durch den Mittelpunkt O.

345. Kennt man 3 Periferiepunkte eines Kreises, so kann man zwei Sehnen und die sie halbierenden Durchmesser construieren (344); der Schnittpunkt dieser Durchmesser ist der Mittelpunkt des durch die 3 Punkte gehenden Kreises.

Ein Kreis ist sonach durch 3 Periferiepunkte vollständig bestimmt.

346. Zu gleichen Centriwinkeln gehören gleiche Sehnen. Ist Winkel DOA = Winkel AOC, so ist $\triangle DOA \cong \triangle AOC$, folglich Sehne DA = Sehne AC.

Mit Hilfe der gleichen Sehnen construiert man gleiche Winkel.

Centriwinkel beurteilt man nach der Grösse der zwischen ihren Schenkeln liegenden Kreisbögen, weil diese proportional mit der Grösse der Winkel zunehmen.

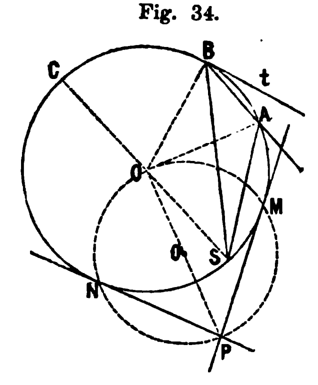
347. Ein Periferiewinkel ist immer halb so gross, wie jener Centriwinkel, der mit ihm auf demselben Bogen aufsteht.

Beweis. Fig. 34. $\sphericalangle AOC = 2 . \sphericalangle ASO = 2 . \sphericalangle ASC$ als Aussenwinkel des gleichschenkligen Dreieckes ASO; ferner $\sphericalangle BOC = 2 . \sphericalangle BSO = 2 . \sphericalangle BSC$ als Aussenwinkel des $\triangle BSO$; folglich ist

$$\sphericalangle AOC - \sphericalangle BOC = 2 [\sphericalangle ASC - \sphericalangle BSC],$$

d. i. $\sphericalangle AOB = 2 \sphericalangle ASB$ oder $\sphericalangle ASB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$ w. z. b. w.

Fig. 34.



Man sagt desshalb auch, jeder Periferiewinkel habe den halben zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen zum Maße.

Der Lernende kann nun leicht den Satz beweisen: Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises im Innern des Kreises, so hat jeder von zwei Scheitelwinkeln die halbe Summe der zwischen ihren Schenkeln liegenden zwei Bogen zum Maße; schneiden sich aber die Sehnen ausserhalb, so ist die halbe Differenz der zwischen den Schenkeln liegenden zwei Bögen das Mass des Sehnenwinkels.

348. Besitzen zwei Periferiewinkel desselben Kreises oder congruenter Kreise zwischen ihren Schenkeln gleiche Bögen, so müssen die Winkel einander gleich sein.

Wenn man von einem zwischen 2 Periferiepunkten liegenden Kreisbogen spricht, so meint man darunter den kleineren Bogen, wenn nicht ausdrücklich der grössere Bogen genannt wird oder als selbstverständlich zu nehmen ist.

349. Jeder Winkel, welcher von einer Sehne und der Tangente (22) eines Endpunktes der Sehne gebildet wird, ist genau so gross, wie der Periferiewinkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte des Bogens gehen. In Fig. 34 soll t eine Tangente in B sein, folglich ist $\sphericalangle ABt$ ein Periferiewinkel, dessen Scheitel unendlich nahe bei B liegt, daher ist er auch dem Periferiewinkel ASB gleich (348).

350. Jeder Winkel im Halbkreis (d. i. ein Periferiewinkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen) ist gleich einem rechten Winkel; denn der ihm entsprechende Centriwinkel ist ein flacher Winkel, d. i. $= 2R$, folglich die Hälfte $= 1R$.

351. Jede **Tangente** eines Kreises steht auf dem durch ihren Berührungspunkt gehenden Radius senkrecht, weil dieser Radius die kürzeste Gerade ist, die man vom Kreismittelpunkt zur Tangente ziehen kann; in Fig. 34 ist also $t \perp OB$.

352. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers müssen zu einander parallel sein, weil sie beide auf dem Durchmesser senkrecht stehen (59).

353. Zieht man an einen Kreis zwei nichtparallele Tangenten, so liegt **erstens** der Kreismittelpunkt in der Geraden, welche den einen Winkel der beiden Tangenten halbiert, und **zweitens** ist der Schnittpunkt der Tangenten von beiden Berührungspunkten gleich weit entfernt. Den Beweis wolle der Lernende selbst führen.

354. Aus diesem Satze ergibt sich in Verbindung mit (350) die **Construction der Berührungspunkte** jener Tangenten, welche man von einem Punkte P an einen Kreis ziehen kann: Man beschreibe Fig. 34 über PO als Durchmesser einen Hilfskreis, so schneidet dieser den gegebenen Kreis in den gesuchten Berührungspunkten M und N; denn $\sphericalangle PMO = R$ und $\sphericalangle PNO = R$ als Winkel im Halbkreise, also stehen PM und PN auf den durch M und N gehenden Radien senkrecht, d. h. PM und PN sind Tangenten.

355. **Wenn man in einem Kreise eine Sehne orthogonal auf einen durch ihren Endpunkt gehenden Durchmesser projiciert, in welcher Beziehung stehen die Sehne und ihre Projection zum Durchmesser?**

Die Sehne ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen ihrer Projection und dem Durchmesser; denn es ist in Fig. 33 $\triangle ACB \sim \triangle CEB$, weil der Winkel bei B gemeinsam ist und die Dreiecke überdies rechtwinklig sind; es folgt daraus:

$$BA : BC = BC : BE$$

oder:

$$\overline{BC}^2 = BA \, . \, BE$$

w. z. b. w.

356. **Wenn man in einem Kreise zwei sich schneidende Sehnen zieht, in welcher Beziehung stehen die von ihrem Durchschnittspunkte angefangen bis zur Periferie gezählten Strecken?**

Das Product der vom Durchschnittspunkt der Sehnen aus gezählten Strecken der einen Sehne ist gleich dem Producte der Strecken der anderen Sehne.

Ist E Fig. 33 der Schnittpunkt von zwei beliebigen Sehnen AB und CD, wobei E auch ausserhalb des Kreises liegen kann, so findet man aus zwei ähnlichen Dreiecken, welche den Winkel bei E entweder als Scheitelwinkel gleich haben, oder wenn E ausserhalb des Kreises liegt, ihn gemeinsam erhalten, die Relation:

$$EC.ED = EA.EB.$$

357. Steht die Sehne CD auf AB senkrecht, so wird CD von AB halbiert und man kann schreiben:

$$\overline{EC}^2 = EC.EC = EA.EB,$$

d. h. errichtet man in irgend einem Punkte E eines Durchmessers eine senkrechte Halbsehne, so ist diese die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Segmenten des Durchmessers.

358. Liegt ein Punkt E ausserhalb des Kreises in einer Sehne AB und ist M der Berührungspunkt der durch E gehenden Tangente, so wird (356):

$$EM.EM = EA.EB,$$

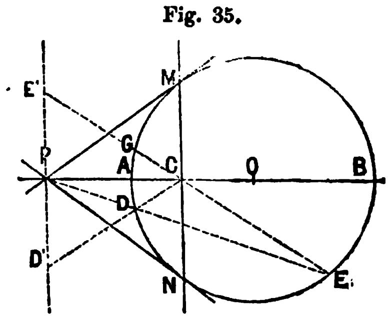
d. h. zieht man durch einen Punkt E eine Tangente EM und eine Sehne EAB an einen Kreis, so ist die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen den von E aus gezählten Segmenten der Sehne.

Harmonische Eigenschaften des Kreises. Pol und Polare.

§. 18.

359. Zieht man durch irgend einen Periferiepunkt eines Kreises eine Tangente, ferner durch ihn zwei Sehnen, die durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen und eine Parallele zu den Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers, so bilden diese vier Geraden einen harmonischen Stralenbüschel.

Fig. 35.



Beweis. In Fig. 35 ist AB ein Durchmesser, $MN \perp AB$, MP eine Tangente, folglich ist Winkel $PMA = \frac{1}{2}\widehat{AM}$ (349), $\measuredangle AMN = \frac{1}{2}\widehat{AN}$ (347) und weil $\widehat{AN} = \widehat{MA}$, so ist $\measuredangle PMA = \measuredangle AMN$. Weil nun $\measuredangle PMN$ durch MA halbiert wird, und

MB auf MA senkrecht steht, so ist der Stralenbüschel $M(PACB)$ ein harmonischer Stralenbüschel (303) w. z. b. w.

Wenn man schreibt M $(PACB)$, so meint man darunter den Büschel, dessen Scheitel in M liegt, und dessen Stralen durch die Punkte P, A, C und B gehen.

360. Ist M $(PACB)$ ein harmonischer Stralenbüschel, und $PACB$ eine gerade Punktreihe, so ist $PACB$ eine harmonische gerade Punktreihe.

Diesen Satz kann man mit Bezug auf Fig. 35 noch auf andere Arten aussprechen:

361. *a*) Zieht man von irgend einem Punkte P eines Durchmessers AB die beiden Tangenten, so teilt der Punkt P und die Berührungssehne MN den Durchmesser AB harmonisch.

362. *b*) Errichtet man auf einen Kreisdurchmesser AB eine beliebige senkrechte Sehne MN, so teilen diese Sehne und der Schnittpunkt P der durch M und N gehenden Tangenten den Durchmesser AB harmonisch.

363. Erklärung. Wenn ein Punkt und eine Gerade in der Ebene einer Curve die Eigenschaft haben, alle durch den Punkt gehenden Sehnen der Curve harmonisch zu teilen, so nennt man den Punkt den Pol der Geraden und die Gerade die Polare des Punktes, (bezogen auf die gegebene Curve), und wenn sich zu jedem Punkte der Curvenebene eine Polare finden lässt, so bezeichnet man die Curve als eine Ordnungscurve eines Polarsystemes.

364. Zu jedem Punkte einer Kreisebene gibt es für den Kreis eine Polare und für jede Gerade in der Kreisebene einen Pol, d. h. ein jeder Kreis bestimmt ein Polarsystem.

Beweis. Sind P und C zwei beliebige Punkte von der Beschaffenheit, dass sie einen Durchmesser AB des Kreises harmonisch teilen (295), so ist jeder der Pol jener Geraden, die durch den andern Punkt senkrecht auf den Kreisdurchmesser AB gezogen wird.

Es soll sonach in Fig. 35 P der Pol der Geraden MN und C der Pol der Geraden PD' sein.

Ist P der Pol von MN, und DE irgend eine durch P gehende Sehne, so soll der Erklärung zufolge $PDFE$ eine harmonische Punktreihe werden. Projicieren wir diese Reihe aus C auf die Gerade PD', wodurch mittels CP, CD, CF und CE die

Punkte $PD'\infty$ und E' entstehen, so ist nur zu beweisen, dass $PD'\infty E'$ eine halbierte harmonische Reihe, d. h. dass $D'P = PE'$ ist (301). (F ist der Schnitt von PE mit MN.)

Denkt man sich den Winkel im Halbkreise AEB (350), so sieht man ein, dass $E\,(PACB)$ ein halbierter harmonischer Stralenbüschel ist (303), folglich muss EA den Winkel PEC halbieren, sonach muss $\widehat{DA} = \widehat{AG}$, also auch $\sphericalangle\, DCA = ACG$ sein, woraus folgt $\triangle\, D'CP \cong \triangle\, E'CP$ und woraus sich ergibt: $D'P = PE'$.

Es ist also wirklich $PD'\infty E'$ eine halbierte harmonische Reihe, folglich muss auch die Reihe $PDFE$ eine harmonische sein, weil sie die Projection von $PD'\infty E'$ aus dem Punkte C ist (270).

Wenn also jede durch P gehende Sehne von P und der Geraden MN harmonisch geteilt wird, so ist P der Pol zur Polaren MN (363).

Auf eine ganz analoge Art führt man den Beweis, dass auch C der Pol der Geraden PD' ist. Man wird nämlich durch C eine Sehne legen, und die auf ihr entstehende vierpunktige Reihe $ECGE'$, welche harmonisch **sein soll**, aus P auf die Gerade MN projicieren, und beweisen, dass die auf der MN entstandene vierpunktige Projection, eine **halbierte harmonische Reihe** ist. Dieser Nachweis lässt sich mit Zuhilfenahme der harmonischen Reihe $PACB$ führen, folglich ist wirklich C der Pol der Geraden PD'.

Fig. 36.

365. **Wie construiert man zu einem gegebenen Punkte P oder C einer Kreisebene die Polare?**

Liegt der Punkt P ausserhalb des Kreises (Fig. 35), so ist die Berührungssehne MN (354) die Polare zu P; liegt aber der Punkt C im Kreisinnern, so zieht man durch C einen Durchmesser, zu den Tangenten in A und B eine parallele Sehne MN und durch M oder N eine Tangente, bis sie den Durchmesser AB in P schneidet; durch P parallel zu MN geht dann die Polare des Punktes C.

366. Liegt der Pol auf dem Kreise, so wird die durch ihn gehende Tangente seine Polare.

367. Man kann die Polare zu einem gegebenen Punkte P aber auch auf folgende Art construieren: Man ziehe durch P zwei Sehnen und construiert in jeder Sehne einen Punkt, welcher mit P die Sehne harmonisch teilt (302), so geht durch diese beiden Punkte die Polare des Punktes P. Wären z. B. in Fig. 35 AB und DE zwei beliebige durch P gehende Kreissehnen, und teilen die Punkte C und P, F und P die Sehnen AB und DE harmonisch, so muss die Polare von P durch C und F gehen (363).

Betrachtet man die Punkte $ADEB$ als Eckpunkte eines vollständigen Viereckes (307) und zieht die Diagonalen AE und BD, so geht durch ihren Schnittpunkt eine Diagonale, welche die Punktreihen PAB und PDE harmonisch teilt (308). Da aber die Polare MN dieselben Reihen harmonisch teilt, so folgt, dass sowol der Schnitt von AE mit BD, als auch von AD mit BE in MN liegt, dass daher MN gezogen werden kann, wenn man den Schnitt von AE mit BD und von AD mit BE kennt.

368. Sind ferner AB und GE zwei beliebige durch C gehende Sehnen, und teilen C und P, C und E' diese Sehnen harmonisch, so muss die Polare des Punktes C durch P und E' gehen (363).

369. Wie construiert man zu einer gegebenen Geraden für den Kreis den Pol?

Die aus dem Kreismittelpunkt auf die Gerade senkrecht gefällte Gerade enthält den Pol. Ist PD', Fig. 35, die gegebene Gerade, so zieht man von P die Tangenten, dann geht die Berührungssehne MN durch den gesuchten Pol C; ist aber MN die gegebene Gerade, so ist der Schnittpunkt P der durch M und N gehenden Tangenten, der Pol von MN (364).

370. Der Durchschnittspunkt zweier Polaren ist stets der Pol zu jener Geraden, welche durch die Pole der beiden Polaren geht.

Nehmen wir an, in Fig. 36 sei a die Polare zu A, b die Polare zu B, so muss nach dem Begriffe von Pol und Polare (363) die Reihe $A''CA'A$ harmonisch sein.

In ganz gleicher Weise ist auch die Reihe $B''CB'B$ harmonisch (363).

Soll man zu dem Schnittpunkte C der beiden Polaren a und b die Polare c bestimmen, so darf man nur durch C zwei Sehnen ziehen und diese mit zwei Punkten bezüglich C harmonisch teilen

(368), so muss durch die zwei neuen Punkte die Polare von C gehen. $A'A''$, $B'B''$ sind aber schon zwei durch C gehende Sehnen; A und B teilen sie bezüglich C harmonisch; mithin ist die Gerade AB die Polare des Durchschnittspunktes der Polaren a und b.

371. Die Verbindungsgerade zweier Pole ist stets die Polare zu jenem Punkte, in welchem sich die Polaren der gegebenen Punkte schneiden.

Die Richtigkeit dieser Behauptung erhellt aus dem vorhergehenden Satze.

372. Wo müssen die Pole von zwei geraden Linien einer Kreisebene liegen?

Immer in der Polare ihres Durchschnittspunktes. Sind a und b diese Geraden und c die Polare von C, so muss c durch die Pole A und B gehen, d. h. A und B müssen in der Polare c des Schnittpunktes von a mit b liegen.

373. Wenn sich demnach in einer Kreisebene eine gerade Linie a um einen in ihr liegenden festen Punkt C dreht, wo wird immer der Pol A der beweglichen Geraden a liegen müssen?

In der Polaren c des festen Punktes C, weil dieser der Durchschnittspunkt aller Lagen der beweglichen Geraden ist (372).

374. Wenn man in den Endpunkten aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen Tangenten an den Kreis construiert, wo werden die Schnittpunkte aller Paare zusammengehörender Sehnen liegen müssen?

In der Polare des festen Punktes, weil der Schnittpunkt von je 2 solchen Tangenten (369) der Pol einer durch den festen Punkt gehenden Geraden ist (373).

In Fig. 36 gibt es 4 durch C gehende Gerade, folglich bestimmen sie die Berührungspunkte von 4 Tangentenpaaren, welche sich paarweise in c schneiden.

375. Welche zwei geraden Linien einer Kreisebene nennt man einander conjugiert?

Je zwei gerade Linien, deren jede durch den Pol der andern geht.

376. Kann man durch jeden Punkt einer Kreisebene conjugierte Gerade ziehen?

Zu jeder Geraden, die man durch einen Punkt in der Kreisebene zieht, kann man durch jenen Punkt noch eine Gerade so construieren, dass jede der beiden Geraden durch den Pol der andern geht. Ziehen wir in Fig. 36 durch den Punkt C eine beliebige Gerade a, so muss ihr Pol A in der Polaren c liegen (373). Beide Geraden a und c sind, wie aus der Figur ersichtlich ist, von der verlangten Beschaffenheit; folglich kann man sagen:

Jede Gerade, die man durch einen Punkt C zieht, ist der Polaren c dieses Punktes conjugiert (375).

Verbindet man nun A mit C, so muss von dieser Geraden der Pol im Durchschnittspunkte von a mit c, d. i. in A''' liegen (370); also sind a und CA conjugierte Gerade und es ist bewiesen, dass man durch einen Punkt C irgend eine Gerade a ziehen und die ihr conjugierte durch C gehende Gerade finden kann.

377. Auch zwei Punkte, deren jeder in der Polare des andern liegt, nennt man einander conjugiert. Sind zwei Gerade einander conjugiert, so sind es auch ihre Pole.

Perspectivisch ähnliche Kreise. Aehnlichkeitspunkte.

§. 19.

378. Die Collinear-Projectionen eines Kreises untersuchen wir nach den projectivischen Verwandtschaftsgraden.

Liegen zwei Kreise perspectivisch congruent, so können sie nach §. 9 betrachtet werden.

Sucht man zu einem Kreise seine Collinear-Projection nach perspectivischer Aehnlichkeit, siehe §. 10, so ist dieselbe immer wieder ein Kreis. Ist der Modulus negativ, so liegt das Projectionscentrum zwischen den Kreismittelpunkten, und ist der Modulus $= -1$ (220), so sind die Kreise congruent.

Zwei in einer Ebene liegende Kreise mit verschiedenen Radienlängen können jederzeit auf eine zweifache Weise perspectivisch ähnlich liegen.

379. Wie findet man die Projectionsmittelpunkte bei 2 perspectivisch ähnlich liegenden Kreisen?

Zieht man in dem einen Kreise K_1 (der Lernende wolle sich zwei Kreise K_1 und K_2 zeichnen, deren Centra O_1 O_2 sind) einen beliebigen Radius $O_1 A_1$, so kann man im anderen Kreise K_2 zu $O_1 A_1$ zwei parallele Radien ziehen; der eine $O_2 A_2$ ist im gleichen Sinne mit $O_1 A_1$, der andere $O_2 A'_2$ im Gegensinne zu

$O_1 A_1$ parallel. Es ist also einmal A_1 mit A_2, das anderemal A_1 mit A'_2 verwandt.

Zieht man den Stral $A_1 A_2$, so findet man das Projectionscentrum S_1 im Schnittpunkt dieses Strales mit der Centrallinie $O_1 O_2$ und zwar ausserhalb $O_1 O_2$; zieht man aber den Stral $A_1 A'_2$, so liegt das Projectionscentrum S_2 zwischen O_1 und O_2.

380. Diese beiden Projectionscentra $S_1 S_2$ pflegt man die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise zu nennen; S_1 den äusseren, S_2 den inneren.

381. Jeder Aehnlichkeitspunkt teilt die Strecke $O_1 O_2$ im Verhältnis der Kreisradien, folglich teilen diese Punkte die Strecke $O_1 O_2$ harmonisch (295).

382. Wenn sich zwei Kreise nicht schneiden, so haben sie entweder vier oder gar keine gemeinsamen Tangenten. Im ersteren Falle gehen 2 Tangenten durch den äusseren, die beiden anderen durch den inneren Aehnlichkeitspunkt.

383. Schneiden sich zwei Kreise, so gehen die beiden möglichen Tangenten durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt.

384. Berühren sich zwei Kreise von aussen, so haben sie drei gemeinsame Tangenten; der innere Aehnlichkeitspunkt liegt im Berührungspunkt der beiden Kreise.

Fig. 37.

385. Berühren sich die Kreise von innen, so haben sie nur eine gemeinsame Tangente und ist der Berührungspunkt der äussere Aehnlichkeitspunkt.

386. Wie wird man die Aufgabe lösen: Man soll eine Gerade so ziehen, dass sie zwei in einer Ebene liegende Kreise derart schneidet, auf dass die in den vier Schnittpunkten construierten Tangenten paarweise parallel werden.

Zieht man durch einen Aehnlichkeitspunkt eine beide Kreise schneidende Gerade, so müssen die durch die verwandten Punkte gehenden Tangenten parallel sein; denn die Kreise liegen perspectivisch ähnlich, wenn man den einen oder den anderen Aehnlichkeitspunkt als Projectionscentrum betrachtet, und in perspectivisch ähnlichen Systemen sind die verwandten Geraden parallel.

Ellipsen als perspectivisch affine Kreisprojectionen. Aus zwei conjugierten Ellipsendurchmessern deren Axen zu construieren.

§. 20.

387. **Man soll zu einem Kreise seine Collinear-Projection construieren, wenn die Begegnungsgerade ein Durchmesser ist, und die projicierenden Stralen auf diesem Durchmesser senkrecht stehen.**

Gewöhnlich ist bei dieser Aufgabe das Punktepaar CC' Fig. 37 gegeben; wir haben dann nach §. 11 alle in der projicierenden Richtung gemessenen Entfernungen von der Begegnungsgeraden β im Verhältnisse von $OC : OC'$ zu verändern, um die Collinear-Projection zu finden (235). Ist z. B. $Dd \perp AB$ und $dD : dD' = OC : OC'$, so ist D' der mit D verwandte Punkt.

Am einfachsten findet man die Punkte der Collinear-Projection des Kreises auf folgende Art: Man beschreibt auch mit OC' einen Hilfskreis concentrisch zum gegebenen Kreise und zieht irgend einen Durchmesser FD, so wird OD und OF in D'' und F'' nach dem Verhältnis von $OC : OC'$ geteilt. Zieht man durch D und F projicierenden Stralen senkrecht auf AB und durch D'' und F'' Parallelen zu AB, so erhält man vier Punkte $D'\,E'\,F'\,G'$, welche der affinen Projection des Kreises angehören, weil $dD : dD' = OC : OC'$ ist, und eine gleiche Beziehung auch bei den anderen Punkten EE', ... besteht.

388. Die Kreistangente GH schneidet die Begegnungsgerade β in H, mithin muss $G'H$ die Tangente an die Kreisprojection sein (181).

389. Alle aus dem Kreise nach den Gesetzen der Collinear-Projection (180, 181) abgeleiteten krummen Linien nennt man Linien der zweiten Ordnung, weil sie mit einer geraden Linie höchstens zwei Punkte gemein haben können, oder auch **Kegelschnittslinien**, weil sie entstehen, wenn man Kreiskegelflächen mit Ebenen schneidet.

390. Die geschlossenen Linien II. Ordnung wurden **Ellipsen** genannt, mithin ist die in Fig. 37 gezeichnete Curve eine Ellipse.

391. **Wenn man im Kreise eine beliebige Reihe paralleler Sehnen zieht, wie werden die ihnen verwandten Geraden in der durch Affinität abgeleiteten Ellipse aussehen?**

Sie müssen auch in der Ellipse parallele Sehnen bilden, weil in affin verwandten Gebilden die zu parallelen Geraden verwandten Geraden abermals parallel sind (240).

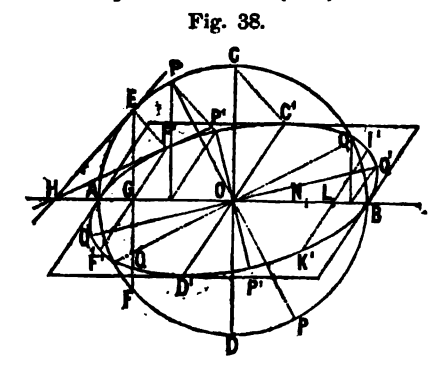
392. **Gibt es auch bei den Ellipsen conjugierte Durchmesser?** (340)

Weil bei den Kreisen conjugierte Durchmesser vorhanden sind, so müssen sie auch bei allen den Kreisen affin verwandten Figuren, d. i. bei den Ellipsen vorkommen.

393. Jede Ellipse besitzt einen Mittelpunkt (337) und jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne ist ein Durchmesser (339).

394. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers einer Ellipse sind zu einander parallel, weil dies auch bei dem Kreise der Fall ist; und weil bei dem Kreise die in den Endpunkten eines Durchmessers parallelen Tangenten zu dem **conjugierten** Durchmesser parallel sind, so ist dasselbe auch bei der Ellipse der Fall (240).

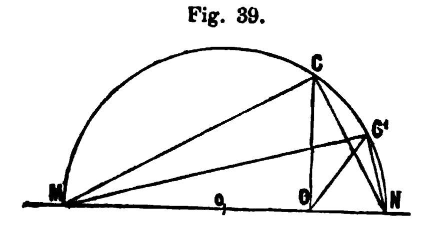
Fig. 38.



395. Im Kreise stehen je zwei conjugierte Durchmesser aufeinander senkrecht; bei den Ellipsen gibt es nur ein einziges Paar zu einander senkrechter conjugierter Durchmesser. Diese nennt man die **Axen der Ellipse**; die eine die **grosse**, die andere die **kleine Axe**. In Fig. 37 ist AB die grosse, $C'C'$ die kleine Axe.

396. Sucht man zu zwei conjugierten Durchmessern des Kreises die verwandten Durchmesser in der Ellipse, so bilden diese auch ein Paar conjugierter Durchmesser der Ellipse.

Fig. 39.



397. Die Aufgabe (387) kann daher auch in folgender Form gegeben werden:

Man soll eine Ellipse construieren, wenn die grosse und kleine Axe derselben gegeben ist.

398. **Aufgabe. Man soll eine Ellipse aus zwei beliebigen conjugierten Durchmessern construieren.**

Es seien in Fig. 38 AB und $C'D'$ diese Durchmesser, mithin O der Ellipsenmittelpunkt. Man betrachte eine Ellipse als eine affine Projection eines Kreises, dann müssen die conjugierten Durchmesser AB, $C'D'$ die Projectionen von zwei zu einander senkrechten Kreisdurchmessern sein.

Setzen wir voraus, der eine Durchmesser AB sei dem Kreise und der Ellipse gemein, so stellt er uns die Begegnungsgerade beider Gebilde vor, und der mit $C'D'$ verwandte Durchmesser CD steht senkrecht auf AB. Beschreibt man über AB als Durchmesser einen Kreis, so kann man in ihm eine Reihe zu CD paralleler Sehnen ziehen, deren verwandte Sehnen zu $C'D'$ parallel sein werden. Verändert man alle mit OC parallelen Sehnen mit Hilfe eines Proportionalwinkels (230) im Verhältnisse von $OC : OC'$, also z. B. $GF : GF' = OC : OC'$, so ist F' der mit F verwandte Punkt (239).

Macht man gleich bei Beginn $OL = OG$, so erhält man mittels der Länge GF' die vier Ellipsenpunkte $E'F'J'K'$. Im Uebrigen kann man sich die Tangenten und Probepunkte auf die schon bekannte Art construieren (388).

390. Aufgabe. Man soll untersuchen, ob es in zwei perspectivisch affinen Systemen in jedem Systeme zu einander senkrechte Richtungen gibt, deren verwandte Geraden im anderen Systeme ebenfalls aufeinander senkrecht stehen.

Kann man diese Richtungen finden, dann kann man jene conjugierten Durchmesser im Kreise zeichnen, deren verwandte Durchmesser in der Ellipse auch aufeinander senkrecht stehen, welche sonach die Ellipsenaxen sind.

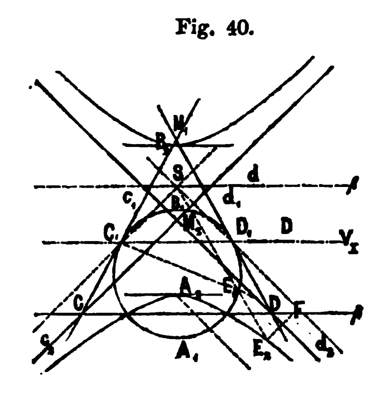
Es seien in Fig 39 CC' zwei verwandte Punkte, β die Begegnungsgerade von zwei perspectivisch affinen Systemen.

Suchen wir in β den Mittelpunkt o eines durch CC' gehenden Kreises (344), so werden, weil C und C' verwandte Punkte sind, den Geraden MC, NC die Geraden MC', NC' entsprechen (181, 186) und sowol die ersteren, als auch die letzteren stehen aufeinander senkrecht (350). Mithin gibt es in jedem von zwei perspectivisch affinen Systemen nur ein einziges Paar zu einander senkrechter Richtungen, deren verwandte Richtungen abermals auf einander senkrecht stehen.

Sucht man sich in Fig. 38 zu CC' nur den einen Punkt N nach Art der Fig. 39 und zieht durch O den Durchmesser PP parallel zu NC und QQ senkrecht auf NC, so darf man nur zu P und Q die verwandten Punkte $P'Q'$ suchen (180, 181), so sind die Ellipsenaxen gefunden, weil $P'Q'$ ihre Endpunkte sind.

400. **Wenn zwei Stralenbüschel in einer Ebene perspectivisch liegen, gibt es in jedem Büschel ein oder mehrere Paare aufeinander senkrechter Stralen, deren verwandte Stralen des anderen Büschels ebenfalls aufeinander senkrecht stehen?**

Fig. 40.



Nehmen wir an, in Fig. 39 seien CC' die Scheitelpunkte der perspectivisch liegenden Büschel und β der Träger der ihnen gemeinsamen Punktreihe. Construiert man wie vorhin einen durch CC' gehenden Kreis mit dem Centrum in β, so sind CM, CN die einzig möglichen zwei aufeinander senkrechten Stralen des einen Büschels C, deren verwandte Stralen im anderen Büschel C' ebenfalls aufeinander senkrecht stehen.

Wenn zwei Stralenbüschel projectivisch proportional sind, so können sie stets in eine perspectivische Lage gebracht werden (291), also kann man die hier bewiesene Eigenschaft allgemein dahin aussprechen:

Bei zwei projectivisch verwandten Stralenbüscheln gibt es in jedem nur ein einziges aufeinander senkrechtes Paar von Stralen, dessen verwandte Stralen im zweiten Büschel abermals aufeinander senkrecht stehen.

Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln als collineare Kreisprojectionen.

§. 21.

401. Das Verfahren, zu einem Kreise seine perspectivisch collineare Projection zu finden, ist dasselbe, welches schon früher in (247) bei der Construction der perspectivisch collinearen Systeme

überhaupt angewendet wurde. Dabei ist noch besonders hervorzuheben:

Sucht man von einem Linienelemente einer Curve seine Collinear-Projection, so muss diese ein Linienelement von der Collinear-Projection der Curve sein, mithin ist die Collinear-Projection einer Tangente einer Curve wieder eine Tangente an die Collinear-Projection der Curve.

Nehmen wir jetzt an, S, β und der Kreis haben die Lage, wie sie Fig. 40 zeigt, so ist für die Bestimmung der Kreisprojection noch der Modulus des Systemes, oder ein Paar verwandter Punkte zu kennen nothwendig.

Je nach der Grösse des Modulus m_1 wird die Verschwindungslinie (328) des ersten Systemes, dem der Kreis angehört, eine verschiedene Lage gegen den Kreis annehmen. Drei Fälle sind dabei denkbar:

402. *a*) Die Verschwindungslinie liegt ausserhalb des Kreises; kein Punkt des Kreises erhält dann seine Projection im Unendlichen, die Kreisprojection wird eine geschlossene Curve, eine Ellipse (333).

403. *b*) Die Verschwindungsgerade berührt den Kreis in einem Punkte; die mit der Verschwindungsgeraden verwandte Gerade liegt im Unendlichen (328) und berührt auch die Kreisprojection in einem unendlich fernen Punkte (401). Eine ebene Kreisprojection mit einer unendlich fernen Tangente nennt man eine Parabel.

404. *c*) Die Verschwindungsgerade schneidet den Kreis in zwei Punkten $C_1 D_1$. In diesem Falle liegt die mit $C_1 D_1$ verwandte Sehne $C_2 D_2$ im Unendlichen (328), und die Kreisprojection besteht aus zwei scheinbar getrennten Curven, deren Vereinigung in den unendlich fernen Punkten $C_2 D_2$ erfolgt. Diese aus zwei Aesten bestehende Kreisprojection wird als Hyperbel bezeichnet.

405. Tangenten, welche nicht im Unendlichen liegen, eine Curve aber in einem unendlich fernen Punkte berühren, nennt man Asymptoten der Curve. Eine Hyperbel besitzt zwei unendlich ferne Punkte, mithin zwei Asymptoten.

406. In Fig. 40 wurde ein Teil der Kreisprojection für den Fall construiert, dass die Verschwindungslinie V_I den Kreis schneidet. Die erste Construction war die der Asymptoten; sie sind die zu den Tangenten $c_1 d_1$ der Punkte $C_1 D_1$ verwand-

ten Geraden $c_2 d_2$. Die Tangente c_1 schneidet β in einem Punkte C, durch welchen auch c_2 gehen muss (181). c_2 geht aber auch durch den mit C_1 verwandten unendlich fernen Punkt C_2, und weil C_2 in dem projicierenden Strale SC_1 liegt, so muss c_2 durch C parallel zu SC_1 gehen. Auf gleiche Weise findet man d_2.

Um zu irgend einem Punkte E_1 des Kreises die Projection E_2 zu finden, wird man ein Paar schon bekannter $\overline{\wedge}$ verwandter Punkte, z. B. $C_1 C_2$ oder $D_1 D_2$ benützen (247). Man verbindet zu diesem Zwecke C_1 mit E_1, sucht den Begegnungspunkt F und verbindet F mit C_2, d. h. man zieht durch F eine Parallele zu c_2, so ist der Schnitt dieser Parallelen mit dem durch E_1 gehenden projicierenden Strale der gesuchte Punkt E_2.

Bestimmt man sich eine hinreichende Menge von Punkten der Hyperbel, so kann man diese durch einen Linienzug in der erforderlichen Weise zu den Hyperbelästen verbinden.

In Fig. 40 ist der Hyperbelast im Asymptoten - Winkel $c_2 M_2 d_2$ die Projection des Kreisbogens $C_1 A_1 D_1$ und der Hyperbelast im Scheitelwinkel die Projection des Kreisbogens $C_1 B_1 D_1$.

407. W e l c h e h a r m o n i s c h e n E i g e n s c h a f t e n b e s i t z e n a l l e L i n i e n d e r II. O r d n u n g? (389.)

Alle harmonischen Eigenschaften die der Kreis besitzt, gehen auf seine Collinear - Projection über; denn nach dem projectivischen Grundgesetze (270) wird jedes Verhältnis von Punktwerten einer geraden Punktreihe unverändert auf die Projection übertragen. Ist demnach eine gerade Reihe von Punkten in dem einen Systeme harmonisch, so muss es auch die verwandte Reihe in der Projection sein.

408. A l s o i s t a u c h d i e C o l l i n e a r - P r o j e c t i o n e i n e s P o l e s u n d d e r z u g e h ö r i g e n P o l a r e n d e s K r e i s e s w i e d e r e i n P o l s a m m t z u g e h ö r i g e r P o l a r e f ü r d i e C o l l i n e a r - P r o j e c t i o n d e s K r e i s e s.

409. Es besitzen sonach alle Linien der II. Ordnung unzählig viele Pole und Polaren wie der Kreis (364), und es muss sich auch, wie bei dem Kreise, d e r P o l e i n e r G e r a d e n i n d e r P o l a r e e i n e s f e s t e n P u n k t e s w e i t e r b e w e g e n, w e n n d i e G e r a d e s i c h u m j e n e n f e s t e n P u n k t d r e h t (373).

410. J e d e c o l l i n e a r e K r e i s p r o j e c t i o n, d. i. j e d e L i n i e d e r II. O r d n u n g b e s i t z t e i n e n M i t t e l p u n k t.

B e w e i s. Man kann von dem Systeme I, dem der Kreis angehört, die Verschwindungslinie V_1 construieren (328), weil

doch zwei verwandte Punkte der beiden Systeme oder ein Modulus (257) bekannt sein werden, und zu ihr, wenn man sie als Polare des Kreises ansieht, den Pol M_1 suchen (369). Jede durch diesen Pol gehende Sehne a wird dann vom Pol und vom Schnittpunkt der Sehne mit der Polare V_I jenes Poles, d. i. mit der Verschwindungslinie, harmonisch geteilt (364). Sucht man jetzt die Collinear-Projection des Kreises (406), so wird die Collinear-Projection einer jeden dieser harmonischen Reihen a, eine halbierte harmonische Reihe werden (301), weil die Collinear-Projection des Schnittpunktes der Sehne a mit der Verschwindungslinie (328) ins Unendliche fällt; folglich muss die Collinear-Projection M_2 des Poles M_1 der Verschwindungslinie V_I die Collinear-Projectionen der durch den erwähnten Pol gehenden Kreissehnen a halbieren, mithin ist die Collinear-Projection M_2 des Poles der Verschwindungslinie des Kreises, der Mittelpunkt für die Collinear-Projection des Kreises.

411. Durch diese Beweisführung sehen wir auch ein, dass bei einer jeden Linie der II. Ordnung die Polare ihres Mittelpunktes in unendlicher Entfernung liegt, und was dasselbe ist, der Pol der unendlich fernen Geraden einer jeden Linie der II. Ordnung ist der Mittelpunkt dieser Linie.

In Fig. 40 ist M_1 der Pol der Geraden $C_1 D_1$ für den Kreis. Die zu $C_1 D_1$ verwandte Gerade $C_2 D_2$ in der Hyperbel liegt im Unendlichen und M_2 ist der mit M_1 verwandte Punkt, sonach ist M_2 der Pol der unendlich fernen Geraden für das zweite System und desshalb der Mittelpunkt der Hyperbel (411).

412. Der Mittelpunkt einer Hyperbel ist demnach immer der Durchnittspunkt ihrer beiden Asymptoten.

413. Wo muss der Mittelpunkt (337) einer Parabel liegen?

Im Unendlichen. Denn wenn die Projection eines Kreises eine Parabel werden soll, so muss die Verschwindungslinie des Kreises (328) den Kreis berühren (403), und weil der Pol einer Kreistangente ihr Berührungspunkt ist (366), so fällt auch der diesem Pole verwandte Punkt, d. i. der Mittelpunkt der Parabel ins Unendliche (411).

414. Wie müssen also bei einer Parabel die Durchmesser beschaffen sein?

Weil alle Durchmesser einer Kegelschnittslinie durch deren Mittelpunkt gehen, so müssen bei der Parabel alle Durchmesser

untereinander parallel sein, indem der Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

415. Welche Paare von Kreissehnen haben die Eigenschaft, dass ihre Collinear-Projectionen conjugierte Durchmesser der Collinear-Projection des Kreises werden?

Zieht man durch den Pol der Verschwindungslinie des Kreises ein beliebiges Paar conjugierter Geraden oder conjugierter Sehnen (376), so werden die Collinear-Projectionen dieser Sehnen conjugierte Diameter (340).

Denn die Collinear-Projectionen conjugierter Geraden sind wieder einander conjugiert, d. h. jede der beiden Projectionen geht durch den Pol der andern; und weil beide Pole in der unendlich fernen Geraden liegen, so sind ihre Polaren Durchmesser und zwar conjugierte Durchmesser. Es halbiert sonach jeder die zum anderen parallelen Sehnen.

416. Wozu ist jeder Durchmesser einer Linie II. Ordnung parallel?

Immer zu den Tangenten in den Endpunkten seines conjugierten Durchmessers.

417. Welche Sehne wird daher jeder Parabeldurchmesser halbieren?

Immer jene, die zur Tangente am Endpunkte des Durchmessers parallel sind.

418. Der Lernende wolle nun bei verschiedenen Lagen des Kreises und der Verschwindungslinie, namentlich wenn der Kreis durch S geht und β berührt, die Kreisprojectionen sowie verschiedene Probepunkte construieren (200).

Construction der Linien II. Ordnung aus ihren projectivischen Eigenschaften.

§. 22.

419. Welche Eigenschaft eines ebenen Gebildes nennt man eine projectivische Eigenschaft?

Zwei oder mehrere projectivisch proportionale gerade Punktreihen oder Stralenbüschel zu besitzen. Denn projiciert man ein solches Gebilde auf eine Ebene oder in einer Ebene, so ist diese projectivische Proportionalität auch in der Projection des ebenen Gebildes vorhanden.

Es sind sonach alle in den §§. 15 und 18 entwickelten harmonischen Eigenschaften der vollständigen Vierecke und Kreise projectivische Eigenschaften.

420. Welcher Gewinn entsteht für die Geometrie aus den projectivischen Eigenschaften?

Es wird durch sie möglich, die Natur vieler Gebilde auf eine einfachere Weise als bisher zu untersuchen und Beziehungen in Gebilden aufzufinden, welche sonst der geometrischen Forschung nicht leicht zugänglich sind.

421. Unter welchen Gesichtspunkten kann man zwei einer Vergleichung fähigen Gebilde miteinander vergleichen?

Entweder sind zwei Gebilde congruent, oder ähnlich, oder affin, oder endlich collinear.

Bei der Congruenz sind je zwei auf einander bezogene, also verwandte gerade Punktreihen oder Stralenbüschel congruent; bei der Aehnlichkeit sind die verwandten geraden Punktreihen geometrisch proportional, die verwandten Stralenbüschel congruent; bei der Affinität sind ebenfalls je zwei verwandte gerade Punktreihen geometrisch proportional, aber die Stralenbüschel sind nicht mehr congruent, sondern nur projectivisch proportional (287); und bei der Collineation sind je zwei verwandte gerade Punktreihen oder Stralenbüschel projectivisch proportional.

422. Spricht man von zwei projectivisch verwandten Gebilden, so ist der specielle Verwandtschaftsgrad, ob Congruenz, Aehnlichkeit, Affinität oder Collineation, nicht näher bezeichnet.

423. Durch die Gesetze der Collinear-Projection erhält man projectivisch verwandte Gebilde in perspectivischer Lage.

424. Kann man zwei beliebige Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$, die entweder in derselben oder in verschiedenen Ebenen liegen, miteinander vergleichen?

Je zwei ebene Vierecke sind projectivisch verwandt. Bezeichnet man nämlich je zwei Punkte, welche miteinander verglichen werden sollen, mit gleichen, nur durch Zeiger unterschiedene Buchstaben, und zieht man in jedem Vierecke die sechs Seiten und drei Diagonalen (307), so ist jede vierpunktige Reihe, welche auf einer Seite des einen Viereckes $ABCD$ ent-

steht, mit ihrer verwandten vierpunktigen Reihe des anderen Viereckes projectivisch proportional, weil eine jede dieser vierpunktigen Reihen eine harmonische ist (308).

Es kann daher, wenn auf einer Seite z. B. BD ein Punkt M beliebig angenommen wird, vermöge der projectivischen Proportionalität auf der Seite $B_1 D_1$ der zu M verwandte Punkt M_1 construiert werden (278).

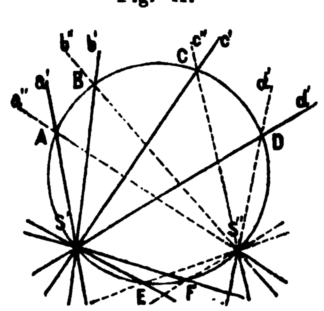
425. Schneidet eine beliebige Gerade l die Seiten des Viereckes $ABCD$, so liegen auch die verwandten Schnittpunkte im Vierecke $A_1 B_1 C_1 D_1$ in einer Geraden l_1, welche die zu l verwandte Gerade ist.

426. Auf diese Art kann man zu jeder Geraden und auch zu jedem Punkte in der Ebene des Viereckes $ABCD$ eine und nur eine verwandte Gerade oder einen und nur einen verwandten Punkt in der Ebene des Viereckes $A_1 B_1 C_1 D_1$ construieren. Man sagt dann, die Ebenen der beiden Vierecke seien projectivisch aufeinander bezogen, oder die beiden Vierecke bestimmen **zwei projectivisch verwandte Systeme** (203).

427. **Welche besondere projectivische Eigenschaft besitzt der Kreis?**

Alle Periferie-Stralenbüschel sind projectivisch proportional.

Fig. 41.



428. Unter Periferie - Stralenbüscheln eines Kreises oder irgend einer krummen Linie verstehen wir solche Stralenbüschel, welche ihre Scheitel in der Periferie der Curve liegen haben, und bei welchen alle verwandten Stralen sich in der Periferie schneiden. Sind z. B. in Fig. 41 im Kreise mehrere Punkte $ABCDE\ldots$ angenommen, und aus zwei anderen beliebigen Periferiepunkten $S' S''$ projiciert worden, so sind die Stralenbüschel $S'(ABCDE\ldots)$ und $S''(ABCDE\ldots)$ zwei Periferie - Stralenbüschel, wobei a' dem a'', ebenso b' dem b'', u. s. w. verwandt ist.

429. Eine krumme Linie besitzt diesem Begriffe zufolge unzählig viele Periferie-Stralenbüschel.

430. Wenn man bei dem Kreise beweiset, dass zwei **beliebige** Periferie-Stralenbüschel projectivisch proportional sind (287),

so ist dadurch auch bewiesen, dass alle Periferie-Stralenbüschel untereinander projectivisch proportional sind.

Der Beweis ist folgender:

Sind A und B irgend zwei Periferiepunkte des Kreises, so ist nach (348) der Winkel, den die Stralen $S'A$, $S'B$ einschliessen, gleich dem von $S''A$ mit $S''B$ gebildeten Winkel. Demzufolge werden die Periferie-Stralenbüschel S' und S'' congruent, und sind sie congruent, so sind sie auch projectivisch proportional w. z. b. w.

431. Welche Eigenschaft dieser beiden Periferie-Stralenbüschel S' und S'' ist keine projectivische?

Die Eigenschaft der Congruenz; denn zwei Stralenbüschel welche projectivisch proportional sind, brauchen ja nicht congruent zu sein, weil die projectivische Proportionalität sich nicht auf die Gleichheit der verwandten Winkel stützt (287).

432. Kann die Congruenz von je zwei Periferie-Stralenbüscheln des Kreises zur Kreisconstruction verwendet werden?

Sie kann verwendet werden, um aus drei Periferiepunkten den Kreis zu construieren, ohne seinen Mittelpunkt und seinen Radius zu benützen. Sind in Fig. 41 die Punkte $S'S''A$ gegeben, und wird verlangt, dass sie in einer Kreisperiferie liegen sollen, so wird man zwei dieser Punkte, z. B. S' und S'', als Scheitelpunkte von Periferie-Stralenbüscheln benützen. Zieht man $S'A = a'$ und $S''A = a''$, ferner einen beliebigen Stral b' durch S', so darf man nur den von b' mit $S'A$ gebildeten Winkel an $S''A$ so ansetzen, dass beide Stralenbüschel S' und S'' einen gleichen Sinn erhalten, so ist der Schnitt B von b'' mit b' ein Punkt der Kreisperiferie. Am leichtesten wird das Uebertragen gleicher Winkel mit Hilfe von Kreisen geschehen, die in $S'S''$ ihre Mittelpunkte und $S'S''$ zum Radius erhalten.

433. Wie kann man in einem Punkte S'' eines Kreises, von dem drei Periferiepunkte $S'S''A$ Fig. 41 gegeben sind, ohne Benützung des Kreismittelpunktes eine Tangente construieren?

Denkt man sich einen Punkt G unendlich nahe bei S'', so muss $\measuredangle AS'G = \measuredangle AS''G$ sein (349). Da aber $\measuredangle AS'G$ soviel ist als wie $\measuredangle AS'S''$, so wird man nur den Winkel $AS'S''$ an den Stral AS'' so ansetzen, dass der Sinn des Stralenbüschels

S'' derselbe ist, wie jener des Stralenbüschels S', so ist der zweite Schenkel dieses Winkels die Tangente an den Kreis im Punkte S''.

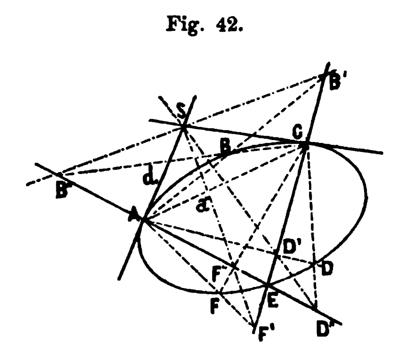
434. Welche ebenen Gebilde werden mit einem Kreise projectivisch verwandt sein?

Alle jene ebenen Gebilde, welche nach demselben projectivischen Gesetze entstehen wie der Kreis.

435. Ein Kreis entsteht durch die Schnittpunkte der verwandten Stralen zweier projectivisch proportionaler Stralenbüschel, welche nur die Eigenthümlichkeit haben, dass beide Stralenbüschel gleichläufig, und dass je zwei verwandte Winkel einander gleich sind; der Kreis kann demnach nur eine Specialität jener Linien sein, welche überhaupt durch die Schnittpunkte der verwandten Stralen zweier beliebiger projectivisch proportionaler Stralenbüschel entstehen, folglich müssen auch die projectivischen Eigenschaften des Kreises in allen Linien vorhanden sein, welche nach denselben projectivischen Gesetzen, wie der Kreis entstehen.

436. Linien von dieser Entstehungsweise (435) sind Linien der II. Ordnung oder auch Punktgebilde der II. Ordnung (389).

Fig. 42.



Sucht man zu einem Kreise irgend eine Collinear-Projection, so erhält man eine Linie der II. Ordnung; denn wählt man im Kreise irgend zwei Periferie-Stralenbüschel $S' S''$ (423), so werden ihre Collinear-Projectionen S'_1, S''_1 zwei Stralenbüschel, welche mit S' und S'' projectivisch proportional sind (287), und da S' mit S'' projectivisch proportional ist, so folgt, dass auch der Stralenbüschel S'_1 mit jenem S''_1 projectivisch proportional sein muss; also ist die Collinear-Projection eines Kreises wirklich eine Linie der II. Ordnung.

437. Bei einem Kreise sind alle Periferie-Stralenbüschel (428) projectivisch proportional (430); sucht man eine Collinear-Projection des Kreises, welche immer eine Linie der II. Ordnung ist, so erkennt man auch die Richtigkeit des Satzes:

Bei allen Linien der II. Ordnung sind alle Periferie-Stralenbüschel projectivisch proportional.

438. **Wieviele Periferiepunkte sind erforderlich, um eine Linie der II. Ordnung zu bestimmen?**

Fünf, von welchen keine drei in einer Geraden liegen können, weil auch bei dem Kreise keine drei Periferiepunkte in einer Geraden liegen. Projiciert man in Fig. 42 aus A und C die drei übrigen Punkte B, D und E, so erhält man von den zwei Periferie-Stralenbüscheln drei Paare verwandter Stralen AB, CB; AD, CD und AE, CE und wie wir aus (289) wissen, kann man jetzt zu jedem Strale des einen Büschels A einen und nur einen verwandten Stral im anderen Büschel C construieren. Der Schnitt zweier verwandten Stralen ist ein Periferiepunkt der Curve, folglich kann man aus den gegebenen fünf Punkten noch beliebig viele andere Periferiepunkte ermitteln (439) und diese Schnittpunkte durch eine Linie entsprechend verbinden.

439. **Wie kann man verwandte Stralen in zwei nicht perspectivisch liegenden Stralenbüscheln construieren?**

Ausser der in (289) angeführten Methode noch auf folgende Art:

Nehmen wir an, in Fig. 42 sei der Büschel $A\,(BDE\ldots)$ $\barwedge$ $C\,(BDE\ldots)$, so entspricht dem Stral AB einerseits der Stral CB, anderseits, ebenso dem Stral AD der Stral CD und dem Stral AE der Stral CE. Den Stralenbüschel $A\,(BDE\ldots)$ schneide man mit einem Stral des anderen Büschels, z. B. mit CE, und den Büschel $C\,(BDE\ldots)$ mit dem zu CE verwandten Stral AE des Büschels $A\,(BDE\ldots)$, so entstehen zwei projectivisch proportionale gerade Punktreihen auf den Geraden CE und AE (287). Die erstere Punktreihe besteht zunächst aus den drei Punkten, welchen die Stralen AB, AD, AE auf CE erzeugen, nämlich aus $B'D'E$ und die zweite Punktreihe aus drei Punkten, welche die Stralen CB, CD, CE auf AE erzeugen, nämlich aus $B''D''E$, folglich müssen wir schreiben: $B'D'E\ldots$ $\barwedge$ $B''D''E\ldots$.

Da in diesen zwei projectivisch proportionalen geraden Punktreihen (265) im Punkte E ihrer Träger CE und AE zwei verwandte Punkte zusammenfallen, so folgt, dass beide Punktreihen perspectivisch liegen (277), mithin müssen sich die Geraden $B'B''$,

$D'D''$ im Centrum S der perspectivischen Lage der beiden Punktreihen $B'D'E \ldots \overline{\wedge} B''D''E \ldots$ schneiden.

Jeder Stral durch S erzeugt auf den Trägern CE und AE zwei verwandte Punkte, z. B. F' und F'', mithin sind AF' und CF'' zwei verwandte Stralen der beiden Büschel A $(BDE \ldots)$ und C $(BDE \ldots)$, folglich ist ihr Schnittpunkt F ein Punkt der Linie II. Ordnung, welche durch diese Stralenbüschel bestimmt ist.

Fig. 43.

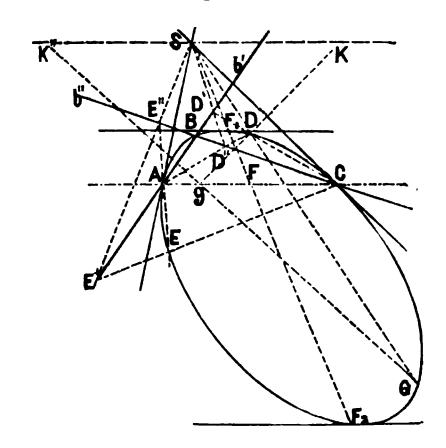
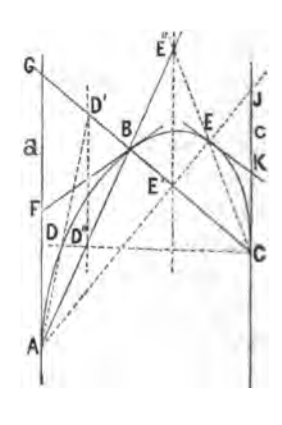


Fig 44.



440. Wenn fünf Periferiepunkte $ABCDE$ einer Linie der II. Ordnung gegeben sind, wie construiert man in einem dieser Punkte, z. B. in A, eine Tangente?

Lässt man die Linie der II. Ordnung nach Fig. 42 aus zwei projectivisch proportionalen Periferie - Stralenbüscheln A $(BDE \ldots)$ und C $(BDE \ldots)$ entstehen, so ist die Tangente a des Punktes A jener Stral des Stralenbüschels A, welcher A mit dem unendlich nahe bei A gelegenen noch unbekannten Periferiepunkt A'' der Linie II. Ordnung verbindet; man pflegt dies so auszusprechen, dass man sagt, die Tangente in A sei jene Gerade, welche A mit A, d. i. A mit sich selbst in der Curve verbindet.

Dem Strale AA des Büschels A entspricht der Stral CA im verwandten Stralenbüschel C, mithin besteht die Aufgabe, in A an die Linie II. Ordnung eine Tangente zu construieren darin, im Stralenbüschel A $(BDE \ldots)$ jenen Stral zu finden, welcher dem Strale CA im Stralenbüschel C $(BDE \ldots)$ verwandt ist.

Zieht man durch das Centrum S einen Stral, welcher auf CE und AE zwei verwandte Punkte $A'A''$ erzeugt, und nimmt man an, dass A'' unendlich nahe bei A sei, so liegt der andere Punkt A' dort, wo SA'' die Gerade CE trifft. Verbindet man diese beiden verwandten Punkte A'' und A' der auf AE und CE liegenden projectivisch proportionalen Punktreihen mit C und A, so entstehen zwei verwandte Stralen CA'' und AA', von welchen letzterer offenbar zur Tangente in A wird, weil er dem Strale CA'' oder was dasselbe bedeutet, dem Strale CA des Büschels $C\,(BDE\ldots)$ verwandt ist, wie es sein soll.

Verbindet man also das Centrum S der perspectivischen Lage von zwei projectivisch proportionalen geraden Punktreihen, welche die beiden Stralenbüschel $A\,(BDE\ldots) \barwedge C\,(BDE\ldots)$ auf zwei verwandten Stralen, z. B. AE und CE, erzeugen, mit A, so ist AS die gesuchte Tangente in A.

Aus ganz gleichem Grunde ist ebenso SC eine Tangente in C.

441. Man bezeichnet auch bei den Linien der II. Ordnung jeden Schnittpunkt S zweier Tangenten als den Pol der durch die Berührungspunkte A und C gehenden Polaren AC.

442. Alle harmonischen Eigenschaften (§. 18), die zwischen Pol, Polare und Kreis stattfinden, sind in Folge der projectivischen Verwandtschaft auch bei allen Linien der II. Ordnung, ihren Polen und Polaren vorhanden.

443. Welche Construction der Periferiepunkte einer Linie der II. Ordnung wird eine Polar-Construction genannt, und worin besteht dieselbe?

Jene Construction, nach welcher aus zwei Tangenten, ihren Berührungspunkten und aus einem anderen beliebigen Periferiepunkte alle übrigen Periferiepunkte einer Linie II. Ordnung ermittelt werden können, bezeichne man als eine Polar-Construction.

Sind A und C (Fig. 43) die Berührungspunkte der beiden Tangenten AS und CS, und B irgend ein Periferiepunkt, so kennt man von der Linie der II. Ordnung zwei projectivische Periferie-Stralenbüschel, nämlich $A\,(ABC\ldots) \barwedge C\,(ABC\ldots)$, wobei AA mit AS und CC mit CS zusammenfällt.

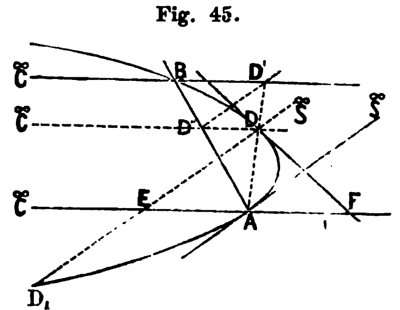
Zieht man $AB = b'$ und $CB = b''$ und einen beliebigen Stral durch S, welcher b' in D' und b'' in D'' schneidet, so sind $D'D''$ zwei verwandte Punkte zweier projectivisch proportionalen

geraden Punktereihen, welche der Stralenbüschel S auf den Geraden b' und b'' erzeugt (286), folglich sind auch die Stralenbüschel, welche aus C und A diese Punktereihen projicieren, projectivisch proportional, mithin bestimmen sie eine Linie der II. Ordnung. Der Stral CD' ist dem Stral AD'' verwandt, folglich ist der Schnitt D von CD' mit AD'' ein Periferiepunkt der Linie II. Ordnung.

444. **Welche specielle Fälle können bei der Polar-Construction einer Linie der II. Ordnung eintreten?**

In Fig. 44 liegt der Schnittpunkt S der beiden Tangenten a und c im Unendlichen, d. h. es sind von der Linie der II. Ordnung zwei parallele Tangenten gegeben. Der Periferiepunkt B liege zwischen a und c; die Construction liefert dann keinen unendlich fernen Punkt, folglich wird die Curve eine Ellipse. Die Construction der Punkte D und E ist selbstverständlich (443).

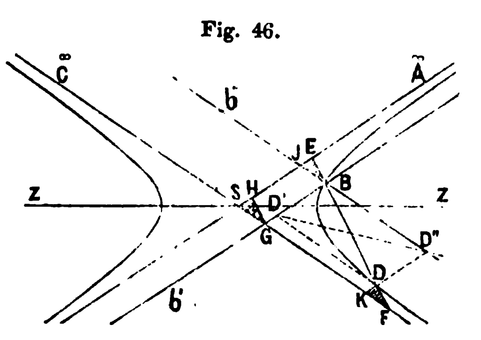
Fig. 45.



445. **Wie construiert man eine Tangente in B Fig. 44?**

Der in §. 18 Anfangs aufgestellte Satz (359) gilt für alle Linien der II. Ordnung, mithin müssen die Stralen BA, BF, BG und BS einen harmonischen Stralenbüschel bilden. Da a zu dem Strale BS parallel, so ist $AFGS$ eine harmonische Punktreihe, folglich $AF = FG$ (301).

Fig. 46.



Halbiert man demnach AG in F, so ist BF die Tangente des Punktes B. Verlängert man AE bis c und halbiert CJ in K, so ist ebenfalls EK die Tangente des Punktes E.

446. Von den übrigen denkbaren Fällen ist ein Fall in Fig. 45 gegeben. Daselbst liegen S und C im Unendlichen. Die Lage des unendlich fernen Punktes $\overset{\infty}{C}$ (lese C Unendlich) wird durch eine gerade Linie angegeben, in der $\overset{\infty}{C}$ liegt. Verbindet man A und $\overset{\infty}{C}$

mit B, so wird letztere Gerade zu $A\overset{\infty}{C}$ parallel. Zieht man durch $\overset{\infty}{S}$ einen Stral, so wird dieser zu $A\overset{\infty}{S}$ parallel und bestimmt auf AB und $\overset{\infty}{C}B$ die Punkte $D''D'$ und durch die Geraden AD' und $\overset{\infty}{C}D''$ ergibt sich der Periferiepunkt D (443).

Die Gerade $A\overset{\infty}{C}$ ist ein Durchmesser, der Punkt $\overset{\infty}{S}$ ihr Pol; die Gerade $A\overset{\infty}{C}$ halbiert demnach alle mit $A\overset{\infty}{S}$ parallelen Sehnen (417), wodurch sich D_1 ergibt.

Die Curve ist eine Parabel, weil ihr Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

447. Wie construiert man die Tangente eines Punktes D der Parabel?

Der Stralenbüschel aus den Stralen $D\overset{\infty}{C}$, $D\overset{\infty}{S}$, DA und der Tangente DF ist nach (445) ein harmonischer; die Gerade $A\overset{\infty}{C}$ ist zu $D\overset{\infty}{C}$ parallel, mithin ist $\overset{\infty}{C}EAF$ als Schnitt eines harmonischen Büschels eine harmonische Reihe und desshalb $EA = AF$ (301). Zieht man sonach bei einer Parabel durch einen Punkt D eine Parallele zu der Tangente am Endpunkt eines Durchmessers $A\overset{\infty}{C}$, und trägt das Stück AE des Durchmessers zwischen dieser Parallelen und dem Punkte A entgegengesetzt auf dem Durchmesser auf, so erhält man einen Punkt F der Tangente und kann diese nun gezogen werden.

448. In Fig. 46 liegen die beiden Berührungspunkte A und C im Unendlichen, mithin wird die Curve eine Hyperbel; der Punkt S ist der Pol der unendlich fernen Polaren.

Die Construction eines Periferiepunktes D geschieht wie vorhin (443); man zieht nämlich durch den gegebenen Periferiepunkt B nach $\overset{\infty}{A}$ und $\overset{\infty}{C}$ hin zwei Gerade, die wie in Fig. 43 mit b' und b'' zu bezeichnen sein werden. Sodann zieht man durch S einen Stral, welcher auf diesen Geraden die verwandten Punkte D' und D'' erzeugt und verbindet $\overset{\infty}{A}$ mit D'' und $\overset{\infty}{C}$ mit D', so entstehen zwei verwandte Stralen der Stralenbüschel $\overset{\infty}{A}$ und $\overset{\infty}{C}$, folglich ist ihr Schnittpunkt D ein Periferiepunkt der Hyperbel.

449. Welche Eigenschaft besitzt eine jede Hyperbelsehne.

Die Abschnitte auf ihr zwischen den Periferiepunkten der Hyperbel und den Asymptoten sind einander gleich.

Beweis. Es sei in Fig. 46 BD eine Hyperbelsehne.

In Folge der Construction des Punktes D ergibt sich ein Parallelogramm mit der Diagonale SD' (in der Figur fehlt HD'

und SD') und ein Parallelogramm mit der Diagonale $D''D'$. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $SHD' \sim \triangle D''BD'$ und $\triangle SGD' \sim \triangle D''DD'$ folgt die Aehnlichkeit der Parallelogramme $SHD'G$ und $D''BD'D$, mithin muss auch $\triangle SHG \sim \triangle D'BD$ sein, woraus sich ergibt, dass HG mit BD parallel ist. Hieraus folgt nun weiter $BE = GH$ und $FD = GH$, somit ist auch $BE = FD$ w. z. b. w.

Wir kennen somit folgende

450. Construction der Hyperbel aus ihren Asymptoten und einem Periferiepunkt.

Man zieht durch den Periferiepunkt B eine beliebige Gerade EF von einer Asymptote zur andern; macht man $FD = BF$, so ist D ein Punkt der Hyperbel. Dieses Verfahren wiederholt man so oft, als es erforderlich ist, indem man durch B andere Gerade zieht, wobei man auch neugefundene Punkte zur Controle der Genauigkeit benützen kann.

Die eine den Asymptotenwinkel halbierende Gerade SZ, wird die Axe der Hyperbel genannt.

Die Gesetze der Reciprocität. Einige Eigenschaften der Linien II. Ordnung.

§. 23.

451. Welche Elemente nennt man reciprok?

Bei ebenen Gebilden nennt man den Punkt und die gerade Linie reciproke Elemente.

452. Wann bezeichnet man einen Stralenbüschel als einer geraden Punktreihe reciprok, oder umgekehrt die gerade Punktreihe dem Stralenbüschel reciprok?

Wenn beide Gebilde projectivisch proportional sind (338). Ist also ein Stralenbüschel einer geraden Punktreihe reciprok, so gehört zu jedem Stral des Büschels jener Punkt in der Geraden, welcher sich bei der Aufstellung der projectivischen Proportionalität auf den Stral bezieht. Zwei reciproke einander entsprechende Elemente in zwei reciproken Gebilden werden ebenfalls verwandte Elemente genannt.

453. Was versteht man unter reciproken ebenen Gebilden?

Zwei ebene Gebilde von der Beschaffenheit, dass jeder geraden Punktreihe (oder jedem Stralenbüschel) des einen Gebildes, im anderen Gebilde ein projectivisch pro-

portionaler Stralenbüschel (oder eine projectivisch proportionale gerade Punktreihe) entspricht.

454. Wodurch pflegt man am leichtesten zwei reciproke ebene Systeme zu bestimmen?

Durch ein Viereck und ein Vierseit. Es nehme sich der Lernende auf einem ebenen Blatt I vier beliebige Punkte *ABCD* an, von welchen keine drei in einer geraden Linie liegen. Auf einem ebenen Blatte II ziehe er vier beliebige gerade Linien, von welchen keine drei sich in einem Punkte schneiden, und sage, es soll jede dieser vier Geraden einem der vier Punkte auf Blatt I als reciprok verwandt zugewiesen werden. Es wird gut sein, die dem Punkte *A* verwandte Gerade ebenfalls mit *A*, die dem Punkte *B* verwandte Gerade ebenfalls mit *B* u. s. w. zu bezeichnen.

Verbindet man in Blatt I *A* mit *B* durch eine Gerade *a*, so muss man in Blatt II die Verbindung von *A* mit *B* ebenfalls mit *a* bezeichnen. Der Lernende bemerkt, dass man den Schnittpunkt *a* zweier Geraden *A* und *B* ebenfalls als eine Verbindung der beiden Geraden bezeichnet.

Setzt man in den Blättern I und II die Verbindungen der Punkte und Geraden fort, so sieht man ein, dass jedem Punkte auf Blatt II eine Gerade in I und umgekehrt, jeder Geraden auf Blatt II auch ein Punkt auf Blatt I als verwandt entspricht.

455. Ein vollständiges Viereck mit den Ecken *ABCD* in Blatt I besitzt sechs Seiten, nämlich *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*; ein vollständiges Vierseit mit den Seiten *ABCD* in Blatt II besitzt demnach sechs Ecken, nämlich *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD* und *CD*.

456. Ein jedes vollständiges Viereck I besitzt drei Diagonalpunkte, deren jeder durch die Verbindung von zwei Gegenseiten gebildet wird; ein jedes vollständiges Vierseit in II besitzt drei Diagonalen, deren jede durch die Verbindung von zwei Gegenecken entsteht.

457. Ein jedes vollständige Viereck I besitzt drei Diagonalen, deren jede durch die Verbindung von zwei Diagonalpunkten entsteht; ein jedes vollständige Viereck in II besitzt drei Diagonalpunkte, deren jeder durch die Verbindung von zwei Diagonalen erhalten wird.

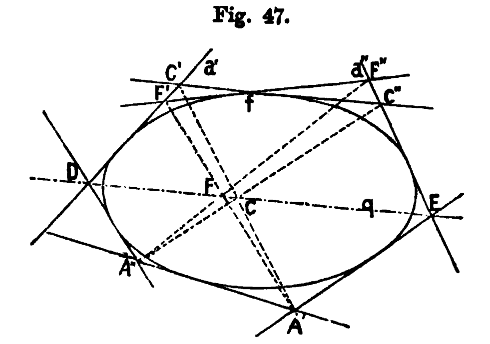
458. Zieht man in einem vollständigen Vierecke die drei Diagonalen, so wird jede der sechs Seiten und drei Diagonalen der

Träger einer harmonischen Punktreihe (308); markiert man in einem vollständigen Vierseite die drei Diagonalpunkte, so wird jeder der sechs Eckpunkte und der drei Diagonalpunkte zum Scheitel eines harmonischen Stralenbüschels. Die Richtigkeit des letzteren Satzes ist sofort klar, da man in der Figur auf Blatt II ein Viereck mit den bekannten harmonischen Punktreihen erkennt; aus den harmonischen Punktreihen erkennt man auch die harmonischen Stralenbüschel, von welchen der zweite Satz (458) spricht.

459. Wie construirt man in einem Vierseite $ABCD$ des Blattes II die einem beliebigen Punkte E entsprechende Gerade E, wenn Punkt E auf Blatt I liegt, in welchem sich Viereck $ABCD$ befindet?

In Blatt I ist A $(BCDE)$ ein Stralenbüschel, in Blatt II aber eine gerade Punktreihe. In Folge dessen, dass Viereck und Vierseit reciprok verwandt sein sollen, müssen den Stralen AB, AC, AD, AE auf Blatt I, in Blatt II die Punkte AB, AC, AD entsprechen. Der unbekannte Punkt AE wird in der Geraden A dadurch gefunden, dass man eben sagt, der Stralenbüschel A $(BCDE)$ in I soll der geraden Punktreihe A $(BCDE)$ in II projectivisch proportional sein; construiert man auf bekannte Art (278) diesen vierten Punkt AE, so kennt man von der auf Blatt II zu suchenden Geraden E ihren Schnitt mit der Geraden A.

Fig. 47.



In Blatt I ist B $(ACDE)$ ein Stralenbüschel, welcher mit der geraden Punktreihe B $(ACDE)$ auf Blatt II projectivisch proportional sein muss. Da man vom Stralenbüschel B $(ACDE)$ alle vier Stralen, von der geraden Punktreihe B $(ACDE)$ des Blattes II nur die drei Punkte BA, BC, BD kennt, so kann man in Folge der projectivischen Proportionalität den Punkt BE construieren. Da man nun die Schnitte der unbekannten Geraden E mit den Geraden A und B ermittelt hat, so kann man jetzt E ziehen.

460. Man sieht nun ein, dass es möglich ist, zu jedem Punkte E des Blattes I eine und nur eine Gerade E im Blatte II als reciprokes Element zu construieren.

461. Zieht man dann einen Stral m in Blatt I durch den Punkt E, so wird man in Blatt II einen verwandten Punkt m finden, welcher in der Geraden E liegt.

462. Dreht sich demnach ein Stral m um einen in ihn liegenden Punkt E in Blatt I weiter, so muss der dem Strale entsprechende Punkt m in Blatt II in der Geraden E sich weiter bewegen und eine zum Stralenbüschel E projectivisch proportionale gerade Punktreihe beschreiben.

Die Erkenntnis der Richtigkeit dieses Satzes ist für die weiteren Studien der reciproken projectivischen Eigenschaften von der höchsten Bedeutung.

463. Wie erzeugt man zu den Linien der II. Ordnung reciproke Gebilde?

Eine Linie der II. Ordnung entsteht durch die Verbindung der verwandten Stralen zweier projectivisch proportionaler Stralenbüschel, folglich entstehen die Stralen-Gebilde der II. Ordnung durch die Verbindung der verwandten Punkte zweier projectivisch proportionaler gerader Punktereihen, die in einer Ebene aber nicht perspectivisch liegen (279.)

464. Fig. 47 zeigt eine Construction eines Stralengebildes der II. Ordnung in folgender Weise: q ist eine Gerade als Träger einer Punktreihe, welche aus dem Punkte A' auf die Gerade a' und aus A'' auf die Gerade a'' projiciert wird. Die beiden auf a' und a'' entstehenden Punktreihen sind nun projectivisch proportional, folglich ist jede Gerade, welche zwei Punkte wie C' und C'' oder F' und F'', die von einem Punkte C oder F der Geraden q herstammen, verbindet, ein Element des Stralengebildes der II. Ordnung.

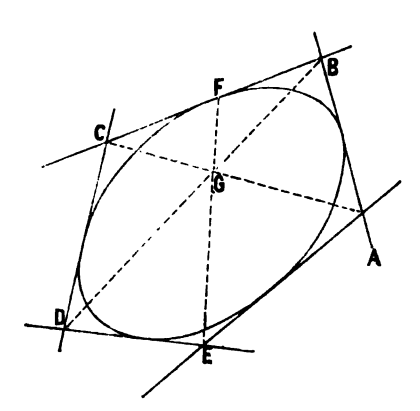
465. Ist F ein unendlich naher Punkt bei C, so sind beziehungsweise F' und F'' unendlich nahe bei C' und C'', folglich schliesst der Stral $F'F''$ mit $C'C''$ einen unendlich kleinen Winkel ein.

466. Construiert man alle unendlich vielen Stralen des Stralengebildes II. Ordnung, so bilden sie Tangenten einer Linie. Der Schnittpunkt zweier unendlich nahen Stralen kann als Be-

rührungspunkt der beiden Stralen mit der Curve angesehen werden.

467. Der Lernende wolle nachdenken, wo in der Geraden q der Punkt C angenommen werden müsste, damit die Gerade $C'C''$ mit der Geraden $A'A''$ zusammenfällt. Auch wolle er zeigen, dass dem C eine solche Lage in q gegeben werden kann, dass die Gerade $C'C''$ entweder mit a' oder mit a'', oder mit $A''D$ oder endlich mit $A'E$ zusammenfällt.

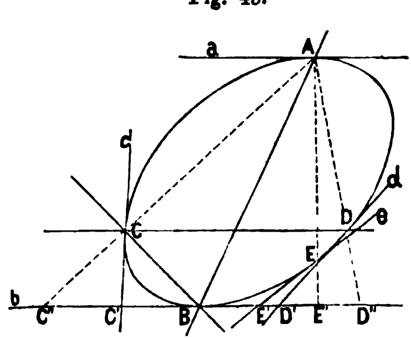
Fig. 48.



Es sind also die 6 Geraden $A'A''$, $A''D$, DF', $F'F''$, $F''E$, EA' Tangenten an die von dem Stralenbüschel II. Ordnung umhüllte Curve, und wie wir sehen, es schneiden sich die drei Diagonalen $A''F''$, DE und $F'A'$, welche gegenüber liegende Ecken dieses Sechsseites verbinden, in einem einzigen Punkte F, folglich kann man sagen:

468. Verbindet man die gegenüberliegenden Ecken eines aus sechs Stralen eines Stralengebildes II. Ordnung gebildeten Sechsseites durch Gerade, so schneiden sich alle drei nur in einem Punkte. (Satz von Brianchon.)

Fig. 49.



Wendet man dieses Ergebnis auf das reciproke Gebilde an, so muss man reciprok lesen wie folgt:

469. Verbindet man die gegenüberliegenden Seiten eines aus sechs Punkten einer Linie der II. Ordnung gebildeten Sechseckes durch Punkte, so liegen alle drei nur in einer Geraden. (Satz von Pascal.)

470. Sind von einem Stralengebilde II. Ordnung 5 Stralen gegeben, so kann man leicht die Stelle bestimmen, wo sie die

von allen Stralen umhüllte Curve berühren. Es seien in Fig. 48 $ABCDE$ die Eckpunkte eines von 5 Tangenten gebildeten Fünfeckes; man soll den Berührungspunkt F bestimmen.

F ist der Schnittpunkt von 2 unendlich nahen Tangenten, folglich $ABFCDE$ ein Sechseck, für welches der Satz von Branchion gilt (468). Verbindet man demnach B mit der gegenüberliegenden Ecke D, und A mit der gegenüberliegenden Ecke C, so schneiden sich beide Gerade in einem Punkte C, durch welche die Diagonale gehen muss, die den Punkt E mit dem unbekannten Punkte F verbindet. Demnach ist nun F gefunden.

471. Der reciproke Satz von Pascal lehrt die Tangenten zu construieren, wenn 5 Periferiepunkte einer Linie der II. Ordnung gegeben sind.

472. **Alle Tangenten einer Linie II. Ordnung erzeugen auf allen Tangenten projectivisch proportionale gerade Punktreihen, und zwar sind immer jene Punkte verwandt, welche von derselben Tangente herrühren.**

Um diesen wichtigen Satz zu beweisen, nehme man in Fig. 49 irgend eine Linie der II. Ordnung an, und ziehe eine beliebige Tangente b, welche in B die Curve berührt. Hierauf denke man sich zu b eine parallele Tangente a gezogen und projiciere alle Periferiepunkte der Curve aus dem Berührungspunkte A auf die Tangente b, so entsteht ein Periferie-Stralenbüschel A und eine in ihm auf der Geraden b liegende gerade Punktreihe (R'' genannt), von welcher C'' ein Punkt ist.

Zieht man durch alle Periferiepunkte Tangenten, so erzeugen diese durch ihre Schnitte mit b auf b eine zweite Punktreihe (R' genannt), welche mit R **geometrisch proportional** ist. Denn nach (359), welcher Satz für alle Linien der II. Ordnung gilt, weil er eine projectivische Eigenschaft ausdrückt, ist AB die Polare des Punktes, in welchem a und b sich schneiden; mithin ist der aus 4 Stralen (359) bestehende Stralenbüschel irgend eines Periferiepunktes C ein **harmonischer**, also ist $BC'C''\infty$ eine halbierte harmonische Punktreihe, folglich ist $C''B = 2.C'B$. Aus gleichem Grunde ist $D''B = 2.D'B$, u. s. w. Mithin ist jede Strecke der Reihe R'' doppelt so gross, wie die verwandte Strecke in R', was ebensoviel bedeutet, als die Reihe R'' ist geometrisch proportional mit der Reihe R'.

Da die Reihe R'' im Stralenbüschel A liegt, so ist R'' mit dem Stralenbüschel A projectivisch proportional, folglich ist der Stralenbüschel A auch mit der Reihe R' projectivisch proportional, d. h.:

473. Projiciert man in einer beliebigen Linie der II. Ordnung aus irgend einem Periferiepunkte A alle übrigen Periferiepunkte, und erzeugt mit allen durch die projicierten Punkte gehenden Tangenten auf der dem Punkte A gegenüberliegenden Tangente b eine gerade Punktreihe, so ist letztere dem Stralenbüschel A projectivisch proportional; Punkt und Stral sind verwandt, welche von demselben Periferiepunkte herrühren. Es ist also der Stral AC dem Punkte C', Stral AD dem Punkte D' verwandt.

474. In jeder Linie der II. Ordnung sind alle Periferie-Stralenbüschel untereinander projectivisch proportional (437), folglich kann man den Satz (473) allgemeiner dahin aussprechen:

Projiciert man alle Periferiepunkte einer Linie der II. Ordnung aus irgend einem Periferiepunkte M, so ist der Stralenbüschel M mit jeder geraden Punktreihe projectivisch proportional, welche die Tangenten der projicierten Punkte auf irgend einer Tangente b erzeugen; dabei sind Stral und Punkt verwandt, welche von demselben Periferiepunkte abstammen. Stral MC verwandt mit C', Stral MD mit D' u. s. w.

475. Da b eine beliebige Tangente ist, so folgt unter Berücksichtigung des Satzes (474) die Richtigkeit des Satzes (472), welcher nun bewiesen ist.

476. Alle unter (472) abgeleiteten Sätze zusammen berechtigen zu dem Ausspruche:

Bei einer jeden Linie der II. Ordnung sind nicht nur die Periferie-Stralenbüschel unter sich und die von den Tangenten auf den Tangenten erzeugten geraden Punktreihen wieder unter sich projectivisch proportional, sondern die Periferie-Stralenbüschel sind auch den Tangenten-Punktreihen projectivisch proportional, wobei immer jene Elemente verwandt sind, welche von demselben Periferiepunkte abstammen.

477. Aus dem Satze (472) folgt, dass, wenn eine gerade Linie die verwandten Punkte zweier projectivisch proportionaler

gerader Punktreihen verbindet, die von den Geraden umhüllte Linie eine Linie der II. Ordnung ist, d. h.:

478. Alle Tangenten einer Linie der II. Ordnung bilden einen Stralenbüschel der II. Ordnung und jeder Stralenbüschel der II. Ordnung umhüllt eine Linie der II. Ordnung.

479. Der Satz (468) von Branchion gilt daher auch für die Linien der II. Ordnung.

480. Was wird geschehen, wenn man bei einer Linie zweiter Ordnung fünf Periferiepunkten die ihnen entsprechenden Tangenten als reciproke Elemente zuordnet?

Es wird jedem anderen Periferiepunkte die durch ihn gehende Tangente als reciprokes Element entsprechen. Nach der bei Fig. 36 befolgten Methode kann man dann zu jedem Punkte A oder C, der entweder ausserhalb oder innerhalb der Curve liegt, seine Polare a oder c construieren, oder umgekehrt zu jeder Geraden a oder c ihren Pol A oder C ermitteln. Pol und Polare sind sonach jene zwei reciproken Elemente, welche einander entsprechen, wenn man jedem Periferiepunkte einer Linie der II. Ordnung seine Tangente als reciprok zuordnet.

481. Die Eigenschaft des Kreises, dass jede durch einen Pol A oder C gehende Sehne durch Pol und Polare harmonisch geteilt wird, ist eine projectivische; desshalb gilt sie auch für alle Linien der II. Ordnung.

482. Was versteht man unter dem Mittelpunkte einer Linie II. Ordnung (410)?

Jenen Punkt O, dessen Polare in unendlicher Entfernung liegt. Jede durch O gehende Sehne wird durch Pol und Polare harmonisch geteilt (363), folglich halbiert der Mittelpunkt O alle durch ihn gehenden Sehnen, weil die vierpunktige Reihe eine halbierte harmonische Punktreihe ist.

483. Wenn man von einem Pole C aus alle Stralen zieht und sodann aus C die Pole aller Stralen projiciert, so entstehen zwei projectivisch proportionale Stralenbüschel in involutorischer Lage (315); denn ist z. B. CA Fig. 36 ein Stral des ersten Büschels, so ist A''' sein Pol, also CA''' der zu CA verwandte Stral im zweiten Stralenbüschel. Betrachtet man aber CA''' als Stral des ersten Büschels, so ist A sein Pol, folglich ist CA der Stral im zweiten Stralenbüschel, welcher dem Strale CA''' des

ersten Büschels entspricht. Da sich also je zwei verwandte Stralen doppelt entsprechen, so ist der Stralenbüschel C involutorisch.

484. Zwei Stralen, von welchen jeder durch den Pol des andern geht, sind conjugierte Stralen genannt worden. So sind CA''' und CA conjugierte Stralen.

485. Jede Polare ist zu jedem durch ihren Pol gehenden Stral conjugiert (376).

486. Liegt der Pol C innerhalb der Curve, so besitzt der involutorische Stralenbüschel keine Ordnungsstralen; liegt C ausserhalb, z. B. in A, so sind die durch A gehenden Tangenten Ordnungsstralen des involutorischen Stralenbüschels A.

487. Kann man in einer Linie II. Ordnung die Punkte perspectivisch paaren?

Jeder Stralenbüschel in der Ebene einer Linie II. Ordnung paart die Curvenpunkte perspectivisch, indem je ein Paar auf einem Strale des Büschels liegt. Fig. 50 zeigt eine solche Paarung bei einem Kreise. Ist z. B. C der Pol und CA ein Stral so sind A und A' zwei perspectivisch gepaarte Punkte.

Fig. 50.

488. Jede Linie der II. Ordnung ist ihre eigene Collinear-Projection für den Modulus — 1. Ist in Fig. 36 c die Polare zu C, ist A' irgend ein Punkt in der Linie der II. Ordnung und der Modulus der Collineation $= -1$ (260), so ist, wenn c die Begegnungsgerade, die Collinear-Projection zu A' offenbar A'', und umgekehrt ist die Collinear-Projection zu A'' der Punkt A'. Da also in jeder Linie II. Ordnung zwei perspectivisch liegende Punkte sich abwechselnd entsprechen (318), so liegen die perspectivisch gepaarten Punkte einer Linie der II. Ordnung involutorisch.

489. Projiciert man aus irgend einem beliebig anzunehmenden Periferiepunkte M alle perspectivisch gepaarten Punkte einer Linie II. Ordnung, so entsteht ein aus zwei projectivisch proportionalen Stralenbüscheln zusammengesetzter Stralenbüschel, dessen Stralenpaare doppelt verwandt sind; mithin ist dieser Stralenbüschel involutorisch.

490. Der in (489) erwähnte involutorische Stralenbüschel besitzt nur dann Ordnungsstralen, wenn das Centrum C der perspectivischen Paarung ausserhalb der Curve liegt.

491. Jeder involutorische Stralenbüschel besitzt entweder nur ein einziges Paar zu einander senkrechter conjugierter Stralen, oder es sind alle Paare aufeinander senkrecht. Denn ist in Fig. 50 K ein beliebiger Kreis, dessen Periferie durch den Scheitel M eines involutorischen Stralenbüschels $aa'.bb'...$ geht, so kann man die Punkte A und A', sowie B und B' als perspectivisch gepaarte Kreispunkte ansehen und durch ihre Verbindung kann man das Centrum C der perspectivischen Paarung finden. Zieht man durch C den Durchmesser QQ', so sind MQ und MQ' die gesuchten zwei rechtwinklig conjugierten Stralen des involutorischen Stralenbüschels.

Besitzt der involutorische Stralenbüschel Ordnungsstralen, so fällt C ausserhalb des Kreises; sonst aber gibt es wieder nur zwei aufeinander senkrechte conjugierte Stralen.

492. Fällt der Punkt C, aus welchem man den Kreis perspectivisch paart, mit dem Kreismittelpunkte O zusammen, dann werden im involutorischen Stralenbüschel alle conjugierten Stralenpaare aufeinander senkrecht.

493. Zieht man durch den Mittelpunkt O zwei conjugierte Stralen (484), die natürlich jetzt conjugierte Durchmesser sind, so geht jeder durch den unendlich fernen Pol des andern, folglich halbiert jeder Durchmesser die zum conjugierten Durchmesser parallelen Sehnen (442, 363, 301).

494. Alle Paare conjugierter Durchmesser einer Linie II. Ordnung bilden einen involutorischen Stralenbüschel, welcher nach (491) nur ein einziges Paar rechtwinklig conjugierter Stralenbüschel besitzen kann, sobald ein Paar conjugierter Stralen vorhanden ist, die nicht aufeinander senkrecht stehen. Nur bei einem Kreise sind alle conjugierten Durchmesser aufeinander senkrecht.

495. Unter den Axen einer Linie II. Ordnung versteht man das einzige (494) Paar aufeinander senkrechter conjugierter Durchmesser.

496. Kennt man zwei Paare conjugierter Durchmesser, so findet man die Axen nach (491).

497. Jener Punkt in der Ebene einer Linie der II. Ordnung, bei dem alle durch ihn gehenden conjugierten Stralen auf-

einander senkrecht stehen, nennt man einen **Brennpunkt**; es gibt deren nur zwei, die in einer Axe der Curve liegen.

498. **Wie construiert man die Brennpunkte?**

Man sucht den Schnitt irgend einer Geraden p der Curvenebene, deren Pol P bekannt ist, und ebenso den Schnitt der von P auf p gefällten Senkrechten q mit jener Axe der Curve II. Ordnung, in welcher diese Schnitte auf verschiedene Seiten vom Mittelpunkte O fallen. Beschreibt man über der Strecke der beiden erwähnten Schnitte als Durchmesser einen Kreis, so schneidet dieser die andere Axe in den Brennpunkten. (Es kann p auch eine Tangente sein, dann ist der Berührungspunkt der Pol P).

499. Jedem Brennpunkte entspricht eine Polare, **Directrix** genannt, für welche durch Betrachtung projectivischer Eigenschaften der Satz folgt:

Das Verhältnis der Abstände eines jeden Periferiepunktes einer Linie II. Ordnung von einem Brennpunkte und seiner Polare (Directrix) ist für jede Linie der II. Ordnung eine constante Grösse.

Bei der Parabel ist der Wert dieses Verhältnisses stets der Einheit gleich. (Hierauf gründet sich eine Construction der Parabel, wenn ihr Brennpunkt und die Directrix gegeben ist. Der zweite Brennpunkt der Parabel liegt im Unendlichen.)

500. Bei der Ellipse folgert man:

Die Summe der Abstände irgend eines Periferiepunktes von den beiden Brennpunkten ist eine constante Grösse, und bei der Hyperbel gilt dies für die Differenz der Abstände.

Auf diesen Eigenschaften beruhen die allbekannten Constructionen der Linien der II. Ordnung, und aus diesen Eigenschaften erkennt man auch, dass die durch die projectivischen Stralenbüschel oder geraden Punktreihen erzeugten Curven II. Ordnung die gewöhnlichen Kegelschnittslinien sind.

Nähere Aufschlüsse findet man in den Werken über neuere Geometrie von Steiner, Staudt, Paulus u. s. w.

Dritter Abschnitt.

Die Elemente der orthogonalen, axonometrischen, schiefen, centralen und collinearen Projectionen.

Eignung der einzelnen Projectionsarten. Versinnlichung der projicierten Gebilde. Deckpunkte.

§. 24.

501. Worin unterscheidet sich das Projicieren im Raume von dem Projicieren in der Ebene?

Bei dem Projicieren in der Ebene liegen das zu projicierende ebene Gebilde und seine Projection in einerlei Ebene, während bei dem Projicieren im Raume ein ebenes Gebilde und seine Projection in verschiedenen Ebenen liegen.

502. Bei dem Projicieren in der Ebene bilden die projicierenden Stralen einen Stralenbüschel, bei dem Projicieren im Raume einen Stralenbündel.

503. Nach welchen Gesetzen wird gewöhnlich im Raume projiciert?

Man projiciert entweder alle zu projicierenden Punkte aus einem Projectionscentrum auf eine Fläche, am einfachsten auf eine Ebene, oder man sucht nach den allgemeinen Projectionsgesetzen (5, 6) Collinear-Projectionen der gegebenen oder gedachten Objecte.

504. Wenn man sich bei dem Projicieren auf eine Ebene an Stelle des Projections-Centrums den optischen Mittelpunkt eines sehenden Auges denkt, als was wird dem Auge die Projection eines Gegenstandes erscheinen?

Sie erscheint ihm als ein Bild des Gegenstandes; desshalb pflegt man häufig statt von Projectionen, von Bildern, statt von Projectionsebenen, von Bildebenen zu sprechen.

505. In welche Arten zerfallen die auf einer Ebene erzeugten Projectionen?

Sie zerfallen in Central- und in Parallel-Projectionen, je nachdem das Projections-Centrum sich in endlicher oder in unendlicher Entfernung vor der Bildebene befindet.

506. In welche Unterabteilungen zerfallen die Parallel-Projectionen?

In orthogonale Projectionen, wenn alle projicierenden Stralen auf der Bildebene senkrecht stehen, und in schiefe Projectionen, wenn die projicierenden Stralen zur Bildebene geneigt sind.

507. Welche Vor- und Nachteile bieten die einzelnen Projectionsarten?

Die orthogonalen Projectionen haben den Vorteil, dass sie im Allgemeinen eine bequemere Auffindung der Dimensionen des dargestellten Gegenstandes gestatten, als die schiefen und centralen Projectionen; die beiden letzteren eignen sich aber besser zur Herstellung von mannigfachen, dem Laien grössere Deutlichkeit gewährenden Abbildungen.

508. Wie versinnlicht man sich die Lage eines Punktes aus seinem Bilde?

Man muss einen fisischen Punkt an die Stelle des geometrischen Punktes setzen (10). Zu diesem Zwecke bringt man den fisischen Punkt, z. B. die Spitze eines Bleistiftes, gegen das projicierende Auge und das Bild so, dass dem Auge Punkt und Bild zusammenzufallen scheinen; jedoch muss der fisische Punkt von seinem Bilde den bestimmten Abstand erhalten.

509. Die Entfernung eines Punktes von seinem Bilde bezeichnen wir als die Ordinate des Punktes (168); diese ist positiv, wenn Punkt und Auge auf einerlei Seite der Bildebene, hingegen negativ, wenn Punkt und Auge auf entgegengesetzten Seiten der Bildebene liegen.

510. Wie wird sich der Zeichner eine Linie oder eine Ebene versinnlichen?

Eine Linie versinnlicht er sich durch einen Drat, noch häufiger aber durch die Bewegung der Bleistift- oder Fingerspitze längs des Ortes, den die Linie im Raume einnehmen soll. Ebenen versinnlicht man sich am gewöhnlichsten mit Zeichen-

papier, ebener Pappe, dünnen Brettchen, wol auch durch die Blätter oder die Deckel eines Buches, durch die gestreckte Handfläche u. s. w. Oft fährt man auch mit der gestreckten Handfläche in entsprechender Weise durch die Luft, um uns die Lage von unbegrenzten Ebenen beiläufig anzugeben und die Orte derselben mittels Gedächtnis und Vorstellungskraft festzuhalten.

511. Welche Punkte nennen wir Deckpunkte?

Je zwei Punkte, welche eine Projection gemeinsam haben.

Zwei oder mehrere Deckpunkte fallen für das projicierende Auge scheinbar in einem Punkte zusammen.

A. Die orthogonalen Projectionen.

Umlegung einer Strecke. Bestimmung ihrer wahren Länge, ihrer Neigung und des Schnittes mit der Bildebene.

§. 25.

512. Was für ein Gebilde ist die orthogonale Projection einer geraden Linie?

Sie ist wieder eine gerade Linie (120), weil alle Stralen, welche die verschiedenen Punkte einer Geraden projicieren, auf der Bildebene senkrecht stehen und demnach in einer sogenannten projicierenden Ebene oder Sehebene liegen.

513. Wie sieht die orthogonale Projection einer Geraden aus, wenn diese auf der Bildebene senkrecht steht?

Sie ist ein Punkt, weil alle projicierenden Stralen der einzelnen Punkte dieser Geraden, mit der Geraden selbst zusammenfallen (121).

514. Was ist die orthogonale Projection einer Strecke?

Sie ist wieder eine Strecke (19), deren Endpunkte die orthogonalen Projectionen von den Endpunkten der Strecke sind.

515. Was für ein Polygon bilden eine Strecke ab, ihre orthogonale Projection $a_1 b_1$ und die Ordinaten aa_1, bb_1 der Endpunkte a und b?

Sie bilden ein Vierseit $aa_1 b_1 b$ mit zwei parallelen Seiten aa_1, bb_1 (Trapez) und zwei rechten Winkeln bei a_1 und b_1. Die parallelen Seiten aa_1 und bb_1 sind die Ordinaten (a_1) und (b_1) der Endpunkte a und b; die Ordinaten (a_1), (b_1) stehen auf der

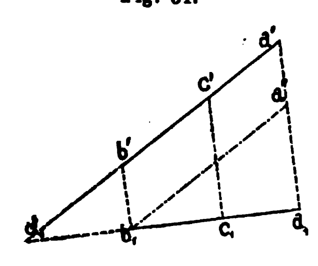
orthogonalen Projection $a_1 b_1$ der Strecke ab senkrecht, folglich liegen an der Projection $a_1 b_1$ die beiden rechten Winkel.

516. Wenn die Zeichnungsebene die Bildebene ist, wie wird man sich dieses Trapez $aa_1 b_1 b$ versinnlichen?

Man wird sich aus steifem ebenen Papier ein Trapez schneiden, bei welchem eine Seite der orthogonalen Projection $a_1 b_1$ der Strecke ab gleich ist; die anstossenden Seiten $a_1 a$ und $b_1 b$ stehen auf $a_1 b_1$ senkrecht und erhalten die Längen der betreffenden Ordinaten (a_1), (b_1); die vierte Seite ab, die sich nun von selbst ergibt, ist nothwendig der wahren Länge der Raumstrecke ab gleich. Dieses Trapez stellt man nun annäherungsweise mit seiner Ebene senkrecht zur Bildebene so auf, auf dass die Ordinaten aa_1, bb_1 der Endpunkte a und b die richtige Lage nahezu, oder wenn möglich, ganz genau einnehmen; dann versinnlicht uns das materielle Trapez $aa_1 b_1 b$ das gedachte Trapez.

517. Der Lernende bemühe sich Anfangs, soviel als möglich nach der in (517) beschriebenen Weise Modelle selbst anzufertigen. Es ist nicht rathsam, dass er sich zu seinen Anfangsstudien anderer Modelle bediene, als derjenigen, die er selbst anfertigte; denn durch das blosse Ansehen nicht selbst erzeugter Modelle wird der Lernende niemals jene Klarheit in der Auffassung erlangen, die ihm zu eigen wird, sobald jeder Punkt und jede Linie des Modelles gewissermassen durch seine Hände gegangen ist.

Fig. 51.



518. Wie kann man das in(516) versinnlichte Raumtrapez $aa_1 b_1 b$ in der Bildebene in wahrer Gestalt zeichnen?

Man behält (Fig. 51) die Projection $a_1 b_1$ als eine dem Raumtrapeze $aa_1 b_1 b$ und dem in der Bildebene zu zeichnenden Trapeze $a' a_1 b_1 b'$ gemeinsame Seite bei, und zeichnet $a' a_1 b_1 b'$ congruent mit dem Raumtrapeze $aa_1 b_1 b$. Es ist sodann $a'a_1 = aa_1 = (a_1)$, $b'b_1 = bb_1 = (b_1)$, $a'a_1 \perp a_1 b_1$ und $b'b_1 \perp a_1 b_1$; folglich ist $a'b'$ gleich der wahren Länge der Raumgeraden ab.

519. Das Trapez $a' a_1 b_1 b'$ bezeichnet man als die Umlegung es Raumtrapezes $aa_1 b_1 b$ um die Projection $a_1 b_1$ und von der

Geraden ab sagt man, sie wurde um ihre Projection $a_1 b_1$ in die Bildebene umgelegt.

Zieht man in der umgelegten Figur durch alle Punkte von $a' b'$ Senkrechte auf die Projection $a_1 b_1$, so wird die ganze Fläche $a' a_1 b_1 b'$ mit Ordinaten, deren eine z. B. $c' c_1$ ist, ausgefüllt. Man kann daher mit Rücksicht auf diese Eigenschaft die Fig. $a' a_1 b_1 b'$ die Ordinatenfläche der Strecke ab nennen; sie ist der zur Bildebene senkrechten Ordinatenfläche $a a_1 b_1 b$ congruent.

520. Wie kann man nach projectivischen Gesetzen zu der Ordinatenfläche $a' a_1 b_1 b'$ einer Strecke ab gelangen?

Wenn der Lernende in Fig. 51 den Punkt a der Geraden ab des Raumes mit a', den Punkt b mit b', überhaupt jeden Punkt des Raumtrapezes $a a_1 b_1 b$ mit der Umlegung des Punktes verbindet, so sieht er ein, dass $a a' a_1$, ebenso $b b' b_1$ u. s. w. rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke in parallelen Ebenen sind, woraus folgt, dass aa' zu bb' parallel läuft. Der Lernende muss erkennen, dass jede Gerade, die durch irgend einen Punkt c der Raumgeraden ab parallel zu aa' gezogen wird, durch die Umlegung des Punktes c' gehen wird und hieraus kann er folgern, dass eine jede Umlegung $a' a_1 b_1 b'$ eines Raumtrapezes $a a_1 b_1 b$ in die Bildebene, auch als eine Congruenz - Projection des Raumtrapezes angesehen werden kann.

521. Wie findet man die wahre Länge einer Strecke ab, wenn man ihre orthogonale Projection $a_1 b_1$ und die Ordinaten (a_1), (b_1) ihrer Endpunkte a und b kennt?

Eine Methode entnimmt man aus (518), indem man die Ordinatenfläche über $a_1 b_1$ zeichnet; man kann jedoch eine andere Art, die wahre Länge von ab zu bestimmen, daraus ableiten, eine Art, welche in der Praxis häufig angewendet wird. Sie besteht in Folgendem: Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die orthogonale Projection $a_1 b_1$ der Strecke ab eine Kathete, die Differenz der ersten Ordinaten (a_1) und (b_1), d. i. $(a_1) - (b_1)$ die zweite Kathete ist. Die Hypothenuse ist gleich der wahren Länge der Strecke ab.

Zieht der Lernende in dem zur Versinnlichung in (517) angefertigten Raumtrapeze durch den Punkt b_1 eine Parallele zu ab, so erhält er ein Dreieck mit den Katheten $a_1 b_1$ und $(a_1) - (b_1)$, aus welchem die Wahrheit der aufgestellten Methode folgt.

522. Betrachtet man alle in dem Dreiecke $a'' a_1 b_1$ liegenden Ordinatenteile, so bemerkt man, dass sämmtliche Ordinaten der Ordinatenfläche um die Ordinate (b_1), d. i. um $b' b_1$ vermindert, die Ordinatenteile des Dreieckes $a'' a_1 b_1$ geben. Aus dieser Ursache soll das rechtwinklige Dreieck $a'' a_1 b_1$ das Differenzendreieck der Strecke ab genannt werden.

Sucht man demnach zu einer Strecke ab ihr Differenzendreieck, so ist die Hypothenuse gleich der wahren Länge von ab.

523. Der Lernende entwerfe sich selbst eine neue Figur, in welcher $a_1 b_1$ die orthogonale Projection einer Strecke ab, die Ordinate (a_1) positiv, (b_1) hingegen negativ ist. Er construiere sich aus Pappe die Ordinatenfläche, d. i. $a a_1 b_1 b$, wobei er finden wird, dass die beiden nicht parallelen Seiten $a_1 b_1$ und ab sich schneiden, dass also das Raumtrapez nicht die gewöhnliche Gestalt wie in (516) besitzt, was daher kommt, weil ein Teil des Trapezes über, der andere Teil unter der Bildebene liegen muss.

Sucht man die wahre Länge der Seite ab nach (521), so wird $(a_1) - (b_1)$ grafisch zu summiren sein, weil (b_1) eine negative Grösse ist.

Der Lernende wolle sich an weiteren Beispielen einüben, in welchen er die Strecke nicht mit a und b, sondern mit anderen Buchstaben, z. B. $m\, n$ oder dgl. bezeichnet.

524. Wie findet man die Neigung einer Geraden gegen die Bildebene?

Der Winkel, den die Umlegung einer Geraden mit ihrer orthogonalen Projection einschliesst, ist der Neigung der Geraden gegen jene Bildebene gleich, in welcher die Umlegung gezeichnet wurde (129). In Fig. 51 ist die Neigung der Raumgeraden ab gegen die Zeichnungsebene gleich dem von $a' b'$ mit $a_1 b_1$ gebildeten Winkel, also auch $= \measuredangle a'' b_1 a_1$.

525. Wie findet man die Ordinate (c_1) eines Punktes c einer Geraden ab, wenn man die Projectionen $a_1 b_1 c_1$ der Punkte abc, sowie (a_1) und (b_1) kennt?

Man zeichnet sich die Ordinatenfläche der Geraden ab, zieht $c_1 c'$ senkrecht zu $a_1 b_1$, dann ist $(c_1) = c' c_1$ die Ordinate des Punktes c.

526. Wie findet man den Durchschnitt einer Geraden mit der Bildebene?

Sucht man jenen Punkt der Geraden, dessen Ordinate gleich Null ist, so ist er der Durchschnitt der Geraden mit

der Bildebene; er ist daher jener Punkt d_1, in welchem die Umlegung der Geraden ab ihre orthogonale Projection $a_1 b_1$ schneidet.

527. Wie wird man eine Curve projicieren?

Um diese Frage mit Verständnis zu beantworten, schneide sich der Lernende zuerst aus steifem Papier irgend eine Curve heraus und markiere in der Reihenfolge mehrere beliebig gewählte Punkte, zu welchen er auf dem Papiere die Buchstaben $a, b, c, \ldots$ hinzusetzt. Sodann halte er die Ebene der Curve in geneigter Lage zur Bildebene und denke sich alle Punkte $abcd\ldots$ auf die Bildebene nach $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ projiciert, so ist klar, dass die Projection der Curve $abcd$ durch die Projectionen $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ ihrer Punkte hindurch gehen muss; folglich projiciert man eine Curve, wenn man ihre einzelnen Punkte projiciert. Die Projection einer Curve wird wieder eine Curve; beide Curven sind durch eine gekrümmte Ordinatenfläche verbunden. Ist die Ebene einer Curve zu den projicierenden Stralen parallel, so wird die Projection der Curve eine Gerade, die Ordinatenfläche eine Ebene.

528. Als was erscheint die Projection einer Curventangente (22)?

Als Tangente an die Projection der Curve.

Um dies einzusehen, schneide sich der Lernende eine Curve aus, lasse aber einen schmalen Papierstreifen als Tangente an die Curve daran, und nun bringe er die Curve in eine zur Bildebene geneigte Lage. Projiciert man das Berührungselement, so liegt dessen Projection sowol in der Projection der Tangente, als auch in der Projection der Curve, folglich muss, weil die Projection der Tangente mit der Projection der Curve ein Linienelement gemein besitzt, die Projection der Tangente eine Tangente an die Projection der Curve sein (22).

529. Welche Curven nennt man gewunden?

Alle jene Curven, deren Punkte nicht in einer und derselben Ebene liegen. Biegt man einen Drat zu einer Curve derart, dass es unmöglich ist, ihn nach der ganzen Länge berührend auf eine ebene Platte zu legen, so stellt der Drat eine gewundene Curve vor.

530. Wann besitzt eine Curve ein Eck?

Wenn sie einen Punkt besitzt, dessen zwei Tangenten einen messbaren Winkel einschliessen. Der Lernende versinnliche

sich Curven mit Ecken und versuche die Projectionen solcher Curven darzustellen.

Projectionen der Punkte auf zugeordneten Bildebenen. Die Ordinatengesetze.

§. 26.

531. Was verstehen wir unter zugeordneten Projections- oder Bildebenen, und was unter zugeordneten Projectionen oder Bildern?

Wenn zwei Bildebenen aufeinander senkrecht stehen (86), so bezeichnen wir sie als einander zugeordnet, und wenn man auf beiden die orthogonalen Projectionen eines Gebildes bestimmt, so werden diese als zugeordnete Projectionen bezeichnet (175). Die Durchschnittsgerade von zwei zugeordneten Bildebenen wird Projections- oder Bildaxe genannt.

532. Wenn mehrere Projectionsebenen angewendet werden, wie werden wir diese Ebenen, die Bildaxen und die orthogonalen Projectionen bezeichnen?

Wir bezeichnen jede Bildebene mit einer römischen Ziffer, die Bildaxe mit X, dem unten rechts und links die Ziffern jener Bildebenen als Zeiger beigesetzt werden, welche sich in der Bildaxe schneiden. Die Projectionen erhalten die Ziffern der Bildebene in arabischer Form als Zeiger. Es bedeutet daher ${}_1X_2$ die Durchschnittsgerade der zugeordneten Bildebenen I und II, a_1 die orthogonale Projection eines Punktes a auf der Bildebene I, a_2 ein orthogonales Bild desselben Punktes auf der Bildebene II, u. s. w.

533. Die Ordinate eines Punktes, d. i. die Entfernung eines Punktes von seinem orthogonalen Bilde wollen wir wie in (168) oder in Fig. 7 bezeichnen. Demnach bedeutet (a_1) die Entfernung eines Punktes a von seinem ersten Bilde, (a_3) die Entfernung vom dritten Bilde u. s. w.

534. Um sich die Lage von Punkten des Raumes gegen zwei zugeordnete Bildebenen I und II versinnlichen zu können, fertige sich der Lernende ein Modell in folgender Weise an: Zuerst stelle er zwei Ebenen I und II aus Pappe auf einander senkrecht; sodann zeichne er sich eine Ebene E nach Fig. 7 und stelle sie nach entsprechend erfolgten Einschnitten senkrecht zur Axe ${}_1X_2$ (96) derart, dass der Punkt O in die Axe ${}_1X_2$, die Gerade

I in die Bildebene I, folglich die Gerade II in die Bildebene II zu liegen kommt; ausserdem erfülle man noch die Bedingung, dass die in Fig. 7 gezeichneten Sehpfeile I und II jene Lage erhalten, in welchen sie die Richtungen angeben, nach welchen man auf die Bildebenen I und II projiciert. In dieser Stellung erkennt man ganz klar die positive oder negative Lage der Raumpunkte $abcd\ldots$ gegen die Bildebenen I und II.

Man kann das Modell vervollkommenen, wenn man mehrere Ebenen $ABC\ldots$ in der Weise wie E zu den Projectionsebenen I und II stellt; in der einen nimmt man den Punkt a, in einer zweiten den Punkt b, in einer dritten den Punkt c, u. s. w. an.

535. Wie weit ist ein Punkt a von einer Bildebene entfernt?

Ebensoweit, wie von seiner orthogonalen Projection auf jener Bildebene. aa_1 oder (a_1) ist also die Entfernung des Punktes a von der Bildebene I.

536. Ist es einerlei, zu sagen: der Punkt a ist von der Bildebene I (oder einer anderen Bildebene) um die Länge l entfernt, oder: der Punkt a ist von seinem ersten Bilde (oder einem anderen orthogonalen Bilde) um l entfernt?

Nein; denn die erste Aussage gibt blos an, dass sich der Punkt a in einer Ebene befinden muss, die in dem Abstande l mit der Bildebene I (oder einer anderen Bildebene) parallel läuft. Wo aber in dieser Ebene der Punkt a liegt, lässt die Aussage ganz unentschieden. Hingegen folgt aus der zweiten Aussage, dass man im Punkte a_1 eine Normale zur Bildebene I errichten (94) und auf ihr die Länge l entweder von a_1 gegen das projicierende Auge hin, oder diesem Sinne entgegengesetzt auftragen muss, je nachdem l positiv oder negativ ist. Die zweite Aussage gibt sonach den Punkt a genau an.

537. Wie werden die Sehpfeile bei zwei zugeordneten Bildebenen eingeführt und angewendet?

Wir ziehen in jeder Bildebene einen Pfeil senkrecht zur Bildaxe, so zwar, dass ein jeder der beiden Pfeile die Richtung des Sehens wie in Fig. 7 angibt, und noch vor der Bildebene liegt, auf welcher er senkrecht steht. Ist dann eine Ordinate, z. B. jene für die Bildebene I oberhalb der Bildebene I, also positiv, so liegen die Ordinate (a_1) und der Sehpfeil I auf einerlei Seite der Bildebene I; liegen hingegen der Sehpfeil I und

eine erste Ordinate auf entgegengesetzten Seiten der Bildebene I, so ist die Ordinate negativ und liegt der Punkt ebenfalls negativ (159). Aehnlich ist die Beurteilung aller übrigen Ordinaten und Sehpfeile.

538. Welche Ordinaten eines Punktes nennt man zugeordnete Ordinaten?

Jene, welche sich auf zwei zugeordnete Bildebenen beziehen. Zwei zugeordnete Ordinaten stehen immer aufeinander senkrecht. So ist z. B. aa_1 senkrecht auf aa_2.

539. Was verstehen wir unter einer Ordinatenebene?

Jede Ebene, welche durch zugeordnete Ordinaten eines Punktes gelegt wird. Eine Ordinatenebene steht immer auf einer Bildaxe senkrecht, weil sie durch zwei Ordinaten geht, deren jede auf einer der beiden zugeordneten Bildebenen senkrecht steht. In dem Modelle zu (534) ist die Ebene E eine Ordinatenebene.

540. Was verstehen wir unter einer Ordinale?

Die beiden Schnittgeraden, in welchen eine Ordinatenebene zwei zugeordnete Bildebenen senkrecht zur Bildaxe durchschneidet. Die beiden Teile einer Ordinale schneiden sich daher stets in der Bildaxe und stehen aufeinander senkrecht. In dem Modelle zu (534) sind die Geraden I und II, in welchen die Ebene E die Bildebenen I und II schneidet, die beiden Teile einer Ordinale.

541. Wenn wir von den Ordinaten eines Punktes die orthogonalen Projectionen auf den zugehörigen zwei Bildebenen suchen, wohin fällt die Projection der ersten und wohin jene der zweiten Ordinate?

Beide Projectionen der Ordinaten fallen in die zugehörige Ordinale; so fällt z. B. in der Ebene E (534) die orthogonale Projection von aa_1 auf der Bildebene II nach $a_2 O$, die orthogonale Projection von aa_2 auf der Bildebene I nach $a_1 O$.

542. Die beiden zugeordneten Ordinaten eines Punktes bilden mit ihren orthogonalen Projectionen ein Rechteck. So ist $aa_1 Oa_2$, ebenso $bb_1 Ob_2$ etc. ein Rechteck.

543. Was verstehen wir unter den Ordinatengesetzen?

Jene Gesetze, welche sich auf die Lage zugeordneter Projectionen und Ordinaten eines Punktes beziehen.

544. Die Ordinatengesetze lauten:

a) Je zwei zugeordnete Projectionen eines Punktes liegen in einer Ordinale;

b) jede Projection ist von der Bildaxe ebensoweit entfernt, wie der Punkt im Raume von der zugeordneten Projection, und

c) die Ordinaten sind positiv, wenn sie mit ihren gleichbezifferten Sehpfeilen auf derselben Seite der Bildaxe sich befinden; im entgegengesetzten Falle nennt man die Ordinaten negativ.

545. Die Richtigkeit des ersten Gesetzes ist sofort einleuchtend. Bei dem zweiten Gesetze sieht man unter Berücksichtigung von (542) ein, dass $a_2\,O$ gleich der ersten Ordinate (a_1) ist, dass also das zweite Bild von der Bildaxe ${}_1X_2$, d. i. von O ebensoweit entfernt ist, wie der Punkt a von seinem ersten Bilde; dass ferner das erste Bild a_1 ebenfalls von ${}_1X_2$, d. i. von O ebensoweit entfernt ist, wie der Punkt a von seinem zweiten Bilde a_2.

546. Wo kann man also die Ordinaten eines Punktes ablesen?

Aus den Abständen seiner Projectionen von der Bildaxe. Die zweite Ordinate wird aus dem ersten Bilde und die erste Ordinate aus dem zweiten Bilde abgelesen; es ist nämlich: $a_1\,O = (a_2)$, $b_1\,O = (b_2)$, $c_1\,O = (c_2)$, ... und $a_2\,O = (a_1)$, $b_2\,O = (b_1)$, $c_2\,O = (c_1)$ u. s. w.

547. Das dritte Ordinatengesetz ist ebenfalls klar. Wenn nämlich nach (537) der Sehpfeil I in der Bildebene II gezeichnet wird, so ist (a_1) positiv, wenn (a_1), d. i. $a_2\,O$ mit dem Sehpfeile I über O, d. i. über ${}_1X_2$ liegt. So ist in (534) (c_1) negativ, weil (c_1), d. i. $c_2\,O$ unter O, also mit dem Sehpfeile I ungleich liegt. In dieser Weise erkennt man $b_1\,O$, d. i. (b_2) als negativ; denn der in der Bildebene I liegende Sehpfeil II und $b_1\,O = (b_2)$ liegen bezüglich O oder bezüglich ${}_1X_2$ einander entgegengesetzt.

548. Die grösste Schwierigkeit für den Lernenden entsteht dadurch, dass die Zeichnungen der beiden in (534) durch ein Modell dargestellten Bildebenen I und II nun in einer Bildebene hergestellt werden sollen, und dass er aus den in einer Ebene vereinigten Zeichnungen auf die Lage der Punkte im Raume schliessen soll.

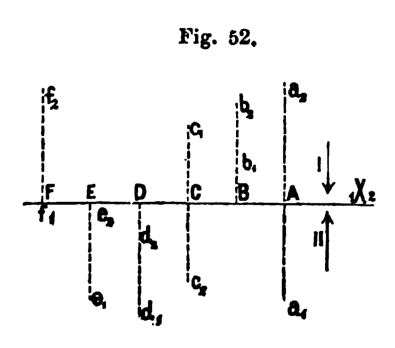
Um diese Schwierigkeiten so gut als möglich zu überwinden, verfertige sich der Lernende selbst ein Modell; er stelle zuerst zwei aufeinander senkrechte Bildebenen I und II so her,

dass beide über die mit $_1X_2$ zu bezeichnende Projections- oder Bildaxe hinaus verlängert erscheinen und so vier Flächenwinkel bilden.

Die eine mit I zu bezeichnende Bildebene stelle er immer horizontal und zeichne in ihr einen zur Bildaxe $_1X_2$ senkrechten Sehpfeil II, aus welchem man erkennt, in welcher Richtung orthognal auf die Bildebene II projiciert wird. Diesen Sehpfeil II zeichne er jedoch nicht hinter, sondern vor der Bildebene II, mit der Pfeilspitze gegen $_1X_2$ gerichtet.

Hierauf zeichnet er in der Bildebene II einen Sehpfeil I nicht unter, sondern über der horizontalen Bildebene I, mit der Pfeilspitze gegen die Axe $_1X_2$ gewendet; alsdann ist genau bezeichnet, in welchen Räumen die Ordinaten positiv oder negativ werden (534).

Fig. 52.



Mit diesen zwei Bildebenen I und II bringe er nach Art der Ebene E von (534) mehrere Ebenen A, B, C, D, E und F als Ordinatenebenen in den Entfernungen, wie es die Punkte A, B, C, ... in Fig. 52 angeben, in Verbindung, und stelle in der Ebene A einen Punkt a so dar, dass seine erste Ordinate (a_1) und auch (a_2) positiv wird; in der Ebene B soll ein Punkt b die erste Ordinate (b_1) positiv, die zweite (b_2) negativ haben; in der Ebene C sei (c_1) negativ, (c_2) negativ; in der Ebene D sei (d_1) negativ, (d_2) positiv; in der Ebene E sei (e_1) gleich Null, (e_2) positiv, und in der Ebene F sei (f_1) positiv, (f_2) gleich Null. Die Längen der von Null verschiedenen Ordinaten können beliebig sein; in beiden Bildebenen sind die Projectionen der Punkte zu bezeichnen.

Auf diese Weise hat der Lernende sechs Raumpunkte a, b, c, d, e und f in eine sichtbare Beziehung zu den Bildebenen I und II gebracht.

Nun nehme der Lernende sein mit Papier bespanntes Zeichnenbrett und zeichne sich wie in Fig. 52 eine Gerade $_1X_2$, welche als Projectionsaxe in der Zeichnung betrachtet wird. An diese Gerade setze er zwei Sehpfeile mit ihren Spitzen gegeneinander gekehrt und bezeichne den oberen mit I, den an-

deren mit II. Hierauf trage er sich auf der Projectionsaxe die Punkte $A, B, C, \ldots$ so auf, dass man aus ihnen erkennen kann, wie weit die durch sie gehenden Ordinatenebenen $A, B, C, D, \ldots$ von einander abstehen, und ziehe Ordinalen, d. h. gerade Linien senkrecht zur Projectionsaxe $_1X_2$.

549. Ist dies geschehen, so nehme er die erste Ordinate (a_1) in den Zirkel und trage sie auf der Ordinale durch A in der Zeichnungsebene auf. Der Lernende wird im Zweifel sein, ob er die (a_1) von A aus auf der Ordinale nach der Seite hin, wo der Sehpfeil I liegt, oder nach der Seite hin auftragen soll, wo der Sehpfeil II steht. Um diesen Zweifel ein für allemal zu beheben, befolge er stets den Grundsatz, dass die erste Ordinate von der Axe aus auf der Seite des Sehpfeiles I aufgetragen wird, wenn sie positiv, und auf der dem Sehpfeile I entgegengesetzten Seite, wenn sie negativ ist. Man muss also immer die erste Ordinate mit dem ersten Sehpfeil vergleichen.

550. Sobald nun die erste Ordinate (a_1) aufgetragen, muss man den gefundenen Punkt bezeichnen. Im Modelle sieht man, dass in der Bildebene II die Entfernung des Bildes a_2 von der Axe $_1X_2$ gleich (a_1), d. i. gleich dem Abstande des Punktes a von dem zu a_2 zugeordneten Bilde a_1 ist, mithin muss man den in der Zeichnung gefundenen Punkt mit a_2 bezeichnen.

Wir sehen also ein, dass wir mittels der ersten Ordinate (a_1) das zugeordnete Bild a_2 finden (höchst wichtig).

551. Nun ergreife man mit dem Zirkel die zweite Ordinate (a_2) und trage sie ebenfalls in der Zeichnung auf der durch A gehenden Ordinale auf.

Die zweite Ordinate wird mit dem zweiten Sehpfeile II verglichen; ist die zweite Ordinate positiv, so wird sie mit dem Sehpfeile II auf gleicher Seite von $_1X_2$ aufgetragen, ist sie negativ, so trägt man sie auf der dem Sehpfeile II entgegengesetzten Seite auf.

552. Im Modelle ist die Entfernung des ersten Bildes a_1 von der Bildaxe $_1X_2$ gleich der zweiten Ordinate (a_2), folglich muss man den durch das Auftragen der zweiten Ordinate in der Ordinale gefundenen Punkt mit a_1 bezeichnen.

Man findet also mittels der zweiten Ordinate (a_2) das zugeordnete Bild a_1 (vergleiche 550).

553. Der Lernende trage nun auf den übrigen Ordinalen die Ordinaten (b_1) (b_2), (c_1) (c_2),... der anderen Punkte b, c,... nach den gegebenen Grundsätzen auf, und beobachte das Gesetz der Bezeichnung der gefundenen Punkte (550, 552), so hat er anstandslos und mit Sicherheit die Zeichnungen der Bildebenen I und II des Modelles auf der Zeichnungsebene seines Reissbrettes gesetzmässig vereinigt.

554. Zerlegt der Lernende sein Modell und legt die Bildebene I auf die Zeichnungsebene, so wird er einsehen, dass die Lage so eingerichtet werden kann, dass die mit den Zeigern 1 versehenen Punkte a_1 b_1 ... der Bildebene I genau mit den entsprechenden Punkten a_1 b_1 ...auf der Zeichnungsebene zusammenfallen müssen.

Ganz in gleicher Weise kann man auch die Zeichnung der Bildebene II mit der mit den Zeigern 2 versehenen Zeichnung auf der Zeichnungsebene zur Deckung bringen.

555. Gerade so wie es möglich ist, aus dem Modelle eine Zeichnung anzufertigen, kann man wieder umgekehrt aus der Zeichnung das Modell construieren.

Denn man kann aus einer Zeichnung, wie sie Fig. 52 zeigt, die Entfernungen der Ordinatenebenen voneinander und die Ordinaten der Punkte sammt ihren Vorzeichen entnehmen.

556. Es ist gut die Gesetze, nach welchen zwei orthogonale Projectionen auf zwei zu einander senkrechten Bildebenen, in einer Zeichnungsebene vereinigt werden, als die bereits bekannten Ordinatengesetze (544) zusammenzufassen, welche nun also lauten:

a) Je zwei zugeordnete Projectionen liegen in einer Ordinale.

b) Jedes Bild eines Punktes ist von der Bildaxe ebensoweit entfernt, wie der Punkt im Raume vom zugeordneten Bilde. (Also gibt die erste Ordinate das zweite Bild, die zweite Ordinate das erste Bild, und umgekehrt: das zweite Bild gibt die erste Ordinate und das erste Bild die zweite Ordinate.)

c) Zwei zugeordnete Sehpfeile erhalten entgegengesetzte Richtungen. Die Ordinaten sind positiv, wenn sie mit ihren Sehpfeilen auf einerlei Seite der Projectionsaxe liegen (547).

557. **Wie kann man mit zwei in einer Zeichnungsebene vereinigten zugeordneten Projectionen das ihnen entsprechende Modell verbinden?**

Die Verbindung des Modelles mit der Zeichnung, d. i. die Versinnlichung der Zeichnung, kann nur in der Vorstellung erfolgen:

a) Zu diesem Behufe denken wir uns die Zeichnungsebene, welche z. B. die Fig. 52 enthält, horizontal gelegt; dann stellt sie die Bildebene I vor. Hierauf versinnlichen wir uns alle Sehstralen, die durch die ersten Projectionen $a_1\, b_1\, c_1 \ldots$ senkrecht zur ersten Bildebene I gehen, und tragen auf ihnen von a_1 oder b_1 oder $c_1 \ldots$ aus die ersten Ordinaten $(a_1), (b_1), (c_1), \ldots$ entsprechend ihren Vorzeichen $+$ oder $-$ auf, wodurch wir in den Sehstralen die Orte finden, wo $a b c \ldots$ liegen. Hiedurch ist ein Teil des Modelles versinnlicht. Der andere Teil ergibt sich durch die Bildebene II, die man sich durch ${}_1X_2$ senkrecht zur Bildebene I so geführt denkt, dass die Geraden, welche a mit a_2, b mit b_2 u. s. w. verbinden, auf der Bildebene II senkrecht stehen.

b) Wenn man die Zeichnungsebene vertical stellt, so versinnlicht sie die Bildebene II des Modelles; dann muss man sich durch alle zweiten Projectionen $a_2\, b_2\, c_2 \ldots$ Sehstralen senkrecht zur Bildebene II denken, und die zweiten Ordinaten auf ihnen den Vorzeichen entsprechend auftragen, um den einen Teil des Modelles im Geiste auszuführen. Der zweite Teil ergibt sich dann durch die Bildebene I, die durch ${}_1X_2$ senkrecht zur Bildebene II so gelegt wird, dass alle Geraden wie $a a_1$, $b b_1$, $c c_1, \ldots$ auf der Bildebene I senkrecht stehen.

558. Von besonderer Wichtigkeit sind die Punkte in der Bildebene I, denn sie fallen mit ihren ersten Bildern zusammen, während ihre zugeordneten Bilder in der Projectionsaxe liegen. Siehe im Modell (534) den Punkt e.

Alle Punkte der Bildebene II fallen mit ihren zweiten Bildern zusammen; ihre zugeordneten Bilder liegen in der Bildaxe. Siehe im Modell (534) den Punkt f.

559. Die weitere Ausführung der in Bleilinien durchgeführten Construction besteht in dem Ausziehen der Linien durch Tusche und im Beschreiben der Zeichnung.

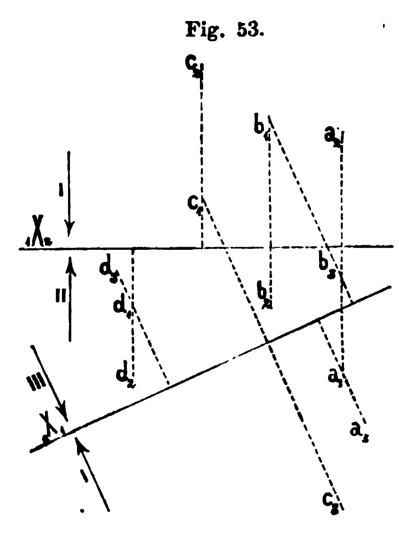
Man muss bei jeder Construction die Hilfslinien von den eigentlichen oder Hauptlinien der Zeichnung unterscheiden und die Hilfslinien entweder gar nicht ausziehen oder ihnen wenigstens keine grosse Dicke geben, damit sie die Hauptzeichnung klar und deutlich hervortreten lassen. Zu den Hilfslinien gehö-

ren namentlich die Ordinalen, welche in Menge vorkommen und nur fein gestrichelt werden sollen.

Die Hauptlinien einer Zeichnung ziehe man kräftig aus, jedoch halte man sie stets dünner, sobald sie wegen irgend einer Ursache gestrichelt werden.

Auch die Anwendung mehrerer Farben ist für **die erste Zeit der Ausführung von Projections-Zeichnungen** ein höchst schätzbarer Behelf zur gründlichen Erlernung der Projectionslehre, wenn die Farben nach bestimmten Gesetzen zur Anwendung gebracht werden.

Fig. 53.



Bisher wendete man Farben zum Ausziehen von Hilfslinien an. Dies soll nun nicht geschehen, sondern es sollen alle Punkte und Linien, welche **einer und derselben Projection** angehören **mit einer und derselben Farbe** dargestellt und beschrieben und für neue Projectionen neue Farben gewählt werden.

So würde man z. B. für die Projection I eine rothe, für die Projection II die schwarze Farbe benützen können. Es müssten demnach in Fig. 52, woselbst man ${}_1X_2$ jedenfalls schwarz auszieht, die Punkte der ersten Bildebene, also $a_1\, b_1\, c_1, \ldots$ roth, jene der zweiten Bildebene, also $a_2\, b_2\, c_2, \ldots.$ schwarz bezeichnet und beschrieben werden.

Eine Ordinale wie $a_1 a_2$ besteht aus zwei Teilen (540), von welchen $a_1 A$ roth, $A a_2$ schwarz zu stricheln ist. Bei der Ordinale $b_1 B$, welche teilweise mit $B b_2$ zusammenfällt, wird man den Teil von B bis b_1 roth stricheln, jedoch je zwei Striche soweit voneinander entfernt lassen, dass eine zweite schwarzgestrichelte Linie $B b_2$ dazwischen bemerkbar gemacht werden kann.

Der Sehpfeil II ist roth zu ziehen, weil er in der Bildebene I liegt, der Sehpfeil I hingegen schwarz.

Alle in der Bildaxe liegenden Punkte sind mit der Farbe der Bildaxe zu behandeln.

Führt der Lernende Zeichnungen in der erwähnten Weise aus, so ist er bei jeder Linie und jedem Punkte genöthiget zu denken, in welcher Bildebene diese Linie oder dieser Punkt liegt; er gewöhnt sich allmälig daran zu beachten, dass er in zwei oder auch bisweilen in mehreren Bildebenen arbeitet; es treten die Zeichnungen der einzelnen Bildebenen übersichtlich hervor und lassen viel leichter als sonst erkennen, ob die Zeichnung mit Verständnis durchgeführt wurde, namentlich dann, wenn die projicierten Punkte und Linien in verschiedenen Winkelräumen der Projectionsebenen liegen.

Die Vereinigung von mehr als zwei Projectionsebenen mit der Zeichnungsebene.

§. 27.

560. In sehr vielen Fällen ist man gezwungen, von räumlichen Gebilden aus zwei zugeordneten Projectionen neue zugeordnete Projectionen abzuleiten, welche auf neuen Projectionsebenen liegen, die auf bereits vorhandenen Bildebenen senkrecht stehen. In solchen Fällen muss man nicht nur von zwei, sondern von mehreren Bildebenen die Zeichnungen mit der Zeichnungsebene vereinigen.

Um die Gedanken an einen concreten Fall zu knüpfen, nehmen wir an, in Fig. 53, wo von vier Punkten *abcd* zwei zugeordnete Projectionen $a_1 b_1 c_1 d_1$ und $a_2 b_2 c_2 d_2$ mit der Zeichnungsebene nach den Ordinatengesetzen (556) vereinigt sind, sei ${}_1X_3$ die Durchschnittsgerade von einer neuen Bildebene III, welche auf der Bildebene I senkrecht steht, mit der Bildebene I. Es sollen nun die Raumpunkte *abcd* auf diese Bildebene III orthogonal projiciert und soll ferner die dritte Projection mit der ersten, welcher sie zugeordnet ist (531), nach den Ordinatengesetzen (556) mit der Zeichnungsebene vereinigt werden.

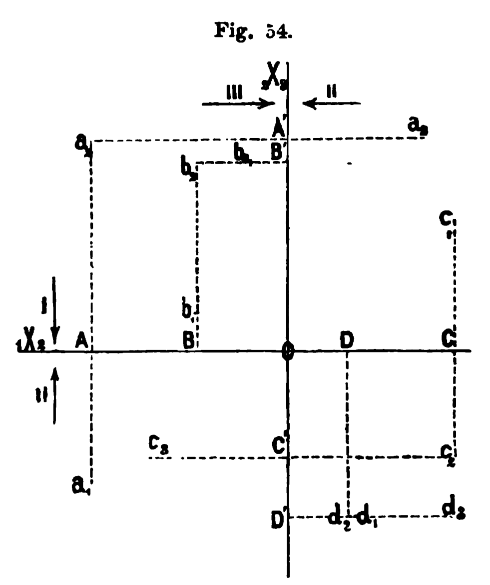
561. Diese Vereinigung erfordert zu allererst die Annahme des Sehpfeiles III, welcher in der Bildebene I liegend, senkrecht auf ${}_1X_3$ gezeichnet werden muss. Der Sehpfeil III kann nur in einer von zwei Richtungen angenommen werden. In der Regel pflegt man Pfeil III so zu wählen, dass er mit der Spitze nach jener Seite hinzeigt, wo für neue Projectionen der bequemste Raum vorhanden ist. Sobald der Sehpfeil III angenommen, kennt man auch den ihm zugeordneten Sehpfeil, welcher immer

mit der Pfeilspitze die gerade entgegengesetzte Richtung von III angibt. Dieser Sehpfeil ist in Fig. 53 offenbar wieder mit I zu bezeichnen, weil ja die Bildebenen III und I zugeordnete Bildebenen sind.

Für die zugeordnete Vereinigung der dritten Projection mit der ersten wendet man die erwähnten Ordinatengesetze (556) an, mithin muss man durch alle ersten Bilder Ordinalen (556*a*) zu ${}_1X_3$ ziehen.

562. Wenn man neue Bilder sucht, muss man jederzeit wissen, welche Ordinaten diesen Bildern zugeordnet sind. Man erkennt die Zuordnung immer aus den dem X beigefügten Ziffern. Steht z. B. ${}_1X_3$, so heisst dies, den dritten Bildern sind die ersten Ordinaten, oder auch den ersten Bildern sind die dritten Ordinaten zugeordnet. Man wird also vermöge des zweiten Ordinatengesetzes (556*b*) mit der ersten Ordinate das dritte Bild, oder mittels der dritten Ordinate das erste Bild eines Punktes mit der Zeichnungsebene vereinigen können.

Fig. 54.



Soll man daher in Fig. 53 die dritten Bilder der Raumpunkte mit der Zeichnungsebene zugeordnet vereinigen, so muss man alle den dritten Bildern zugeordneten Ordinaten kennen. Die zugeordneten Ordinaten sind die ersten, und die ersten Ordinaten sind durch die zugeordneten zweiten Bilder bestimmt, weil die ersten und zweiten Projectionen nach den Ordinatengesetzen vereinigt sind; wenn man daher mit dem Zirkel die ersten Ordinaten aus den zweiten Bildern (ihre Abstände von der Bildaxe ${}_1X_2$) abmisst, und ihr Vorzeichen durch Vergleichung mit dem bei ${}_1X_2$ stehenden Sehpfeile I bestimmt, so kann man diese ersten Ordinaten auch auf den zu ${}_1X_3$ gezogenen Or-

dinalen von der Axe ${}_1X_3$ aus auftragen und durch Vergleichung des Vorzeichens der ersten Ordinaten mit dem bei ${}_1X_3$ stehenden Sehpfeile I genau bestimmen, auf welcher Seite von ${}_1X_3$ die erste Ordinate aufzutragen ist. Die erste Ordinate bestimmt das zugeordnete Bild und dieses Bild ist hier das dritte, folglich ist, wenn z. B. (c_1) aufgetragen wurde, der gefundene Endpunkt der ersten Ordinate mit c_3 zu bezeichnen.

Der hier beschriebene Vorgang zeigt, dass die dem X beigefügten Ziffern und die Sehpfeile von Wichtigkeit sind und dass durch genaue Berücksichtigung der Vorzeichen, welche den Ordinaten zukommen, sowie durch Berücksichtigung des Umstandes, dass jede Ordinate ein zugeordnetes Bild bestimmt, niemals ein Zweifel über das Auftragen der Ordinaten und über die Bezeichnung der gefundenen Punkte entstehen kann.

563. Führt man bei der Vollendung einer Zeichnung noch für jede Bildebene eine andere Farbe ein, so wird die grösst mögliche Klarheit in der Vereinigung mehrerer Projectionen mit der Zeichnungsebene erzielt.

564. Zu den grössten Schwierigkeiten für Anfänger gehörte es sonst, drei Projectionen von Punkten mit der Zeichnungsebene zu verbinden, wenn die Bildebene III eine sogenannte Kreuzrissebene bildete, d. h. wenn die Bildebene III auf der Projectionsaxe ${}_1X_2$ senkrecht stand. Ein solches Beispiel soll in Fig. 54 behandelt werden.

Nehmen wir an, in Fig. 54 sei eine Gerade X senkrecht zu ${}_1X_2$ als neue Bildaxe gezogen worden. Die neue Bildebene III stehe auf beiden Bildebenen I und II senkrecht, folglich kann ihre Zeichnung sowol mit der Zeichnung der Bildebene I als auch mit jener der Bildebene II als zugeordnet nach den drei Ordinatengesetzen vereinigt werden. Gewöhnlich geschieht die zugeordnete Vereinigung mit der Zeichnung der Bildebene II, demnach sind dem X die Zeiger 2 und 3 beizufügen.

Die Bildaxe ${}_2X_3$ ist senkrecht zu ${}_1X_2$, folglich parallel zu den zu ${}_1X_2$ gehörenden Ordinalen.

Die zu ${}_1X_2$ gehörenden Ordinalen sind von ${}_1X_3$ ebensoweit entfernt, wie die dritte Ordinate anzeigt. Ist nun beispielsweise $(a_2) = +26$ Längeneinheiten, etwa $= 26$ Millimetern, so werden 26 Einheiten auf Seite des Sehpfeiles III von O aus nach OA aufgetragen und durch A wird die Ordinale gezogen, in welcher $a_1 a_2$ liegen. Ist $(a_1) = +28^{mm}$, so erhält man durch (a_1) das

zugeordnete Bild a_2 und ist $(a_2) = 18^{mm}$, so findet man durch (a_2) das zugeordnete Bild a_1.

Da das dritte Bild a_3 dem zweiten a_2 zugeordnet ist, muss man durch a_2 eine Ordinale zu ${}_2X_3$ ziehen. Das dritte Bild findet man aus der zugeordneten zweiten Ordinate (a_2), d. i. aus $a_1 A$ und weil (a_2) positiv ist, wird (a_2) auf Seite des bei ${}_2X_3$ stehenden Sehpfeiles II aufgetragen, wodurch a_3 gefunden wird.

Nimmt man an:

$$(b_1) = +\,25,\ (b_2) = -\ \ 5,\ (b_3) = +\,12$$
$$(c_1) = -\,14,\ (c_2) = -\,17,\ (c_3) = -\,22$$
$$(d_1) = -\,22,\ (d_2) = +\,22,\ (d_3) = -\ \ 8$$

so kann man mittels der dritten Ordinaten die Ordinalen zu ${}_1X_2$ und mittels der übrigen Ordinaten die Projectionen der Punkte b, c und d wie bei a finden. Man wird in gleicher Weise wie früher bei der Vollendung der Zeichnung für jede Bildebene eine eigene Farbe wählen.

Der Lernende versinnliche sich bei horizontal liegender Zeichnungsebene die Lage der abgebildeten Raumpunkte und ihrer zweiten und dritten Bilder.

565. Soll eine vierte Bildebene IV etwa senkrecht zur Bildebene III eingeführt werden, so ist die Bildaxe mit ${}_3X_4$ zu bezeichnen und man erkennt aus den dem X beigefügten Zeigern 3 und 4, dass die dritten und vierten Bilder zugeordnet sind, dass daher das dritte und vierte Bild eines Punktes in einer durch das dritte Bild zu ${}_3X_4$ senkrecht zu ziehenden Ordinale liegen, und dass jedes vierte Bild durch die zugeordnete dritte Ordinate bestimmt werden muss.

Die dritten Ordinaten findet man aus den zugeordneten zweiten Bildern (ihre Abstände von ${}_2X_3$), wie dies ein Blick auf ${}_2X_3$ lehrt und ihr Vorzeichen ergibt sich durch Vergleichung mit dem bei ${}_2X_3$ stehenden Sehpfeile III. Trägt man sonach die dritten Ordinaten auf den entsprechenden zu ${}_3X_4$ gehörenden Ordinalen von ${}_3X_4$ aus nach Anforderung des Vorzeichens auf, so findet man das vierte Bild des in Construction stehenden Punktes.

Die Lage von ${}_3X_4$ war entweder eine gegebene oder eine beliebig angenommene. Dasselbe gilt für den Sehpfeil IV. Auch für die Bildebene IV wird man eine besondere Farbe wählen.

Werden von einem Punkte nun z. B. das vierte und dritte Bild in einer Ordinale zu ${}_3X_4$ beliebig angenommen, so kann

man hieraus das zweite und auch das erste Bild unter Anwendung der Ordinatengesetze anstandslos ableiten.

Die Lage einer Geraden aus zwei zugeordneten Projectionen zu beurteilen. Ordinalgerade. Differenzen-Dreiecke.

§. 28.

566. Der Lernende fertige sich ein Modell, bestehend aus zwei aufeinander senkrechten Bildebenen I und II, sowie aus zwei zur Bildaxe ${}_1X_2$ senkrechten Ordinatenebenen A und B an, und zeichne in jeder Bildebene die Sehpfeile auf, um die Richtung des Projicierens vollständig zu bestimmen.

Hierauf nehme er einen geradlinigen Drat, durchbohre die Ordinatenebene A in einem beliebigen Punkte a, die Ordinatenebene B in einem Punkte b und lege den Drat durch diese beiden Punkte a und b, so besitzt er eine Gerade in Verbindung mit zwei zugeordneten Bildebenen I und II.

Um die Projectionen dieser Geraden zu finden, sucht man die Projectionen $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ der beiden Punkte a und b, indem man a und b einmal auf die Bildebene I, das anderemal auf die Bildebene II projiciert. Verbindet man a_1 mit b_1, durch eine Gerade $a_1 b_1$, so ist $a_1 b_1$ das erste Bild von ab, und verbindet man auch a_2 mit b_2, so ist $a_2 b_2$ das zweite Bild von ab.

Aus dem Modelle gelangt man auf die in §. 26 gelehrte Art zur Vereinigung der ersten und zweiten Bilder $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ der Punkte a und b mit der Zeichnungsebene, also auch zur Vereinigung des ersten und zweiten Bildes der Geraden ab.

Die Projectionen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ werden verschiedene Lagen gegen die Axe ${}_1X_2$ annehmen, je nachdem die Punkte a und b in den Ordinatenebenen A und B gewählt wurden.

567. W i e e r k e n n t m a n a u s z w e i z u g e o r d n e t e n P r o j e c t i o n e n e i n e r G e r a d e n, o b s i e z u e i n e r d e r b e i d e n P r o j e c t i o n e n p a r a l l e l l ä u f t ?

Läuft eine orthogonale Projection einer Geraden zur Bildaxe parallel, so ist die Gerade zur zugeordneten Projection parallel. Die Richtigkeit ist leicht einzusehen.

Ist demnach das zweite Bild $a_2 b_2$ zu ${}_1X_2$ parallel, Fig. 55, so ist die Gerade ab zu $a_1 b_1$ parallel; geht aber, wie in Fig. 56, das erste Bild $c_1 d_1$ parallel zur Bildaxe ${}_1X_2$, so ist die Gerade cd zur zweiten Projection $c_2 d_2$ parallel.

568. Es ist eine selbstverständliche Sache: läuft eine Gerade zu einer ihrer Projectionen parallel, so ist sie auch zu jener Bildebene parallel, in welcher die Projection liegt.

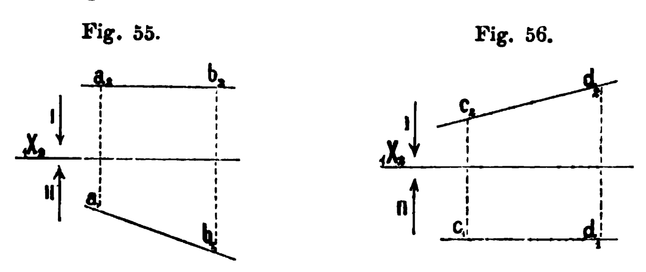


Fig. 55. Fig. 56.

569. Welche Lage haben zwei zugeordnete Projectionen einer Geraden, wenn diese mit einer der beiden Bildebenen parallel läuft?

Jene Projection, zu welcher die Gerade des Raumes parallel geht, ist von beliebiger Lage; die zugeordnete Projection hingegen wird stets zur Bildaxe parallel (567).

Wäre demnach beispielsweise eine Gerade zur vierten Bildebene parallel und wäre die vierte Bildebene der zweiten zugeordnet, so könnte die vierte Projection gegen die Bildaxe $_2X_4$ eine beliebige Lage erhalten, die zugeordnete zweite Projection müsste jedoch zu $_2X_4$ parallel sein.

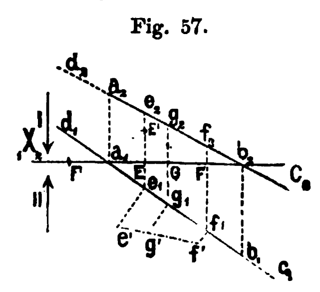


Fig. 57.

570. Sind zwei zugeordnete Projectionen einer Geraden zur Bildaxe parallel, so ist die Gerade selbst zur Bildaxe parallel, weil sie mit beiden Bildebenen parallel geht (126).

571. Wie liegen zwei zugeordnete Projectionen einer Geraden, wenn diese auf einer der beiden Bildebenen senkrecht steht?

Auf jener Bildebene, auf welcher die Gerade senkrecht steht, ist ihre orthogonale Projection ein Punkt; in der zugeordneten Bildebene steht hingegen die Projection der Geraden senkrecht auf der Bildaxe. Siehe Fig. 58.

572. Sind zwei zugeordnete Projectionen einer Geraden gleichzeitig auf der Bildaxe senkrecht, so liegt die Gerade in

einer Ordinatenebene (539) und soll eine **Ordinalgerade** genannt werden. $p_1 p_2$ Fig. 58.

Von zwei zugeordneten Projectionen einer Geraden kann niemals eine Projection zur Bildaxe senkrecht sein, wenn es nicht auch die zugeordnete Projection ist.

573. Sind zwei zugeordnete Projectionen einer Geraden zur Bildaxe geneigt, so ist auch die Gerade zu beiden Bildebenen geneigt. In Fig. 57 ist die Gerade cd zu den Bildebenen I und II geneigt, weil beide Projectionen $c_2 d_2$ und $c_1 d_1$ zu ${}_1X_2$ geneigt sind.

574. **Wie wird in einer durch zugeordnete Projectionen gegebenen Geraden ein Punkt angenommen?**

Man zieht eine Ordinale; diese schneidet die zugeordneten Projectionen der Geraden in zwei zugeordneten Bildern eines Punktes der Geraden, der nun angenommen ist. Sind z. B. in Fig. 57 die Punkte EFG in der Bildaxe beliebig angenommen und durch sie Ordinalen gezogen worden, so sind $e_1 e_2$ sowie $f_1 f_2$ und $g_1 g_2$ zugeordnete Bilder von drei in der Geraden cd beliebig angenommenen Punkten e, f und g.

575. **Was versteht man unter den Spuren einer Geraden?**

Ihre Durchschnittspunkte mit den Bildebenen. Die erste Spur einer Geraden ist ihr Schnittpunkt mit der Bildebene I, ihre n^{te} Spur ihr Schnittpunkt mit der n^{ten} Bildebene. Dabei ist es eine selbstverständliche Sache:

Die erste Spur einer Geraden liegt in der ersten, die n^{te} Spur in der n^{ten} Projection der Geraden. Die zugeordnete Projection einer jeden Spur einer Geraden liegt in der Bildaxe (558).

576. **Wie construiert man aus zwei zugeordneten Projectionen einer Geraden ihre Schnitte mit den Bildebenen?**

Sucht man den Schnitt der Geraden mit einer Bildebene, so muss man die Projection der Geraden in **der zugeordneten Bildebene** (531) mit der Bildaxe zum Durchschnitt bringen; zieht man durch diesen Schnittpunkt eine Ordinale, so ergibt diese im Schnitte mit der anderen Projection der Geraden die gesuchte Spur (558). Demzufolge ist in Fig. 57 a_2 die zweite und b_1 die erste Spur der Geraden cd. Wendet man auf $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ das

Ordinatengesetz (556, b) an, so erkennt man die Richtigkeit der Spuren-Construction.

577. Wie wird man in einer gegebenen Geraden einen Punkt ermitteln, dessen Abstand von einer Bildebene gleich einer gegebenen Länge λ ist?

Man zieht in der zugeordneten Bildebene im Abstande λ parallel zur Bildaxe eine Gerade, bis sie die in derselben Bildebene liegende Projection der Geraden schneidet; dieser Schnittpunkt ist ein Bild des gesuchten Punktes. Das zugeordnete Bild liegt in der Ordinale und in der zugeordneten Projection der Geraden.

Ob λ positiv oder negativ, man berücksichtigt jedenfalls das Ordinatengesetz (556, *c*).

578. Wie wird man sich eine durch zwei zugeordnete Projectionen gegebene Gerade versinnlichen?

Man wählt sich in der Geraden zwei Punkte (574), versinnlicht sich die Orte wo sie liegen (557) und legt durch beide Orte eine Gerade.

In Fig. 57 kann man sich entweder zwei Punkte wie e und f, oder auch die zweite Spur a_2 über der horizontal liegenden Zeichnungsebene versinnlichen; die Gerade geht dann durch b_1 f e und a.

579. Welcher Teil einer Geraden erscheint dem projicierenden Auge durch die Bildebene gedeckt?

Jener Teil, dessen Punkte negative Ordinaten bezüglich des projicierenden Auges besitzen (534).

So haben z. B. in Fig. 57 alle Punkte der Geraden cd von b gegen c hin negative erste Ordinaten (weil die zugeordneten zweiten Bilder mit dem Sehpfeile I auf der entgegengesetzten Seite von ${}_1X_2$ liegen), mithin erscheint der Teil von b_1 gegen c hin dem Auge I als von der Bildebene I gedeckt, wesshalb man die erste Projection dieses Teiles strichelt.

Von a_2 gegen d hin besitzen alle Punkte der Geraden cd negative zweite Ordinaten, folglich erscheint dem Auge II der Teil $a_2 d_2$ als von der Bildebene II gedeckt, wesshalb man auch das zweite Bild dieses Teiles der Geraden cd strichelt.

580. Wie wird man die wahre Länge einer durch zwei zugeordnete Projectionen gegebenen Strecke ermitteln?

Da man bezüglich zweier Bildebenen die Ordinaten der Endpunkte der Strecke kennt (556, *b*) so kann man nach der in (518) erklärten Methode die Ordinatenfläche der Strecke construieren.

Die Strecke ef der Fig. 57 besitzt zwei Ordinatenflächen; die erste Ordinatenfläche wurde an $e_1 f_1$ angezeichnet, indem $e_1 e' = (e_1)$, (d. i. $= e_2 E$), und $f_1 f' = (f_1)$, (d. i. $= f_2 F$) gesetzt wurde. Die zweite Ordinatenfläche würde sich ergeben, wenn man in e_2 und f_2 Senkrechte $e_2 e''$, $f_2 f''$ zu $e_2 f_2$ von den Längen (e_2) und (f_2) errichten würde.

Die Strecken $e'f'$ und $e''f''$, welche einander gleich sein müssen, geben die wahre Länge der Strecke ef an.

Für den Lernenden ist es sehr lehrreich, sich die beiden Ordinatenflächen einer Strecke aus einem zusammenhängenden Stück Pappe zu construieren, sie längs der beiden Trapezen gemeinsamen Geraden (die mit einem Schnitt bis in die halbe Dicke der Pappe versehen wird) umzubiegen, und beide Trapeze durch geeignete Einschnitte in die Bildebenen mit diesen letzteren in senkrechter Stellung zu verbinden. Zeichnet er noch in den Bildebenen die Ordinatenflächen, so eignet sich das so erhaltene Modell für viele Untersuchungen über die gerade Linie.

581. Wie ermittelt man die wahre Länge einer durch zwei zugeordnete Projectionen gegebenen Strecke, ohne die Umlegung der Geraden zu zeichnen?

Durch die Construction der Differenzen-Dreiecke.

Nach der in (522) gegebenen Erklärung wird man zu einer Strecke ebensoviele Differenzen-Dreiecke construieren können, als die Strecke Projectionen besitzt. Will man das n^{te} Differenzen-Dreieck einer Strecke ef construieren, so wird man die algebraische Differenz der Ordinaten (e_n) und (f_n) als erste, und die n_{te} Projection $e_n f_n$ als zweite Kathete wählen; die Hypothenuse vervollständigt das n^{te} Differenzen-Dreieck und gibt die wahre Länge der Strecke ef an.

Es ist zu empfehlen, in der Zeichnung an den Ordinaten selbst die Subtraction vorzunehmen, wie dies Fig. 57 zeigt, woselbst die erste Ordinate $(f_1) = f_2 F$ von der ersten Ordinate $(e_1) = e_2 E$ von e_2 aus subtrahiert wurde. Die Strecke $E'E$ ist somit $= (e_1) - (f_1)$. Ergreift man jetzt die erste Projection $e_1 f_1$ mit dem Zirkel und überträgt sie nach EF', so ist $E'EF'$ das

erste Differenzen-Dreieck der Strecke ef, folglich ist $E'F'$ die wahre Länge von ef.

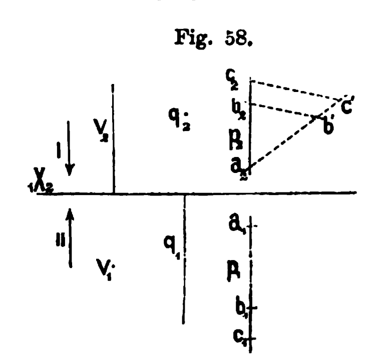
Wollte man das zweite Differenzen-Dreieck zu ef construieren, so würde man die kleinere zweite Ordinate (e_2) von (f_2) vom Punkte f_1 aus auf der Ordinale subtrahieren und den Rest als die eine Kathete betrachten. Die andere Kathete ist $= e_2 f_2$ und wird von F aus auf der Bildaxe aufgetragen. Die Hypothenuse gibt wieder die wahre Länge der Strecke ef.

Zur Construction der Differenzen-Dreiecke kann übrigens jeder beliebige rechte Winkel benützt werden.

582. Haben die Endpunktsordinaten, welche zur Construction eines Differenzen-Dreieckes verwendet werden, entgegengesetzte Zeichen, so muss man die Ordinaten in der Construction summieren und diese Summe als eine Kathete annehmen.

583. **Wie construiert man den Neigungswinkel einer durch zwei zugeordnete Projectionen gegebenen Geraden gegen eine der beiden Bildebenen?**

Fig. 58.



Man wählt in der Geraden zwei Punkte (574) und zeichnet in jener Bildebene, zu welcher die Neigung der Geraden ermittelt werden soll, die Ordinatenfläche (518) der Geraden. Der von ihrer Umlegung mit der Projection eingeschlossene Winkel ist dem gesuchten Neigungswinkel gleich.

In Fig. 57 ist der von $e'f'$ mit $e_1 f_1$ gebildete Winkel gleich der ersten Neigung der Geraden cd, und der von $e''f''$ mit $e_2 f_2$ gebildete Winkel gleich der zweiten Neigung.

584. **Wie wird man auf einer geraden Linie von einem bestimmten Punkte aus eine gegebene Länge auftragen und die Projectionen des Endpunktes bestimmen?**

Man wird sich in der Geraden irgend zwei Punkte annehmen, eine Umlegung construieren (518), in dieser die gegebene Länge auftragen und aus der Umlegung die Projection ermitteln. In Fig. 57 wurde von e' aus eine angenommene Länge nach $e'g'$

aufgetragen; $g'g_1$ wurde $\perp$ e_1f_1 gezogen, also ist g_1 das erste Bild von g. Das zweite Bild g_2 entsteht durch die Ordinale des Punktes g. Zur Probe muss sich $g'g_1 = g_2G$ ergeben.

585. Wie wird man die Projectionen der Teilpunkte finden, wenn man eine Strecke nach gegebenen Verhältnissen teilt.

Teilt man jede Projection der Strecke von zugeordneten Punktbildern aus nach den gegebenen Verhältnissen, so sind diese Teilpunkte die Projectionen von den Teilpunkten im Raume, weil jede gerade Punktreihe des Raumes zu ihrer orthogonalen Projection geometrisch proportional ist.

586. Wie wird man die zweite Projection einer Geraden finden, welche durch einen gegebenen Punkt e gehen, die Gerade e_1f_1 zu ihrem ersten Bilde haben und einen gegebenen Winkel mit e_1f_1 einschliessen soll?

Man zeichnet sich die zu e_1f_1 senkrechte Umlegung e' des Punktes e (Fig. 57), zieht durch e' eine Gerade $e'f'$ unter dem gegebenen Winkel gegen die Projection e_1f_1, wählt einen Punkt f' in der Umlegung der Geraden beliebig, zieht $f'f_1$ senkrecht zu e_1f_1, durch f_1 eine Ordinale und trägt die erste Ordinate $(f_1) = f'f_1$ von F nach Ff_2 auf, so ist f_2 das zweite Bild des Punktes f. Die Gerade e_2f_2 ist das Resultat der Aufgabe.

587. Gibt es wol einen Fall, in welchem man aus zwei zugeordneten Projectionen noch nicht auf die Lage der Geraden gegen die Bildebenen schliessen kann?

Bei einer Ordinalgeraden (572) kann man die Lage nur dann beurteilen, wenn man von zwei Punkten derselben die zugeordneten Projectionen kennt. In Fig. 58 kann man die Lage von p nur insoweit erkennen, als man weiss, dass die Gerade pp in der durch p_1p_2 gehenden Ordinalebene liegt; welche Lage aber diese Ordinatenebene besitzt, ist durchaus unbekannt. Von der Geraden ab, die gleichfalls in einer Ordinatenebene liegt, befindet sich der Punkt a über a_1 in der Entfernung $(a_1) = a_2A$; der Punkt b über b_1 in der Entfernung $(b_1) = b_2A$, mithin kann man sich in diesem Falle beide Punkte und hiedurch die Lage von ab versinnlichen.

588. Wie wird man das zugeordnete Bild von einem Punkte einer bestimmten Ordinalgeraden, oder

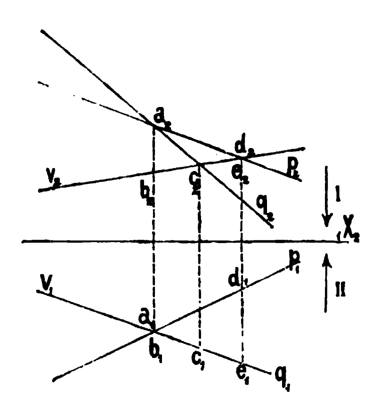
einer solchen, welche sich einer Ordinalgeraden nähert, construieren, wenn ein Bild des Punktes bekannt ist?

a) Man wird den Satz zur Anwendung bringen, dass die Parallel-Projectionen einer geraden Punktreihe untereinander geometrisch proportional sind. Ist nun in Fig. 58 eine Gerade durch zwei Punkte a und b bestimmt, und ist von einem in ihr liegenden Punkte c das Bild c_1 gegeben, so wird man etwa durch a_2 eine beliebige Gerade ziehen, $a_2 b' = a_1 b_1$, $a_2 c' = a_1 c_1$ setzen, und durch c eine Parallele zu $b' b_2$ legen, welche sofort c_2 bestimmt. Sollte das Bild $a_1 b_1$ sehr kurz sein im Verhältnis zu $a_2 b_2$, so wird man $a_2 b' = 2 . a_1 b_1$ und $a_2 c' = 2 . a_1 c_1$ oder nach Umständen auch drei-, viermal so gross setzen, damit die Gerade $b' b_2$ keinen allzuspitzen Winkel mit $a_2 b_2$ einschliesst.

b) Eine zweite Methode c_2 zu bestimmen, bestünde darin, dass man eine dritte Bildebene, etwa eine Kreuzrissebene einführt, um die erste Ordinate (c_1) zu finden, woraus nach dem zweiten Ordinatengesetze c_2 gefunden wird.

Der Lernende suche die Spuren dieser Geraden mit Hilfe eines dritten Bildes, und verwende nach (559) bei der Ausführung seiner Zeichnungen mehrere Farben.

Fig. 59.



589. Welche Lage besitzt eine Gerade, wenn zwei zugeordnete Projectionen derselben in einer und derselben beliebigen geraden Linie liegen?

Die Gerade schneidet die Bildaxe, liegt vor der einen aber hinter der anderen Bildebene und ist gegen beide Bildebenen gleich geneigt. Der Lernende wolle sich hievon überzeugen.

590. Um die Lehren dieses Paragrafes besonders einzuüben, nehme man in mehreren Beispielen die Bildaxe $_2X_3$ vertical und arbeite blos in den zwei verticalen zugeordneten Bildebenen II und III. Die Bildebene I lasse man weg.

Sich schneidende, sich kreuzende und parallele Gerade. Deckgerade.

§. 29.

591. Wie erkennt man aus den Projectionen zweier Geraden, ob sie sich schneiden oder sich kreuzen?

Wenn der Schnittpunkt der ersten Bilder mit dem Schnittpunkte der zugeordneten, also der zweiten Bilder in einer Ordinale liegt, dann schneiden sich die Geraden, jedoch darf keine dieser Geraden eine Ordinalgerade sein (572). In Fig. 59 sind drei gerade Linien gezeichnet. Die Gerade p nähert sich von links gegen rechts beiden Bildebenen, q nähert sich der Bildebene I und entfernt sich von II und v entfernt sich von links gegen rechts von beiden Bildebenen.

Den Punkt a haben die Geraden p und q gemein, also schneiden sich diese Geraden. Die Linien p und v haben keinen Punkt gemein, denn die Ordinale, welche durch den Schnittpunkt von p_1 mit v_1 geht, geht nicht auch gleichzeitig durch den Schnittpunkt von p_2 mit v_2; also kreuzen sich p und v.

592. Wie wird man einen Punkt mit einer Geraden durch eine Gerade verbinden?

Man wird in der gegebenen Geraden einen Punkt annehmen (574), und in jeder Bildebene die Projectionen der beiden Punkte durch eine Gerade verbinden, so sind diese Geraden die Projectionen derjenigen Geraden, welche im Raume den Punkt mit der gegebenen Geraden verbindet. Kennt man die Projectionen der Verbindungsgeraden, so ist dadurch ihr Ort im Raum bestimmt.

593. Was verstehen wir unter Deckgeraden?

Wenn zwei Gerade eine Projection gemein haben, so erscheinen sie dem projicierenden Auge als sich deckend, und heissen desshalb Deckgerade (511). Man nennt sie Einserdeckgerade, wenn sie die erste, Zweierdeckgerade, wenn sie die zweite Projection gemein besitzen. In Fig. 59 sind q und v Einserdeckgerade, weil q_1 mit v_1 zusammenfällt. Deckgerade müssen sich immer schneiden. q und v schneiden sich im Punkte c.

Besitzen sich kreuzende Gerade Deckpunkte?

594. Wenn sich zwei Gerade kreuzen (33), so nennen wir jene zwei Punkte derselben, welche ein gemeinsames erstes Bild

haben, Einserdeckpunkte, jene zwei Punkte der Geraden, welche ein gemeinsames zweites Bild besitzen, Zweierdeckpunkte. In Fig. 59 sind a und b Einserdeckpunkte der Geraden p und v. Weil $(b_1) < (a_1)$, so geht von oben herab besehen die Gerade v unter der Geraden p hinweg.

Die Punkte d und e sind Zweierdeckpunkte und weil $(e_2) > (d_2)$, so folgt, dass von vorn gesehen die Gerade v vor der Geraden p vorübergeht.

Um sich zu Fig. 59 ein Modell anfertigen zu können, wird der Lernende ausser den beiden Bildebenen I und II noch zwei Ordinatenebenen herstellen, am einfachsten jene, in welchen die

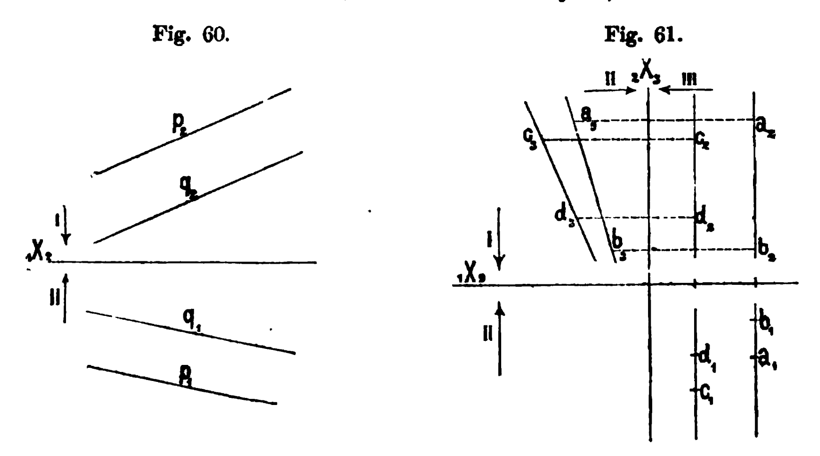


Fig. 60. Fig. 61.

Punkte a und d liegen. Werden die Schnittpunkte der drei Geraden p, q und v mit den Ordinatenebenen aufgesucht, und durch Dräte (z. B. Stricknadeln) diese Geraden dargestellt, so wird man finden, dass die Geraden p und q sowie q und v sich schneiden, dass aber p die Gerade v kreuzt. q und v sind Einserdeckgerade.

595. **Wie erkennt man das Parallelsein von zwei geraden Linien aus zwei zugeordneten Projectionen?**

Wenn in jeder Bildebene die Projectionen der Geraden parallel laufen, Fig. 60. Liegen zwei gerade Linien in keinen Ordinatenebenen, so genügt das Parallelsein der orthogonalen Projectionen in zwei zugeordneten Bildebenen zur Behauptung des Parallelseins der Geraden im Raume. Liegen aber zwei Gerade in Ordinatenebenen, so muss man noch die Projectionen auf einer dritten Bildebene suchen, für welche die Geraden keine Ordinalgeraden

(572) sind; läuft das dritte Paar Projectionen parallel, so sind auch die Geraden im Raume parallel.

596. Parallele Gerade gehören zu den sich schneidenden Geraden, nur liegt der Schnittpunkt derselben im Unendlichen, folglich liegen auch die zugeordneten Projectionen im Unendlichen, d. h. in jeder Bildebene sind die Projectionen parallel.

597. Wie wird man durch einen gegebenen Punkt eine Gerade parallel zu einer gegebenen Geraden ziehen?

Zieht man in jeder von zwei zugeordneten Bildebenen durch die Projection des Punktes eine Parallele zu der Projection der Geraden, so erhält man dadurch die Projectionen der Parallelen im Raume.

598. Stehen zwei Gerade auf einer Bildebene senkrecht, so hat sich ein Paar Projectionen in ein Paar Punkte verwandelt, deren Abstand gleich ist der Entfernung der parallelen zur Bildebene senkrechten Geraden.

In Fig. 61 sind die Geraden *ab* und *cd* Ordinalgerade, jede durch ein Paar Punkte bestimmt. Es wurde eine Bildebene III senkrecht zu II eingeführt, und wurden die dritten Bilder von *ab* und *cd* unter Anwendung der Ordinatengesetze (556) gesucht.

Wo liegen die Spuren dieser Geraden (575)?

Beurteilung der Lage einer Ebene aus ihren Spuren.

§. 30.

599. Bevor man zur bildlichen Darstellung einer Ebene *u* schreitet, wird es gut sein, in einem aus zwei zugeordneten Bildebenen I und II bestehenden Modelle aus steifem Zeichnungspapier, eine Ebene *u* mit den Bildebenen so zu verbinden, dass ihre Schnitte mit denselben zur Bildaxe ${}_1X_2$ eine geneigte Lage erhalten.

Von dieser Ebene *u* entstehen vier Teile, von welchen zwei Teile über der Bildebene I liegen und von den beiden anderen Teilen durch den Schnitt mit der Bildebene I getrennt liegen. Ebenso liegen auch zwei Teile der Ebene *u* vor und zwei Teile hinter der Bildebene II; ihre gemeinsame Grenze ist der Schnitt der Ebene *u* mit der Bildebene II.

Die Schnitte einer Ebene mit den Projectionsebenen nennt man die Tracen oder Spuren der Ebene; sie sollen durch jenen

Buchstaben bezeichnet werden, mit dem die Ebene bezeichnet wird, und ein über diesen Buchstaben gesetzter Querstrich soll stets die symbolische Bezeichnung einer Spur sein.

Die erste Spur einer Ebene u ist ihr Schnitt mit der ersten Bildebene I und wird mit $\bar{u}_1$ (lese Spur u Eins) bezeichnet; $\bar{u}_2$ ist die zweite, $\bar{u}_3$ die dritte Spur u. s. w.

600. Um eine Ebene u auf eine einfache Weise in ihrer Lage gegen zwei zugeordnete Bildebenen zu bestimmen, wird man ihre Spuren in diesen Bildebenen anzugeben haben; es ist leicht einzusehen, dass zwei zugeordnete Spuren einer Ebene sich immer in der Axe der zugeordneten Bildebenen, d. i. in einem Axenpunkte der Ebene schneiden müssen.

601. Wie versinnlicht man sich die Lage einer Ebene, wenn man ihre erste und zweite Spur kennt?

Fig. 62.

Man versinnlicht sich zuerst die Bildebene II, indem man durch ${}_1X_2$, Fig. 62, ein ebenes Blatt Papier senkrecht zu der horizontal liegenden Zeichnungsebene stellt. In dieser Ebene II zieht man durch den Axenpunkt U nach rechts und aufwärts eine Gerade, welche gegen ${}_1X_2$ ebenso geneigt ist, wie $\bar{u}_2$ gegen ${}_1X_2$, so ist diese Gerade die versinnlichte $\bar{u}_2$.

Legt man dann noch ein ebenes Blatt Papier durch $\bar{u}_1$ und durch die versinnlichte $\bar{u}_2$, so ist die Lage der Ebene u versinnlicht.

602. Wenn man die erste Spur einer Ebene ungeändert lässt, dafür aber $\bar{u}_2$ in alle möglichen Lagen bringt, wie verändert sich die Stellung der Ebene u hiedurch?

Geht $\bar{u}_2$ vom Axenpunkt U nach rechts aufwärts, so geht auch der über der Bildebene I liegende Teil der Ebene u rechts aufwärts; geht $\bar{u}_2$ vom Axenpunkt U nach links aufwärts, so geht auch die Ebene u von $\bar{u}_1$ nach links aufwärts, und ist $\bar{u}_2$ weder rechts noch links geneigt, so ist auch die Ebene u weder rechts noch links geneigt, d. h. sie steht senkrecht auf der Bildebene I.

603. Wenn man die zweite Spur einer Ebene ungeändert lässt, dafür aber $\bar{u}_1$ in alle möglichen Lagen bringt, wie verändert sich die Stellung der Ebene u hiedurch?

Wenn der vor der Bildebene II liegende Teil von $\bar{u}_1$ rechts oder links geneigt ist, so ist auch der vor der Bildebene II liegende Teil der Ebene u rechts oder links geneigt, und steht $\bar{u}_1$ senkrecht auf der Bildaxe, so steht auch die Ebene u senkrecht auf der Bildebene II.

Der Lernende versinnliche sich allemal die Stellungen der Ebene.

604. Wann steht also eine Ebene auf einer Bildebene senkrecht?

Wenn die Spur in der zugeordneten Bildebene senkrecht auf der Bildaxe steht.

605. Wenn $\bar{u}_1$ parallel zur Bildaxe ${}_1X_2$ ist, welche Lage muss die zugeordnete $\bar{u}_2$ annehmen?

$\bar{u}_2$ muss ebenfalls zu ${}_1X_2$ parallel sein, weil sich zwei zugeordnete Spuren in der Bildaxe schneiden müssen (600) und hier dieser Schnittpunkt im unendlich fernen Punkt der Bildaxe liegt.

606. Wenn $\bar{u}_1$ parallel zur Bildaxe ist, und $\bar{u}_2$ im Unendlichen liegt, welche Lage erhält die Ebene u?

Sie wird parallel zur Bildebene II, steht also senkrecht zur Bildebene I.

607. Wenn $\bar{u}_2$ parallel zur Bildaxe ist, und $\bar{u}_1$ im Unendlichen liegt, welche Lage erhält die Ebene u?

Sie wird parallel zur Bildebene I, steht also senkrecht auf der Bildebene II.

608. Wie weit erstreckt sich die orthogonale Projection einer unbegrenzten Ebene u?

Die ganze Bildebene ist das Bild der Ebene u; denn wenn die Ebene u schief zur Bildebene steht, so muss jeder zur Bildebene senkrechte Sehstral sowol die Ebene u, als auch die Bildebene treffen, mithin ist jeder Punkt der Bildebene eine Projection von einem Punkte der Ebene u.

609. Wenn aber eine Ebene u auf einer Bildebene senkrecht steht, was ist dann das Bild der Ebene u auf dieser Bildebene?

Die Flächenausdehnung des Bildes der Ebene ist verschwunden, und nur die Spur der Ebene ist ihr Bild. Steht eine Ebene auf einer Bildebene senkrecht, so bezeichnen wir die Spur in derselben als eine Nullseite der Ebene, um anzuzeigen, dass die Flächenausdehnung des Bildes der Ebene zu Null geworden ist; das Symbol zur Bezeichnung der Nullseite besteht darin, über das Symbol der Spur eine Null zu setzen. $\mathring{\bar{u}}_1$ (lese Nullseite u_1) würde sonach bedeuten, dass die Ebene u auf der Bildebene I senkrecht steht. Zu Bildebenen senkrechte Ebenen nennt man auch projicierende Ebenen, oder Sehebenen. Eine Einser - Sehebene steht senkrecht auf der ersten, eine Zweier-Sehebene auf der zweiten Bildebene u. s. f.

610. Was gibt die Ebene II auf jeder zugeordneten Bildebene für ein Bild?

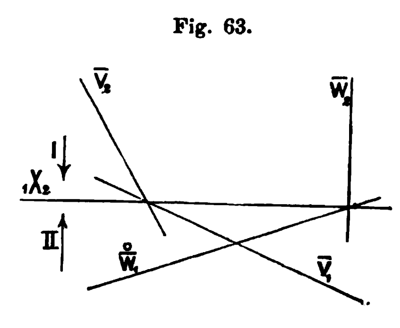


Fig. 63.

Die Bildebene II zeigt in der Bildebene I die Nullseite, und zwar ist die Bildaxe die Nullseite der Ebene II. Es muss also jeder Punkt der Bildebene II sein erstes Bild in der Nullseite von II, d. i. in der Bildaxe liegen haben (558).

611. Was gibt die Ebene I auf jeder zugeordneten Bildebene II für ein Bild?

Die Bildebene I zeigt in der zugeordneten Bildebene II die Nullseite, und zwar ist die Bildaxe die Nullseite der Ebene I. Es muss also jeder Punkt der Bildebene I sein zweites Bild in der Nullseite von I, d. i. in $_1X_2$ liegen haben (558).

612. Wenn wir senkrecht zur Bildebene I in dem Sinne sehen, wie es der Sehpfeil I angibt, so nennen wir die dem Auge zugewendete Seite einer Ebene u ihre Oberseite; wenn wir aber senkrecht zur Bildebene II im Sinne des Sehpfeiles II sehen, so bezeichnen wir die dem Auge zugewendete Seite einer Ebene u als Vorderseite, die andere Seite als Rückseite der Ebene u.

613. Welche Lagen müssen die Spuren einer Ebene u besitzen, wenn die Oberseite zugleich Vorderseite sein soll?

$\bar{u}_1$ und $\bar{u}_2$ müssen gleichzeitig nach rechts oder gleichzeitig nach links gerichtet sein; dabei meinen wir wie immer

von $\bar{u}_2$ den über der Bildebene I, und von $\bar{u}_1$ den vor der Bildebene II liegende Teil. Es ist daher in Figur 62 die Oberseite die Vorderseite, d. h. wenn das projicierende Auge senkrecht zur Bildebene I sieht, so sieht es von der Ebene u dieselbe Seite, als wenn es projicierend senkrecht zur Bildebene II sieht.

614. Welche Lagen müssen die Spuren einer Ebene besitzen, wenn die Oberseite zugleich Rückseite sein soll?

Wenn von den positiv liegenden Teilen die eine Spur rechts die andere links geht, so ist die Oberseite zugleich Rückseite. Dieser Fall ist bei der Ebene v in Fig. 63 vorhanden, wovon man sich am einfachsten durch Versinnlichung der Ebene v überzeugt (601). Bei der Ebene w ist keine Oberseite vorhanden, weil sie in der Bildebene I die Nullseite $\overset{0}{\bar{w}}$ zeigt (609).

615. Wo liegt das zugeordnete Bild einer Ebenenspur?

In der Bildaxe. Sind z. B. die m^{te} und die n^{te} Bildebene einander zugeordnet, so liegt von der m^{ten} Spur einer Ebene u das zugeordnete n^{te} Bild in der Bildaxe ${}_mX_n$ und in gleicher Weise liegt auch von der n^{ten} Spur das zugeordnete Bild in der Bildaxe ${}_mX_n$.

616. Also liegt das zweite Bild der ersten Spur einer Ebene in der Bildaxe ${}_1X_2$ und

617. das erste Bild der zweiten Spur einer Ebene ebenfalls in der Projectionsaxe ${}_1X_2$.

Der Beweis der Richtigkeit dieser Sätze ist leicht geführt, wenn man wirklich jede Spur auf die zugeordnete Bildebene projiciert.

Beurteilung der Lage einer Ebene ohne ihren Spuren. Spurparallele.

§. 31.

618. Wie kann man die Lage einer Ebene ohne Angabe ihrer Spuren bestimmen?

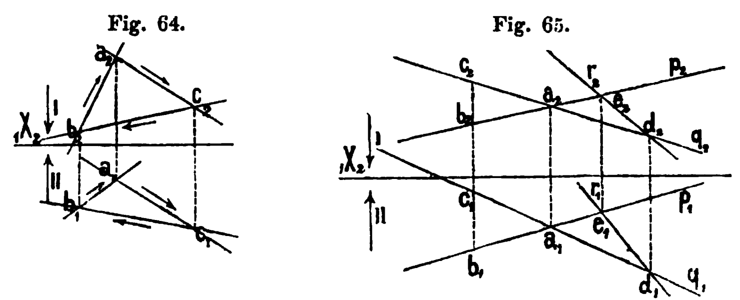
a) Durch drei Punkte, die nicht in derselben geraden Linie liegen;

b) durch eine Gerade und einen ausser ihr liegenden Punkt, oder

c) durch zwei sich schneidende gerade Linien, deren Schnittpunkt auch im Unendlichen liegen kann.

619. Wie wird man bei einer durch drei Punkte bestimmten Ebene erkennen, ob die Oberseite Vorder- oder Rückseite ist?

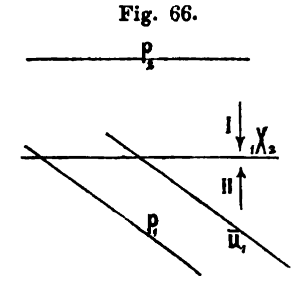
Fig. 64. Fig. 65.



Wenn die Reihenfolge der Projectionen der Punkte in beiden Bildebenen dieselbe ist, so ist die Oberseite zugleich Vorderseite; ist aber die Reihenfolge der Projectionen in beiden Bildebenen einander entgegengesetzt, so ist die Oberseite zugleich Rückseite.

Um sich von der Wahrheit dieses Satzes zu überzeugen, schneide sich der Lernende aus steifem Papiere ein Dreieck *abc* und zeichne drei Pfeile an dessen Seiten, von welchen einer von *a* gegen *c*, der zweite von *c* gegen *b* und der dritte von *b* gegen *a* zeigt.

Fig. 66.



Hält man dieses Dreieck *abc* derart, dass seine Oberseite zugleich Vorderseite ist, und projiciert man das Dreieck sammt den Pfeilen auf beide Bildebenen I und II, so wird man bemerken, dass in beiden Projectionen die Pfeile entweder von links nach rechts, oder von rechts nach links den Umfang zu durchlaufen angeben. Fig. 64.

Ist aber die Oberseite eines Dreieckes *def* zugleich Rückseite, so findet man, wenn die Pfeile in der einen Projection von rechts nach links den Umfang durchlaufen, dies in der anderen Projection gerade im entgegengesetzten Sinne geschieht.

620. Wie wird man bei einer durch zwei sich schneidende Gerade gegebenen Ebene beurteilen, ob die Oberseite Vorder- oder Rückseite ist?

Man wird das Beispiel auf den Fall von drei die Ebene bestimmenden Punkten zurückführen und dann die Reihenfolge der

Projectionen beachten (619). In Fig. 65 wurde eine Ordinale gezogen, wodurch sich die Punkte $b_2 c_2 b_1 c_1$ ergaben. Nun ist die Reihenfolge $a_2 b_2 c_2$ dieselbe wie $a_1 b_1 c_1$, folglich ist die Oberseite der Ebene pq zugleich Vorderseite.

621. Wie versinnlicht man sich am leichtesten eine durch zwei sich schneidende Gerade dargestellte Ebene?

Man versinnlicht sich zuerst den Durchschnittspunkt und von diesem aus jene Teile der beiden Geraden, welche gegen eine und dieselbe Bildebene gerichtet sind. Dadurch erhält man eine Vorstellung von der Lage der beiden Geraden und vermag dann auch durch Anschauung schnell von der durch die Geraden gelegten Ebene zu beurteilen, ob die Oberseite Vorder- oder Rückseite ist.

622. Welche Stellung wird eine Ebene einnehmen, wenn von drei Punkten derselben in einer Projectionsebene die Bilder in einer geraden Linie liegen?

Sie wird auf jener Bildebene senkrecht stehen, in welcher die drei Punktprojectionen in einer Geraden liegen, und diese Gerade ist zugleich die Nullseite der Ebene (609). Würde in Fig. 64 der Punkt b_2 in der Geraden $a_2 c_2$ liegen, so stünde die Ebene abc auf der Bildebene II senkrecht und die Gerade $a_2 c_2$ wäre mit $\overset{\circ}{\bar{u}}_2$ zu bezeichnen; $\bar{u}_1$ stünde dann senkrecht auf ${}_1X_2$.

623. Wenn eine Gerade p zur Bildebene I parallel ist, und man legt durch p irgend eine Ebene u, welche Lage muss $\bar{u}_1$ annehmen?

$\bar{u}_1$ muss zur ersten Projection von p, d. i. zu p_1 parallel sein (125). Versinnlicht man sich zuerst die Gerade p und dann eine durch p gehende Ebene, so erkennt man ohneweiters die Wahrheit des Gesagten aus der Anschauung. Würde $\bar{u}_1$ zu p_1 nicht parallel sein, so müsste $\bar{u}_1$ die p_1 schneiden und durch diesen Schnittpunkt müsste auch die in der Ebene u liegende Gerade p gehen, was nicht sein kann, weil p zur Bildebene parallel ist; mithin muss $\bar{u}_1$ die p_1 erst in unendlicher Entfernung treffen.

624. Was ist die Oberseite der in Fig. 66 durch $\bar{u}_1$ und die Gerade p gehende Ebene u?

Sie ist Rückseite, wovon man sich am einfachsten durch Versinnlichung der Geraden p und sodann der Ebene u überzeugt.

625. Wenn eine Gerade q zur Bildebene II parallel ist, und man legt durch q irgend eine Ebene u, welche Lage muss $\bar{u}_2$ annehmen?

$\bar{u}_2$ muss zum zweiten Bilde von q, d. i. zu q_2 parallel sein.

626. Was verstehen wir unter Spurparallelen einer Ebene u?

Alle geraden Linien, welche zu einer Spur der Ebene u parallel sind und in der Ebene u liegen. Sind die Geraden zur ersten Spur parallel, so sind sie erste oder Einser-Spurparallelen, sind sie zur zweiten Spur parallel, zweite oder Zweier-Spurparallelen u. s. w. In Fig. 66 ist p eine Einser-Spurparallele.

627. Welche Lage besitzt das n^{te} Bild einer n^{ten} Spurparallelen?

Es ist zur n^{ten} Spur der Ebene parallel; das zugeordnete Bild ist hingegen zur Bildaxe parallel (595, 615).

Das Schnittgesetz. Gerade Linien in gegebenen Ebenen zu ziehen. Die Spuren von Ebenen zu bestimmen. Punkte in Ebenen anzunehmen.

§. 32.

628. Wie lautet das Schnittgesetz?

Jede gerade Linie einer Ebene wird von jeder anderen Geraden der Ebene geschnitten, und in jeder Bildebene ist

Fig. 67.

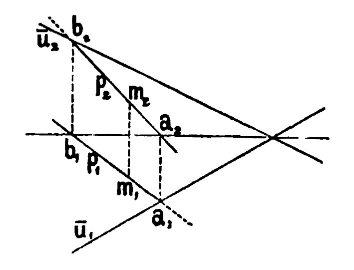


Fig. 68.

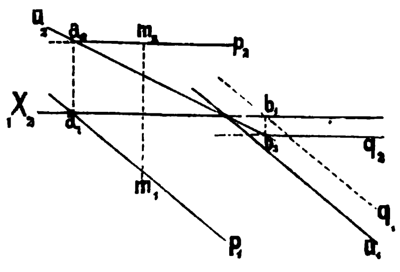
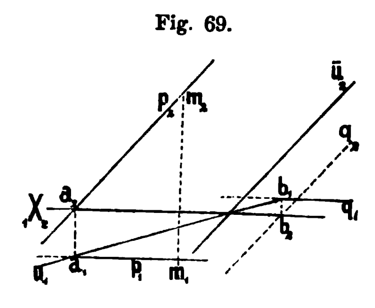


Fig. 69.



der Schnittpunkt der Linien-Projectionen das Bild vom Schnittpunkt der Geraden im Raume.

Man erkennt hieraus auch die Richtigkeit der Behauptung: die n^{te} Spur einer jeden in einer Ebene u liegenden Geraden (575) liegt auch in der n^{ten} Spur der Ebene u (599).

629. Wenn eine Ebene u durch zwei zugeordnete Spuren gegeben ist, wie wird man die Projectionen einer Geraden darstellen, welche in der Ebene u liegt?

Man wird Fig. 67 in $\bar{u}_1$ einen Punkt a_1, ebenso in $\bar{u}_2$ einen Punkt b_2 annehmen (615), diese Punkte a_1 und b_2 als Spuren der zu suchenden Geraden p ansehen (575), und in jeder Bildebene die Projectionen der beiden Punkte a und b zu den Projectionen $p_1 p_2$ der Geraden p verbinden.

630. Wenn eine Ebene u durch zwei zugeordnete Spuren gegeben ist, wie wird man eine Einser-Spurparallele darstellen?

Man wird Fig. 68 in der zugeordneten Spur, d. i. in $\bar{u}_2$ irgend einen Punkt a_2 als zweite Spur der Einser-Spurparallelen annehmen, das erste Bild p_1 einer durch diesen Punkt gehenden Geraden p parallel zu $\bar{u}_1$, das zweite Bild p_2 parallel zu ${}_1X_2$ ziehen, so ist die so dargestellte Gerade p eine Einser-Spurparallele (626).

Man versinnliche sich die Ebene u und die Spurparallelen p und q (578, 621).

631. Wenn eine Ebene u durch zwei zugeordnete Spuren gegeben ist, wie wird man eine Zweier-Spurparallele darstellen?

Man wird Fig. 69 in $\bar{u}_1$ einen beliebigen Punkt a_1 als erste Spur der Zweier-Spurparallelen annehmen, das zweite Bild p_2 einer durch diesen Punkt gehenden Geraden p parallel zu $\bar{u}_2$, das erste Bild p_1 parallel zu $\bar{u}_2$, das erste Bild p_1 parallel zu ${}_1X_2$ ziehen, so ist die so dargestellte Gerade p eine Zweier-Spurparallele (627).

Die Ebene u und die Zweier-Spurparallelen p und q wolle sich der Lernende versinnlichen.

632. Wenn eine Ebene u durch zwei zugeordnete Spuren gegeben ist, wie findet man die Spuren einer in der Ebene u liegenden Geraden p, wenn man nur das erste Bild p_1 kennt?

Der mit a_1 zu bezeichnende Schnitt von p_1 mit $\bar{u}_1$ ist die erste Spur der Geraden p (628) und der Schnitt b_1 mit ${}_1X_2$ ist das erste Bild der zweiten Spur der Geraden p. Ferner liegt a_2 in

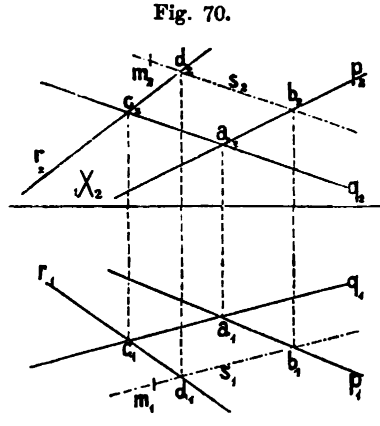
${}_{1}X_2$ und b_2 in $\bar{u}_2$, mithin ist $a_2 b_2$ das zweite Bild p_2 der Geraden p, deren erste Spur in a_1, deren zweite Spur in b_2 liegt.

633. **Wie findet man die Spuren einer in einer Ebene u liegenden Geraden p, wenn von der Geraden nur das zweite Bild p_2 gegeben ist?**

Der mit b_2 zu bezeichnende Schnitt von p_2 mit $\bar{u}_2$ ist die zweite Spur der Geraden p und b_1 liegt in ${}_{1}X_2$. Der mit a_2 zu bezeichnende Schnitt von p_2 mit ${}_{1}X_2$ ist das zweite Bild des Schnittes der Geraden p mit der Bildebene I, und a_1 liegt in $\bar{u}_1$. Also sind die beiden Spuren b_2 und a_1 gefunden. Das erste Bild p_1 geht durch a_1 und b_1.

634. **Wenn eine Ebene u durch die zugeordneten Bilder dreier Punkte abc gegeben ist, wie wird man gerade Linien dieser Ebene darstellen?**

Fig. 70.



Man wird Fig. 64 in jeder Bildebene die Projectionen der Punkte abc durch unbegrenzte gerade Linien verbinden, so sind diese die Projectionen der Geraden, welche im Raume die gegebenen Punkte der Ebene verbinden.

Will man noch andere gerade Linien dieser Ebene u darstellen, so wird man irgend einen Punkt der einen Geraden mit irgend einem Punkt der anderen Geraden verbinden (574).

635. **Wie wird man mehrere gerade Linien einer Ebene darstellen, wenn die Ebene durch eine Gerade und einen ausser ihr liegenden Punkt gegeben ist?**

Man wird den Punkt mit der Geraden durch eine oder mehrere gerade Linien verbinden (592). Die Verbindungsgerade kann auch mit der gegebenen Geraden parallel sein (596).

636. **Wie wird man eine gerade Linie einer Ebene darstellen, wenn die Ebene durch zwei beliebige sich schneidende Gerade gegeben ist?**

Man wird in jeder der beiden Geraden einen Punkt annehmen (574) und die Punkte durch eine Gerade verbinden.

637. Wie wird man die zweite Projection r_2 einer Geraden r bestimmen, wenn man von ihr die erste Projection r_1 kennt, und wenn die Ebene u, in welcher die Gerade r liegen soll, durch zwei beliebige sich schneidende Gerade p und q gegeben ist?

Man wird Fig. 65 auf die Geraden p und q das Schnittgesetz anwenden (628). Das erste Bild r_1 der zu suchenden Geraden r schneidet die ersten Bilder p_1 und q_1 der die Ebene u bestimmenden Geraden p und q. Zieht man durch diese Punkte d_1 und e_1 Ordinalen, bis sie die zugeordneten zweiten Bilder p_2 und q_2 der gegebenen Geraden p und q schneiden, so sind diese Schnittpunkte d_2 und e_2 die zweiten Bilder der Schnittpunkte d und e im Raume. Verbindet man beide Punkte d_2 und e_2 durch eine Gerade, so ist diese das zweite Bild r_2, welches man suchte.

638. Wie wird man die erste Projection r_1 einer Geraden r bestimmen, wenn man von ihr die zweite Projection r_2 kennt, und wenn die Ebene u, in welcher die Gerade r liegen soll, durch zwei sich schneidende Geraden p und q gegeben ist?

Man wird Fig. 65 auf die Geraden p, q und r das Schnittgesetz anwenden. Das zweite Bild r_2 der zu suchenden Geraden r schneidet die zweiten Bilder $p_2 q_2$ der die Ebene u bestimmenden Geraden p und q. Zieht man durch diese Punkte d_2 und e_2 Ordinalen, bis sie die zugehörigen ersten Bilder $p_1 q_1$ der gegebenen Geraden p und q schneiden, so sind diese Schnittpunkte $d_1 e_1$ die ersten Bilder der Schnittpunkte d und e im Raume und durch diese ersten Bilder geht das erste Bild r_1 der Geraden r, welches man sucht.

639. Wie findet man das zweite Bild r_2 einer Geraden r, wenn sie in einer durch zwei Gerade p und q bestimmten Ebene u liegt, und wenn ihr erstes Bild r_1 nicht die beiden ersten Bilder $p_1 q_1$ der gegebenen Geraden p und q in benützbar liegenden Punkten schneidet?

Man wird Fig. 70 in der direct unbenützbar liegenden gegebenen Geraden p einen Punkt $b_1 b_2$ annehmen (574), durch ihn zu der andern gegebenen Geraden $q_1 q_2$ eine Parallele $s_1 s_2$ als Hilfsgerade s ziehen, und die beiden Parallelen q und s zur Bestimmung des zweiten Bildes r_2 genau so wie p und q in (637) benützen.

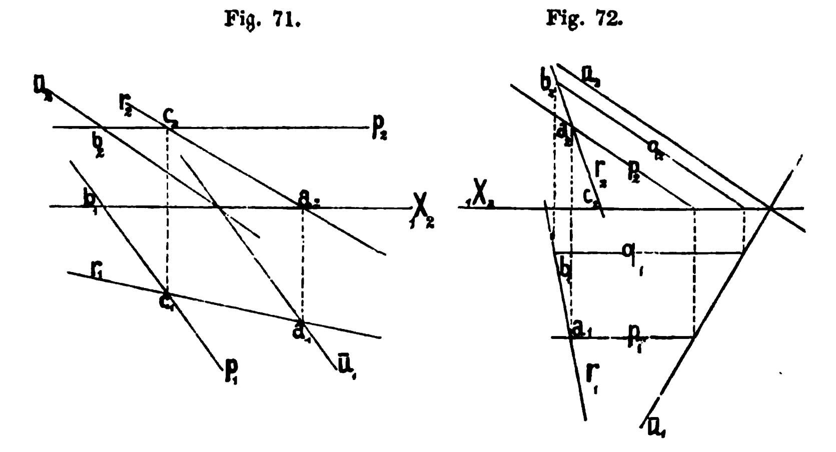
640. Ist statt r_1 das Bild r_2 gegeben gewesen, so wird man ebenfalls die Parallele s ziehen und aus d_2 den Punkt d_1 bestimmen. $c_1 d_1$ ist das gesuchte Bild r_1.

Man versinnliche sich alle in Fig. 70 vorkommenden geraden Linien (578).

641. Wie zieht man in einer Ebene u, welche durch zwei sich schneidende Gerade p und q gegeben ist, eine Einser-Spurparallele?

Das zweite Bild r_2 einer Einser-Spurparallelen r (627) ist parallel zur Bildaxe ${}_1X_2$; also wird man r_2 parallel zu ${}_1X_2$ ziehen und r_1 unter Anwendung des Schnittgesetzes (628) nach einer der vorhergehenden Methoden (637) bestimmen. r_1 ist dann zu der unbekannten $\bar{u}_1$ parallel.

Fig. 71. Fig. 72.



642. Wie zieht man in einer Ebene u, welche durch zwei sich schneidende Gerade p und q gegeben ist, eine Zweier-Spurparallele r?

Das erste Bild r_1 einer Zweier-Spurparallelen r ist parallel zur Bildaxe ${}_1X_2$ (627); also wird man r_1 parallel zu ${}_1X_2$ ziehen, und unter Anwendung des Schnittgesetzes (628) nach einer der vorhergehenden Methoden r_2 bestimmen. r_2 ist dann zu der unbekannten $\bar{u}_2$ parallel.

Wäre in Fig. 70 r_1 parallel zu ${}_1X_2$, so wäre r_2 die Richtung der $\bar{u}_2$; wäre aber r_2 parallel zu ${}_1X_2$, so würde r_1 die Richtung von $\bar{u}_1$ angeben.

643. Wie wird man das zu p_1 oder p_2 zugeordnete Bild einer Geraden p finden, wenn ein Bild p_1 oder p_2

gegeben, und die Ebene u, in welcher die Gerade p liegen soll, durch ihre Spuren $\bar{u}_1 \bar{u}_2$ bestimmt ist?

Man sucht (Fig. 67), wenn p_1 gegeben, die Schnittpunkte $a_1 b_1$ von p_1 mit $\bar{u}_1$ und ${}_1X_2$, ermittelt ihre zugeordneten Bilder $a_2 b_2$ in ${}_1X_2$ und $\bar{u}_2$, so geht p_2 durch a_2 und b_2.

Ist aber p_2 gegeben, so sucht man die Schnitte von p_2 mit $\bar{u}_2$ und ${}_1X_2$, alsdann geht, sobald b_1 und a_1 gefunden, p_2 durch a_1 und b_1.

644. Wenn eine Gerade r in einer Ebene u liegt, von der Geraden r nur ein Bild r_1 oder r_2 gegeben ist, und wenn die Schnitte dieser Geraden r mit einer oder mit beiden Spuren der Ebene u an unbenützbaren Orten liegen, wie findet man das zugeordnete Bild der Geraden r?

Man zeichnet die Projectionen von einer und falls es nothwendig ist, von zwei Spurparallelen p und q der Ebene u, deren Schnittpunkte mit der durch r_1 oder r_2 gegebenen Geraden r der Ebene u, benützbar liegen, so ergibt sich hieraus die gesuchte zugeordnete Projection von r.

645. In Fig. 71 sei r_2 zu bestimmen, wenn r_1 gegeben ist. r_1 schneidet wol $\bar{u}_1$ in a_1, aber der Schnittpunkt von r_1 mit ${}_1X_2$, als dem ersten Bilde von $\bar{u}_2$ (617), liegt an einem unbenützbaren Orte. Weil r_1 die $\bar{u}_1$ schneidet, so wird man als Hilfsgerade eine zu $\bar{u}_1$ parallele Gerade p der Ebene u ziehen (630), diese wird r_1 in einem Punkte c_1 schneiden, mithin ist $a_2 c_2$ das gesuchte zugeordnete Bild r_2 der Geraden r.

646. Setzt man in Fig. 71 voraus, r_2 sei gegeben und r_1 gesucht, so sieht man, dass r_2 zwar nicht $\bar{u}_2$ aber das zweite Bild von $\bar{u}_1$, d. i. ${}_1X_2$ an einem benützbaren Orte $a_2 a_1$ schneidet. Desshalb zieht man eine Einser-Spurparallele $p_1 p_2$, wodurch in c_2 das zweite Bild des Schnittes von p mit r entsteht. Sucht man c_1 und verbindet a_1 mit c_1, so ist $a_1 c_1$ das gesuchte zugeordnete Bild r_1 der Geraden r.

647. In Fig. 72 sei vorausgesetzt r_1 schneide $\bar{u}_1$ und das erste Bild ${}_1X_2$ von $\bar{u}_2$ an unbenützbaren Orten. Man zieht zwei Zweier-Spurparallelen p und q und wendet auf sie und r das Schnittgesetz (628) an. r_1 schneidet p_1 in a_1, q_1 in b_1 und a_2 liegt in p_2, b_2 in q_2, mithin ist die Gerade $a_2 b_2$ die zweite Projection r_2 der Geraden r.

648. Setzt man in Fig. 72 voraus r_2 sei gegeben, so findet man wol, dass r_2 das zweite Bild ${}_1X_2$ von $\bar{u}_1$ in c_2 schneidet; allein weil das erste Bild c_1 an einer unbenützbaren Stelle liegt, so ist der Punkt $c_1\,c_2$ überhaupt unbenützbar. Man wird deshalb zwei Spurparallelen p und q ziehen, die entweder zu $\bar{u}_1$ oder zu $\bar{u}_2$ parallel sind. Nun schneidet r_2 die Bilder p_2 und q_2 in a_2 und b_2, zu welchen Punkten die zugeordneten Bilder a_1 in p_1 und b_1 in q_1 gehören, folglich ist $a_1\,b_1$ die gesuchte erste Projection r_1 der Geraden r.

649. Ist $a_1\,b_1$ oder $a_2\,b_2$ senkrecht zu ${}_1X_2$, so ist die Methode dieselbe wie in (647), um ein Paar Punkte a und b der Geraden r zu bestimmen.

650. Wie findet man die erste Spur einer Ebene u?

Man sucht von irgend zwei in der Ebene u liegenden Geraden p und q die ersten Spuren, so geht durch diese zwei Spuren die $\bar{u}_1$ der Ebene u (576).

651. Ist keine der vorhandenen Geraden der Ebene u so beschaffen, dass sie benützbar liegende erste Spuren gibt, so muss man sich nach (658) solche gerade Linien in der Ebene u erst ziehen, welche die Bildebene I an benützbaren Stellen schneiden.

652. Gibt nur eine der gegebenen Geraden p eine benützbar liegende erste Spur d_1, so wird man eine Einser-Spurparallele r construieren (641), und zu ihrem ersten Bilde r_1 durch die gefundene erste Spur d_1 eine Parallele $\bar{u}_1$ ziehen; dann ist diese die gesuchte erste Spur der Ebene u (623).

653. Es kann auch der Fall eintreten, dass $\bar{u}_1$ ganz ausser der Zeichnungsebene liegt, was sich dadurch bemerkbar macht, dass alle ersten Spuren der in der Ebene u liegenden Geraden an unbenützbaren Stellen sich ergeben.

654. Wie findet man die zweite Spur einer Ebene u?

Man sucht von irgend zwei in der Ebene liegenden Geraden ihre zweiten Spuren (576), so geht durch dieselben die zweite Spur der Ebene u.

655. Schneidet keine der vorhandenen Geraden die Bildebene II in benützbar liegenden Punkten, so muss man sich nach (659) solche gerade Linien in der Ebene erst ziehen, welche die Bildebene II in benützbar liegenden Punkten schneiden.

656. Gibt nur eine der gegebenen Geraden einen benützbaren Schnitt $c_1\,c_2$ in der Bildebene II, so wird man durch diese

Spur c_2 eine Parallele $\bar{u}_2$ zu dem zweiten Bild r_2 einer Zweier-Spurparallelen r der Ebene u ziehen, welche man sich vorher construierte (642).

657. Tritt der Fall ein, dass alle Geraden der Ebene u die Bildebene II in unbenützbar liegenden Punkten schneiden, so kann man $\bar{u}_2$ nicht construieren.

658. Wie zieht man in einer Ebene u eine Gerade r, von der man wo möglich eine benützbar liegende erste Spur erhält?

Man nimmt das zweite Bild r_2 der Geraden r so an, dass es die Projectionsaxe ${}_1X_2$ noch innerhalb der Zeichnungsebene schneidet, und sucht das erste Bild r_1. Fällt der Schnitt von r mit der Bildebene I dennoch an eine unbenützbare Stelle, so bietet sich dadurch wenigstens ein Mittel zum Beurteilen, wie man besser das zweite Bild r_2 der Geraden neuerdings annehmen muss, um zum Ziele zu gelangen.

659. Wie zieht man in einer Ebene u eine Gerade r, von der man womöglich eine benützbar liegende zweite Spur erhält?

Man nimmt das erste Bild r_1 der Geraden r so an, dass es die Bildaxe ${}_1X_2$ noch innerhalb der Zeichnungsebene schneidet und sucht das zweite Bild r_2. Fällt der Schnitt von r mit der Bildebene II dennoch ausserhalb der Zeichnungsfläche, so kann man wenigstens aus r beurteilen, wie eine neue geeignetere Gerade zu wählen sein wird.

660. Was ist darunter zu verstehen, einen Punkt oder eine Gerade in einer Ebene anzunehmen?

Darunter versteht man die Projectionen eines Punktes oder einer Geraden so zu wählen, auf dass durch die Projectionen der Ort des Punktes oder der Geraden in der Ebene bestimmt ist.

661. Wie findet man die zweite Projection m_2 eines Punktes m einer Ebene u, wenn m_1 und $\bar{u}_1 \bar{u}_2$ gegeben sind?

Man zieht (Fig. 68) durch m_1 zu $\bar{u}_1$ parallel das erste Bild p_1 einer Einser-Spurparallelen p der Ebene u und sucht ihre zweite Spur, also den Schnitt a_1 von p_1 mit dem ersten Bilde ${}_1X_2$ der $\bar{u}_2$; so liegt Spur a_2 in $\bar{u}_2$ und p_2 läuft mit ${}_1X_2$ parallel. In p_2 befindet sich m_2.

662. Man hätte auch (Fig. 69) durch m_1 das erste Bild p_1 einer Zweier-Spurparallelen p parallel zu ${}_1X_2$ ziehen können; dann ist der Schnitt a_1 von p_1 mit $\bar{u}_1$ die erste Spur der Geraden p. Nun geht p_2 durch a_2 parallel mit $\bar{u}_2$ und enthält das gesuchte Bild m_2.

663. Wie findet man die erste Projection m_1 eines Punktes m einer durch $\bar{u}_1 \bar{u}_2$ gegebenen Ebene u, wenn m_2 gegeben ist?

Man zieht (Fig. 69) durch m_2 zu $\bar{u}_2$ parallel das zweite Bild p_2 einer Zweier-Spurparallelen p der Ebene u und sucht die erste Spur von p; von dieser ist der Schnitt a_2 von p_2 mit ${}_1X_2$ das zweite Bild; a_1 liegt in $\bar{u}_1$ und p_1 läuft mit ${}_1X_2$ parallel. In p_1 befindet sich m_1.

Man hätte auch m_1 aus m_2 nach Fig. 68 bestimmen können.

664. Wie bestimmt man das zweite Bild m_2 eines Punktes m einer Ebene u, wenn m_1 bekannt, und die Ebene u durch zwei sich schneidende Gerade p und q gegeben ist?

Man zieht Fig. 70 durch m zu einer der gegebenen Geraden, z. B. zu q eine Parallele s, indem man s_1 parallel zu q_1 durch m_1 legt, den Schnittpunkt $b_1 b_2$ mit p ermittelt und durch b_2 zu q_2 eine Parallele s_2 construiert. In s_2 liegt m_2.

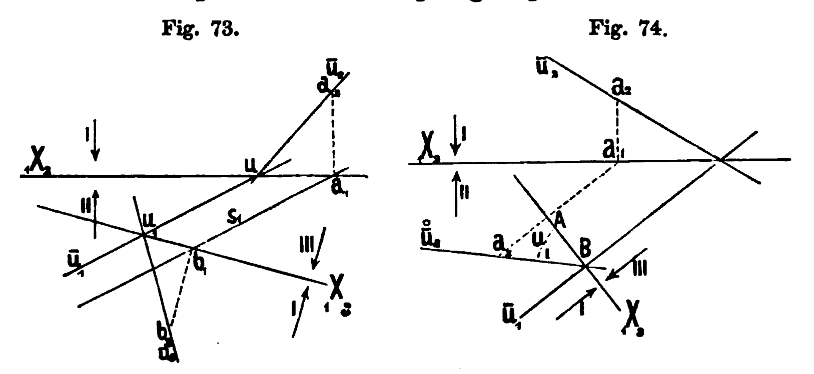


Fig. 73. Fig. 74.

Ist m_2 gegeben, so wird man s_2 parallel zu q_2 ziehen, $b_2 b_1$ ermitteln, s_1 parallel mit q_1 zeichnen, und m_1 durch eine Ordinale aus m_2 in s_1 bestimmen.

Bisweilen wird man statt s parallel zu einer der gegebenen Geraden zu ziehen, s so wählen, dass die Schnittpunkte von s

mit p und q benützbar liegen. Es lässt sich dann ebenfalls zu m_1 oder m_2 die zugeordnete Projection finden.

Man beachte die Ausführung in Farben nach (559).

Die Spuren von Ebenen in dritten Bildebenen zu suchen. Die Neigungswinkel von Ebenen gegen Bildebenen zu messen.

§. 33.

665. Wenn man eine dritte Bildebene senkrecht zu einer der Bildebenen I oder II einführt, wie findet man die dritte Spur einer Ebene u?

Man wählt in der Ebene u zwei gerade Linien und sucht ihre dritten Spuren (575): dann geht $\bar{u}_3$ durch diese zwei Punkte. In Fig. 73 ist die Ebene u durch zwei Spuren $\bar{u}_1 \bar{u}_2$ gegeben und die Bildebene III steht senkrecht zur Bildebene I (561).

Von den zwei zu wählenden Geraden ist $\bar{u}_1$ am geeignetsten, weil ihr Schnitt mit der Bildaxe $_1X_3$ schon ein Punkt u_1 in $\bar{u}_3$ ist. Eine andere geeignete Gerade ist dann eine Einser-Spurparallele s (626), von welcher man blos das erste Bild s_1 zu zeichnen braucht. Diese Einser-Spurparallele schneidet offenbar die Bildebenen II und III in zwei von der Ebene I gleichweit entfernten Punkten $a_1 a_2$ und $b_1 b_3$, deren erste Bilder beziehungsweise in den Bildaxen $_1X_2$ und $_1X_3$ liegen. Zieht man durch b_1 eine Ordinale zu $_1X_3$ und sagt, indem man auf die Zeiger von $_1X_3$ sieht: Zum dritten Bild gehört die erste Ordinate; und, indem man seine Blicke auf die Zeiger von $_1X_2$ wendet: zur ersten Ordinate das zweite Bild, so weiss man, dass der Abstand a_2 von $_1X_2$ nach $b_1 b_3$ zu übertragen ist (562). Nun ist $u_1 b_3$ die gesuchte $\bar{u}_3$.

666. Ist eine Ebene u durch zwei sich schneidende beliebige Gerade p und q gegeben (591), so nimmt man in jeder Geraden zwei Punkte an (574), sucht ihre dritten Bilder (562) und verbindet sie entsprechend zu den dritten Bildern p_3 und q_3 der gegebenen Geraden. Kennt man die ersten und dritten Bilder $p_1 q_1$ $p_3 q_3$, so kann man die Schnittpunkte der Geraden p und q mit der Bildebene III nach der Methode von (576) construieren, und sie zu $\bar{u}_3$ verbinden.

Wenn man das dritte Bild des Durchschnittspunktes beider Geraden bestimmt, so braucht man von jeder Geraden nur noch die Bilder eines Punktes zu construieren.

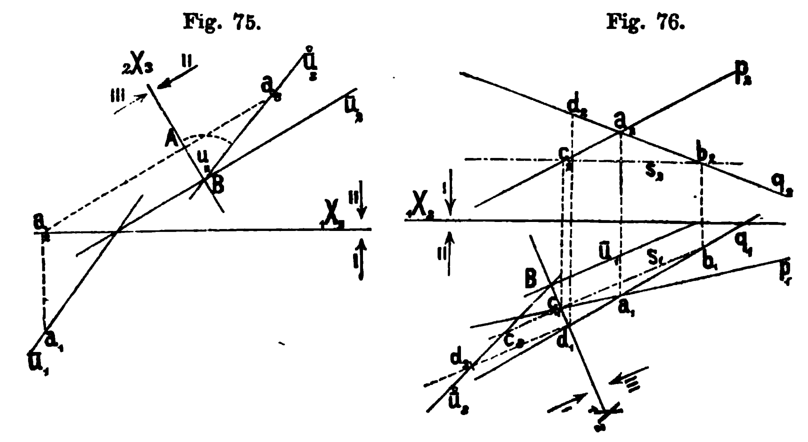
667. **Wie muss man die dritte Bildebene wählen, damit die dritte Spur zugleich Nullseite der Ebene ist?**

Senkrecht zu $\bar{u}_1$ oder $\bar{u}_2$ der Ebene u. In einem solchen Falle darf man nur von zwei beliebigen Punkten der Ebene u die dritten Bilder suchen, weil diese in $\mathring{\bar{u}}_3$ liegen müssen (609).

In Fig. 74 wurde die Ebene III senkrecht zu $\bar{u}_1$ geführt, mithin muss ${}_1X_3$ auf $\bar{u}_1$ senkrecht stehen.

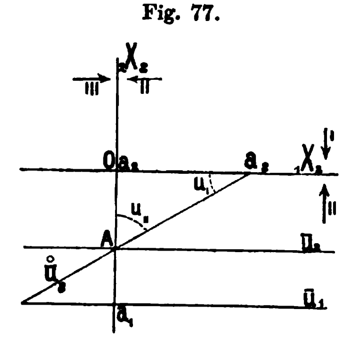
Der Schnitt B von $\bar{u}_1$ mit ${}_1X_3$ ist schon ein Punkt von $\mathring{\bar{u}}_3$. Wählt man jetzt einen Punkt $a_2\,a_1$ in Spur $\bar{u}_2$ und sucht das dritte Bild a_3, so ist Ba_3 die gesuchte Nullseite $\mathring{\bar{u}}_3$ (562).

Fig. 75. Fig. 76.



668. In Fig. 75 wurde die Bildebene III senkrecht zu $\bar{u}_2$, also ${}_2X_3$ senkrecht zu $\bar{u}_2$ gewählt. Der Schnittpunkt von $\bar{u}_2$ mit ${}_2X_3$ ist ein Punkt von $\mathring{\bar{u}}_3$. Wählt man in $\bar{u}_1$ einen Punkt $a_1\,a_2$ und sucht sein drittes Bild a_3 (556), so ist Ba_3 die gesuchte Nullseite $\mathring{\bar{u}}_3$.

Fig. 77.



669. **Wie findet man die Nullseite einer Ebene u, wenn diese durch zwei sich schneidende Gerade p und q gegeben ist?**

Die Nullseite einer Ebene u ist ihre Spur in jener Bildebene, auf welcher die Ebene u senkrecht steht; folglich müssen wir eine Bildebene III **senkrecht** zur Ebene u einführen und $\bar{u}_3$ ermitteln.

Führen wir die Bildebene III gleichzeitig auch senkrecht auf eine der vorhandenen Bildebenen, etwa senkrecht auf die Bildebene I, so muss $_1X_3$ senkrecht auf $\bar{u}_1$ stehen. Kennt man $\bar{u}_1$ nicht, so kann man eine Einser-Spurparallele (641), $s_2 s_1$ der Ebene u construieren, Fig. 76, und $_1X_3$ senkrecht auf s_1 errichten.

Die ersten Bilder $c_1 d_1$ der dritten Spuren der Geraden p und q liegen in $_1X_3$; durch Ordinalen findet man $c_2 d_2$ und hieraus die dritten Spuren $c_3 d_3$ (562), durch welche die Nullseite $\mathring{\bar{u}}_3$ geht.

Der Schnitt von $\mathring{\bar{u}}_3$ mit $_1X_3$ ist zugleich der Schnittpunkt von $\bar{u}_1$ mit $_1X_3$. Mit s_1 läuft $\bar{u}_1$ parallel.

670. Hätte man die Bildebene III senkrecht zu $\bar{u}_2$ führen wollen, so hätte man entweder $\bar{u}_2$ oder eine Zweier-Spurparallele s gesucht und $_2X_3$ senkrecht zum zweiten Bilde s_2 derselben gezogen. Hierauf würde man die Schnitte zweier Geraden p und q der Ebene u mit der Bildebene III gesucht und durch die dritten Bilder dieser Schnitte $\mathring{\bar{u}}_3$ gezogen haben.

671. Wie sucht man das Mass des Neigungswinkels einer Ebene u mit der Bildebene I?

Man führt auf $\bar{u}_1$ eine senkrechte Bildebene III, alsdann ist der von $\mathring{\bar{u}}_3$ mit $_1X_3$ gebildete Winkel das Mass der Neigung der Ebene u gegen die Bildebene I, oder kürzer gesagt, das Mass der ersten Neigung der Ebene u (134).

Den Neigungswinkel einer Ebene u gegen eine Bildebene werden wir durch den Buchstaben der Ebene u mit der römischen Ziffer der Bildebene als Index bezeichnen; also ist $\measuredangle\, u_I$ das Mass des Neigungswinkels der Ebene u gegen die Bildebene I.

In den Fig. 74 und 76 ist demnach das Mass der ersten Neigung der Ebene u, d. i. $\measuredangle\, u_I$ aus dem Winkel zwischen $\mathring{\bar{u}}_3$ und $_1X_3$ zu entnehmen.

672. Wie sucht man das Mass des Neigungswinkels einer Ebene u mit der Bildebene II?

Man führt auf $\bar{u}_2$ eine senkrechte Bildebene III, alsdann ist der von $\mathring{\bar{u}}_3$ mit $_2X_3$ gebildete Winkel u_{II} das Mass des besprochenen Neigungswinkels oder das Mass der zweiten Neigung der Ebene u. Siehe Fig. 75.

673. Um in Fig. 77 die Neigungswinkel der Ebene u mit den Bildebenen I und II zu messen, führt man eine Bildebene III senkrecht auf beide zu einander parallele Spuren und ermit-

telt $\overset{\circ}{u}_3$; der von $\overset{\circ}{u}_3$ mit ${}_1X_3$ gebildete Winkel ist das Mass der ersten, der von $\overset{\circ}{u}_3$ mit ${}_2X_3$ gebildete Winkel das Mass der zweiten Neigung der Ebene u.

Die Summe beider $\measuredangle\, u_{I}$ und $\measuredangle\, u_{II}$ beträgt einen Rechten, da sie die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkeligen Dreieckes sind.

In Fig. 77 wurde die Zeichnung der Bildebene III mit jener der Bildebene II vereinigt, weshalb die Bildaxe mit ${}_2X_3$ beschrieben werden musste. Die beiden Geraden der Ebene u, deren dritte Spuren zu suchen sind, werden $\bar{u}_1$ und $\bar{u}_2$ sein. Da $\bar{u}_2$ und $\bar{u}_3$ zugeordnete Spuren der Ebene u, so haben sie einen Punkt in ${}_2X_3$ gemein, folglich ist der Schnitt A von $\bar{u}_2$ mit ${}_2X_3$ auch ein Punkt von $\overset{\circ}{u}_3$.

Den Schnitt von $\bar{u}_1$ mit der Bildebene III bezeichne man mit $a_1 a_2$, so muss a_1 in $\bar{u}_1$, a_2 in ${}_1X_2$, zugleich aber auch in ${}_2X_3$ liegen.

Um a_3 zu finden, bedenke man, dass a_3 und a_2 zugeordnete Bilder sind, mithin muss a_3 in einer durch a_2 gehenden Ordinale zu ${}_2X_3$ liegen. Das dritte Bild findet man aus der zugeordneten Ordinate (der zweiten) und die zweite Ordinate aus dem zugeordneten Bilde (dem ersten), folglich ist $a_1 a_2 = (a_2)$ und wie die Vergleichung mit dem zu (a_2) parallelen Sehpfeile II lehrt, ist (a_2) positiv, also muss (a_2) von O aus auf der zu ${}_2X_3$ gehörenden Ordinale auf der Seite des Sehpfeiles II aufgetragen werden, wodurch nun a_3 gefunden ist. Aa_3 gibt sofort $\overset{\circ}{u}_3$ und hiedurch $\measuredangle\, u_{I}$ und $\measuredangle\, u_{II}$.

674. W i e v e r s i n n l i c h t m a n s i c h d i e L a g e d e r E b e n e u i n F i g. 77?

Man hält die Zeichnungsebene v e r t i c a l vor sich, und versinnlicht sich die Bildebene I, indem man entweder die eben ausgestreckte Handfläche oder ein ebenes Blatt Papier durch ${}_1X_2$ senkrecht zur Zeichnungsebene hält, wodurch die Bildebene I wieder horizontal wird. In dieser Ebene I versinnlicht man sich $\bar{u}_1$, welche Trasse im Abstande $a_1 O$ von ${}_1X_2$ v o r der Bildebene II mit ${}_1X_2$ parallel läuft. Sodann denkt man sich durch $\bar{u}_2$ und die versinnlichte $\bar{u}_1$ eine Ebene gelegt, so gibt uns diese eine klare Vorstellung von der Lage der Ebene u.

Führt man in Gedanken eine Bildebene III senkrecht zu ${}_1X_2$ und sieht von links gegen rechts senkrecht projicierend auf

diese Bildebene III, so wird man die Richtigkeit der Lage von $\mathring{u}_3$ einsehen können.

Lässt man die Zeichnungsebene horizontal liegen, so muss man sich $\mathring{u}_2$ versinnlichen. $\bar{u}_2$ liegt unterhalb ${}_1X_2$ parallel zu ${}_1X_2$ im Abstande $A\,O$. Durch $\mathring{u}_1$ und die versinnlichte $\mathring{u}_2$ geht die Ebene u. Ihre Oberseite ist zugleich Rückseite (612).

675. Wie sind die ersten und zweiten Neigungen einer Ebene u beschaffen, wenn die ersten und zweiten Spuren gleiche Neigung zu ${}_1X_2$ besitzen?

Aus der Construction der Neigungswinkel von u gegen I und II erkennt man mit Sicherheit die Gleichheit beider Flächenwinkel.

Ist die Oberseite der Ebene zugleich Rückseite, so fallen in der Vereinigung der beiden Bildebenen mit der Zeichnungsebene, beide Spuren in eine gerade Linie.

676. Wie gross ist die zweite Neigung einer Ebene u, wenn sie zur Bildebene I senkrecht steht?

Sie ist gleich dem von $\mathring{u}_1$ mit ${}_1X_2$ gebildeten Winkel, weil die Bildebene I sowol auf u, als auf der Bildebene II senkrecht steht.

677. Wie gross ist die erste Neigung einer Ebene u, wenn sie zur Bildebene II senkrecht ist?

Sie ist gleich dem von $\mathring{u}_2$ mit ${}_1X_2$ gebildeten Winkel.

Beurteilung der Lage von Punkten und Geraden gegen eine Ebene. Den Schnitt von geraden Linien mit Ebenen abzubilden. Zu Ebenen parallele Gerade zu construieren.

§. 34.

678. Wenn es sich um Aufgaben handelt, bei welchen man Abstände von Punkten oder Linien bezüglich der Bildebene I beurteilen will, so muss man immer solche Projectionen von diesen Punkten oder Linien betrachten, welche in einer der Bildebene I zugeordneten Bildebene liegen. Stehen z. B. zwei Bildebenen II und III auf der Bildebene I senkrecht, so kann man sowol die zweiten als auch die dritten Bilder von Punkten benützen, um zu erkennen, wie weit die Punkte im Raume von ihren zugeordneten ersten Bildern entfernt sind (556, *b*).

679. In gleicher Weise wird man bei Aufgaben, bei welchen man Abstände von Punkten und Linien bezüglich der Bildebene II

beurteilen will, immer solche Projectionen von diesen Punkten oder Linien betrachten, welche in einer zur Bildebene II zugeordneten Bildebene liegen.

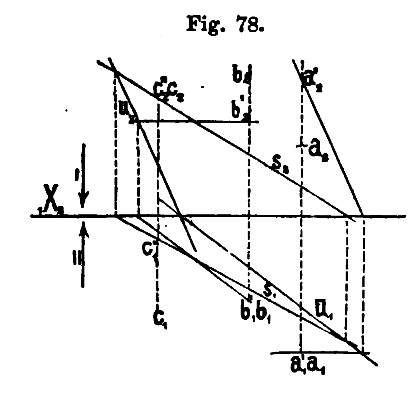
680. **Wie untersucht man, ob ein abgebildeter Punkt über einer gegebenen Ebene u liegt?**

Wir bezeichnen das in unendlicher Entfernung gedachte Auge, welches senkrecht auf die Bildebene I projiciert, selbst mit I, folglich liegt ein gegebener Punkt über einer Ebene u, wenn er dem Auge I näher liegt, als sein in der Ebene u liegender Einser-Deckpunkt (511).

Man muss demnach zu dem gegebenen Punkte einen Einser-Deckpunkt in der Ebene u construieren (681); ist die erste Ordinate (546) des gegebenen Punktes grösser als die erste Ordinate des Einser-Deckpunktes, so liegt der gegebene Punkt über der Ebene u; ist aber die erste Ordinate des gegebenen Punktes kleiner, so liegt der gegebene Punkt unter der Ebene u.

681. **Wie construiert man zu einem gegebenen Punkte $a_1\ a_2$ einen Einser-Deckpunkt a' in einer gegebenen Ebene u?**

Fig. 78.



Der Einser-Deckpunkt a' liegt in der Ebene u und sein erstes Bild a'_1 liegt in a_1 (511). Construiert man eine Spurparallele der Ebene u (631), deren erstes Bild durch a'_1 geht, so muss in ihrem zweiten Bilde a'_2 liegen, wodurch nun zwei zugeordnete Bilder von a' gefunden sind.

In Fig. 78 ist die erste Ordinate (a'_1) des Deckpunktes a' grösser als (a_1) (546), mithin liegt der Punkt a unter der Ebene u.

682. **Wie untersucht man, ob ein abgebildeter Punkt vor einer Ebene u liege?**

Wir bezeichnen das in unendlicher Entfernung gedachte Auge, welches senkrecht auf die Bildebene II projiciert, selbst mit II, folglich liegt ein gegebener Punkt vor einer Ebene u

wenn er dem Auge II näher liegt, als sein in der Ebene u liegender Zweier-Deckpunkt.

Man muss demnach zu dem gegebenen Punkte einen Zweier-Deckpunkt in der Ebene u construieren (683); ist die zweite Ordinate (546) des gegebenen Punktes grösser als die zweite Ordinate des Zweier-Deckpunktes, so liegt der gegebene Punkt vor der Ebene u; ist aber die zweite Ordinate des gegebenen Punktes kleiner, so liegt der gegebene Punkt hinter der Ebene u.

683. **Wie construiert man zu einem gegebenen Punkte $c_1 c_2$ einen Zweier-Deckpunkt c'' in einer gegebenen Ebene u?**

Der Zweier-Deckpunkt c'' liegt in der Ebene u und sein zweites Bild c''_2 fällt mit c_2 zusammen. Construiert man eine Spurparallele oder eine andere Gerade der Ebene u (628), deren zweites Bild durch c''_2 geht, so liegt c''_1 im ersten Bilde dieser Geraden, wodurch nun zwei zugeordnete Bilder von c'' gefunden sind.

In Fig. 78 ist die zweite Ordinate (546) des Deckpunktes c'' kleiner als (c_2), mithin liegt der Punkt c vor der Ebene u.

684. **Wenn ein Punkt über einer Ebene u liegt, kann man dann schon beurteilen, ob er auch vor oder hinter der Ebene u liege?**

Ist von einer Ebene u die Oberseite zugleich Vorderseite, so muss jeder Punkt, der über der Ebene liegt, auch vor der Ebene liegen; und natürlicherweise ein Punkt der unter der Ebene liegt, befindet sich dann auch hinter der Ebene.

Ist aber die Oberseite der Ebene Rückseite, so liegt jeder Punkt über der Ebene hinter der Ebene, und jeder Punkt unter der Ebene vor der Ebene.

Von diesen zwei Sätzen überzeuge man sich durch Versinnlichung der Ebene in den erwähnten Lagen.

685. **Wie kann man untersuchen, ob ein gegebener Punkt in einer gegebenen Ebene u liege?**

Man sucht in der Ebene zu dem gegebenen Punkte einen Deckpunkt (681); fällt dieser mit dem gegebenen Punkte zusammen, dann liegt der letztere in der Ebene.

686. **Wie construiert man in einer Ebene zu einer gegebenen Geraden eine Einser-Deckgerade?**

Man sucht zu zwei im ersten Bilde der Geraden angenommenen Punkten die Einser-Deckpunkte in der Ebene u (681).

Durch die Einser-Deckpunkte geht die gesuchte Einser-Deckgerade. In Fig. 79 ist $p_1 p_2$ die gegebene Gerade p.

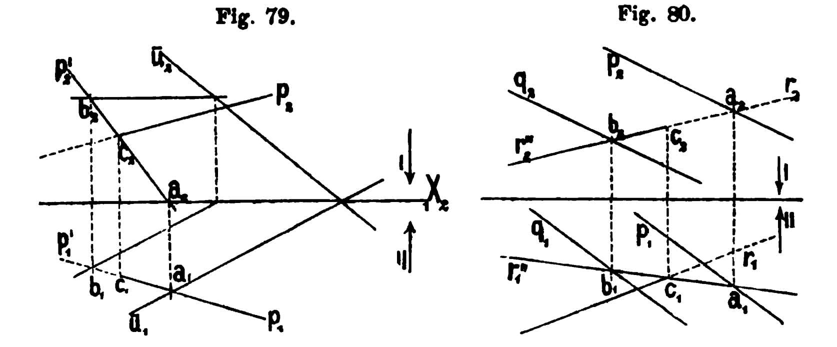
Bezeichnet man die Einser-Deckgerade mit p', so muss p'_1 (lese p Strich Eins) mit p_1 zusammenfallen. Sucht man zu $a_1 b_1$ noch $a_2 b_2$, so sind $p'_1 p'_2$ die zugeordneten Projectionen einer Einser-Deckgeraden zu p.

687. **Wie construiert man in einer Ebene zu einer gegebenen Geraden eine Zweier-Deckgerade?**

Man sucht zu zwei im zweiten Bilde der Geraden angenommenen Punkten die Zweier-Deckpunkte (683), alsdann geht durch sie die gesuchte Zweier-Deckgerade.

In Fig. 80 ist eine Ebene u durch zwei parallele Gerade $p_1 p_2$ und $q_1 q_2$ gegeben; $r_1 r_2$ ist die Gerade r, zu welcher in

Fig. 79. Fig. 80.



u eine Zweier-Deckgerade $r''_2 r''_1$ construiert werden soll. Mit r_2 fällt r''_2 zusammen, und nach (628) wurde r''_1 durch $a_1 b_1$ bestimmt.

688. Wenn in einer Ebene nicht schon passende gerade Linien vorhanden sind, wie in Fig. 80, mit deren Hilfe sich eine Deckgerade zu einer gegebenen Geraden construieren lässt, so wählt man sich in einer Projection der Geraden zwei Punkte und sucht zu diesen, am besten mit Hilfe von Spurparallelen, die Deckpunkte in der Ebene, durch welche sofort die gesuchte Deckgerade geht.

689. **Ist die zu einer Geraden in einer Ebene construierte Deckgerade zu der gegebenen Geraden parallel, so ist diese Gerade auch zur Ebene parallel.**

690. **In welcher Beziehung steht jede Gerade zu ihrer Deckgeraden?**

Jede Gerade **schneidet** ihre Deckgerade, weil beide in einer projicierenden Ebene liegen (609).

691. **Wo liegt der Schnittpunkt einer Geraden mit ihrer Deckgeraden noch?**

In der Ebene, in welcher die Deckgerade liegt.

692. **Wie findet man den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene u?**

Man sucht in der Ebene u eine Deckgerade zu der gegebenen Geraden (686, 687), dann ist ihr Schnittpunkt mit der gegebenen Geraden der gesuchte Schnitt der Geraden mit der Ebene u. In Fig. 79 soll die Gerade $p_1 p_2$ mit der Ebene u zum Schnitt gebracht werden. Man construiert zu p_1 eine Deckgerade p' in der Ebene u, indem man p'_1 mit p_1 zusammenfallen lässt; ist p'_2 gefunden, dann ist der Schnitt c_2 von p_2 mit p'_2 das zweite Bild des Schnittes c von p mit p' oder was dasselbe ist, des Schnittes der Geraden p mit der Ebene u.

In ähnlicher Weise wurden die Projectionen $c_1 c_2$ des Schnittes der Geraden r in Fig. 80 mit der Ebene pq bestimmt.

693. **Welcher Teil einer Geraden p liegt über der Ebene u?**

Derjenige Teil, welcher über der zur Geraden p gehörenden, in der Ebene u liegenden Einser-Deckgeraden sich befindet (680).

In Fig. 79 schneiden die Gerade p und ihre Einser-Deckgerade p' sich in c und weil das zweite Bild p_2 der Geraden p von c_2 aus nach rechts über dem zweiten Bilde p'_2 der Deckgeraden p' liegt, so folgt, dass auch der von c nach rechts liegende Teil von p über der Ebene u liegt. Aus dieser Ursache wurde auch das Stück p_1 von c_1 nach links, als dem Bilde des dem Auge I unsichtbaren Teiles von p, gestrichelt (695). Ueber das Stricheln des zugeordneten Bildes lese man (697).

694. **Welcher Teil einer Geraden liegt vor einer Ebene u?**

Jener Teil, welcher vor der zur Geraden gehörenden in der Ebene u liegenden Zweier-Deckgeraden (687) sich befindet.

In Fig. 80 wurde zu $r_1 r_2$ eine in der Ebene pq liegende Zweier-Deckgerade $r''_1 r''_2$ construiert. Von c_1 nach links liegt r_1 vor r''_1, folglich liegt auch im Raume der von c nach links gehende Teil von r vor der Ebene u; demnach ist von c_2 nach rechts die Gerade r_2 zu stricheln (696).

695. **Wenn ein Teil einer Geraden über, der andere unter einer Ebene liegt, welchen Teil ihres ersten Bildes wird man stricheln oder punktieren?**

Das erste Bild desjenigen Teiles der Geraden, welcher unter der Ebene liegt.

696. Wenn eine Gerade eine Ebene durchschneidet, welchen Teil ihres zweiten Bildes wird man stricheln oder punktieren?

Fig. 81.

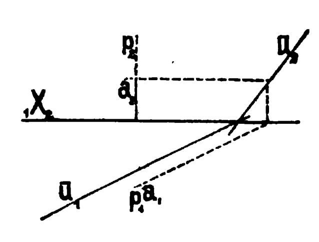
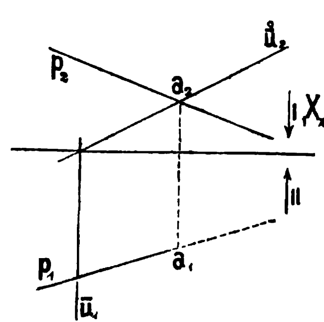


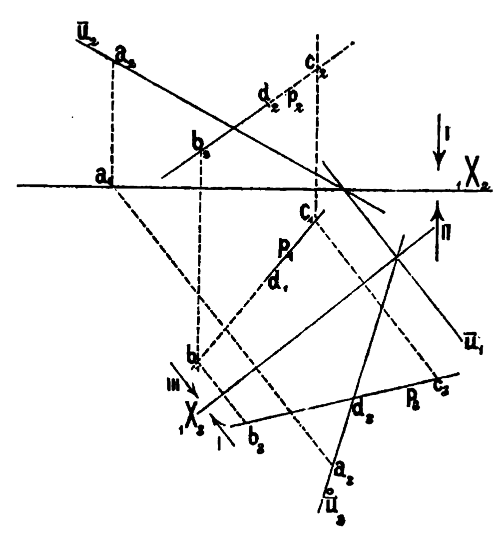
Fig. 82.



Das zweite Bild jenes Teiles der Geraden, welcher hinter der Ebene liegt (682).

697. Wenn eine Gerade eine Ebene durchschneidet, und die Oberseite der Ebene ist Rückseite, können zwei zugeordnete Bildteile der Geraden gleichzeitig gestrichelt sein?

Fig. 83.



Der eine Teil muss voll gezogen, der andere gestrichelt sein, weil der zugehörige Teil der Geraden nicht gleichzeitig über und vor der Ebene liegen kann.

698. Wie findet man den Schnittpunkt einer Geraden p mit einer Ebene u, wenn die Gerade p auf einer Bildebene, z. B. I senkrecht steht?

Die eine Projection p_1, Fig. 81, der Geraden p ist ein Punkt; betrachtet man diesen Punkt als erstes Bild a_1 eines in der Ebene u liegenden Punktes a und bestimmt das zugeordnete Bild a_2 mittels einer Spurparallelen, so sind die Bilder $a_1 a_2$ des Schnittpunktes a der Geraden p mit der Ebene u gefunden.

Der Teil von a nach aufwärts liegt hinter der Ebene u, mithin ist der Teil von a_2 nach aufwärts zu stricheln.

699. Wie findet man den Schnitt einer Geraden p mit einer projicierenden Ebene u?

Der Schnitt der Nullseite der Ebene u mit dem gleichbezifferten Bilde der Geraden p ist schon ein Bild des Schnittpunktes (609). Das zugeordnete Bild liegt in der Ordinale. In Fig. 82 steht die Ebene u auf der Bildebene II senkrecht, also ist die zweite Spur Nullseite der Ebene, daher der Schnitt a_2 von p_2 mit $\mathring{u}_2$ das zweite Bild des Schnittes der Geraden p mit der Ebene u; a_1 liegt in p_1. Im zweiten Bilde von p_2 ist nichts zu stricheln, weil dort die Ebene nichts verdeckt, hingegen ist im ersten Bilde der Teil von a_1 nach rechts zu stricheln.

700. Für welche Bildebene verwandelt man eine gegebene Ebene in eine Sehebene oder projicierende Ebene? (609.)

Führt man eine dritte Bildebene senkrecht zu einer Spur der Ebene, so ist für diese dritte Bildebene die gegebene Ebene eine projicierende; die dritte Spur ist Nullseite der gegebenen Ebene (Fig. 75).

701. Wie bestimmt man mit Hilfe einer dritten Bildebene den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene?

Man wählt die dritte Bildebene senkrecht zu einer Spur der Ebene u, sucht die Nullseite $\mathring{u}_3$ (667) und das dritte Bild der Geraden, dann ist der Schnitt dieser beiden Geraden das dritte Bild des Schnittes der gegebenen Geraden mit der Ebene u (698). Durch Ordinalen findet man die beiden anderen Bilder des Schnittpunktes. In Fig. 83 wurden in p zwei Punkte b und c angenommen (574) und $b_3 c_3$ bestimmt; $b_3 c_3$ schneidet $\mathring{u}_3$ in d_3, also ist d_3 das dritte Bild des Schnittes der Geraden p mit der Ebene u. Das zugeordnete Bild zu d_3 liegt in einer Ordinale zu ${}_1X_3$ in d_1 und das zugeordnete Bild zu d_1 ist d_2. Aus dem dritten Bilde nimmt man durch Vergleichung mit dem zu ${}_1X_3$ gehörenden Sehpfeile I wahr, dass der von d nach c gehende Teil der Ge-

raden p über der Ebene u liegt; demnach sind die Projectionen so zu stricheln und zu ziehen, wie es die Figur zeigt.

702. **Wie findet man den Schnitt einer Ordinalgeraden mit einer Ebene?** (572.)

Durch Hilfe einer dritten Bildebene, etwa senkrecht zu einer Spur der Ebene.

703. **Wie untersucht man, ob eine Gerade zu einer Ebene parallel ist?**

Man sucht in der Ebene eine Deckgerade zu der gegebenen oder zu einer ihr parallelen Geraden. Sind beide Gerade der Deckgeraden parallel, so ist die gegebene Gerade zur Ebene parallel (689).

704. **Wie zieht man durch einen gegebenen Punkt eine Gerade parallel zu einer gegebenen Ebene?**

Man zieht in der Ebene eine beliebige Gerade (636) und durch den gegebenen Punkt zu ihr eine parallele Gerade (595), dann ist diese parallel zur Ebene.

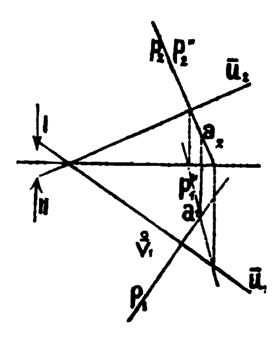
Senkrechte Stellung einer Geraden gegen eine Ebene oder einer Ebene gegen eine Gerade. Normalen-Abbildungsgesetz. Abstandsgesetz eines Punktes. Spursenkrechte.

§. 35.

705. **Wie lautet das Normalen-Abbildungsgesetz?**

Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht (94), so ist in **jeder** Bildebene ihre orthogonale Projection **auf der Spur der Ebene** oder auf der orthogonalen Projection einer **zu dieser Spurparallelen Geraden senkrecht.**

Fig. 84.



Denn führt man z. B. auf die Einserspur u_1 einer beliebigen Ebene u eine beliebige senkrechte Ebene v (96), so muss diese Ebene v auf der Bildebene I senkrecht stehen (108), folglich muss die erste Spur von v ihre Nullseite sein, also wird $\overset{\circ}{v}_1$ auf u_1 senkrecht stehen (94). In der Ebene v kann man aber beliebig viele Normalen zur Ebene u ziehen, und alle diese Normalen müssen ihr erstes Bild in $\overset{\circ}{v}_1$ haben, also steht in der Bildebene I die orthogonale Projection einer jeden

Normale der Ebene u auf $\bar{u}_1$ senkrecht. Wie der Beweis für die ersten Projectionen der Normalen geführt wird, ebenso lässt er sich für die orthogonalen Projectionen auf den anderen Bildebenen führen, mithin ist die Richtigkeit des Normalen-Abbildungsgesetzes dargethan. Bei Anwendung dieses Gesetzes ist es erforderlich, aber auch genügend, wenn das Normalengesetz in zwei zugeordneten Bildebenen sich bestätigt, nur darf in diesem Falle die Ebene nicht zur Bildaxe parallel gehen, weil sonst die Normalen Ordinalgeraden werden (572).

In Fig. 84 steht p_1 senkrecht auf $\bar{u}_1$, p_2 senkrecht auf $\bar{u}_2$, mithin sind $p_1 p_2$ zwei zugeordnete Projectionen eines Perpendikels der Ebene u. In Fig. 84 wurde ferner in u zu p eine Zweier-Deckgerade p'' construiert, und in a_1 das erste Bild des Schnittes der Normale p mit der Ebene u gefunden (692). Der Lernende versinnliche sich die Lage der Ebene und ihrer Normale.

706. **Zu welchen Bildebenen sind alle Normalen einer Ebene u parallel?**

Zu allen jenen Bildebenen, welche auf einer Spur der Ebene oder welche überhaupt auf der Ebene u senkrecht stehen.

707. **Welche orthogonalen Projectionen einer Normale sind der Normale an Länge gleich?**

Die orthogonalen Projectionen auf allen jenen Bildebenen, zu welchen die Normalen parallel sind (581).

708. **Wie zieht man von einem gegebenen Punkte eine Normale zu einer Ebene?**

Man zieht in jeder Bildebene durch die Projection des Punktes eine Senkrechte auf die Spur der Ebene oder auf eine zur Spur parallele Gerade, dann sind diese Senkrechten die Projectionen des Perpendikels (705).

709. **Wie findet man den senkrechten Abstand eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Ebene?**

Man fällt vom Punkte eine Normale auf die Ebene (705), sucht ihren Schnitt mit der Ebene (692) und alsdann die wahre Entfernung dieses Schnittes vom gegebenen Punkte (581).

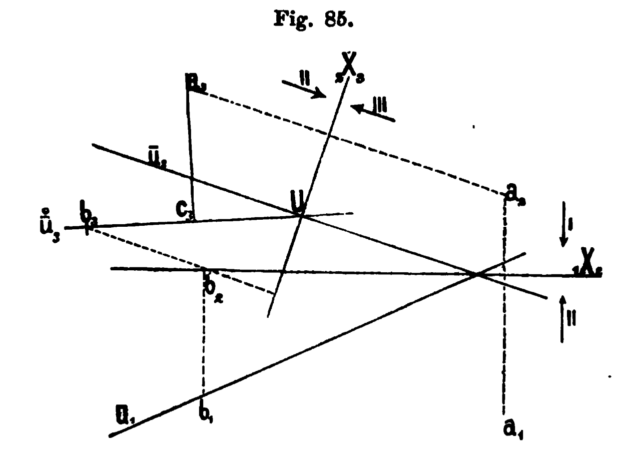
710. **Wie lautet das Abstandsgesetz eines Punktes?**

Wenn man eine Ebene und einen ausser ihr liegenden Punkt auf eine Bildebene orthogonal projiciert, und es zeigt die Ebene die Nullseite, so ist die Projection des Punktes von der

Nullseite genau soweit entfernt, wie der Punkt im Raume von der Ebene.

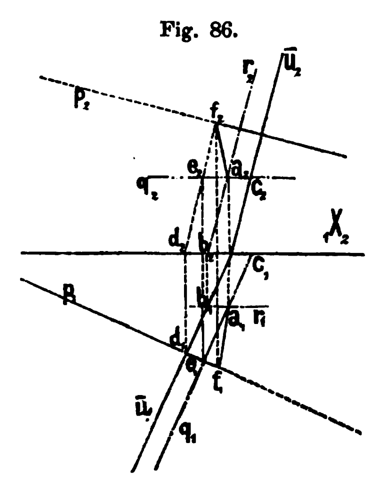
Dieses Abstandsgesetz ist nichts anderes, als das zweite Ordinatengesetz (556, *b*) in einer veränderten Ausdrucksweise.

Fig. 85.



In Fig. 85 ist $\bar{u}_1 \bar{u}_2 a_1 a_2$ gegeben; es soll die Entfernung des Punktes a von der Ebene u bestimmt werden. Es wurde eine Bildebene III senkrecht zu $\bar{u}_2$ geführt und sowol $\overset{\circ}{\bar{u}}_{3}$ als a_3 gesucht (562). Zieht man von a_3 eine Senkrechte $a_3 c_3$ auf $\bar{u}_3$, so ist $a_3 c_3$ die wahre Länge der Normalen ac, d. i. der Abstand des Punktes a von der Ebene u. Das erste und zweite Bild der Normale wurde nicht gezeichnet.

Fig. 86.



711. **Wie findet man den Abstand eines Punktes von einer Ebene, wenn die Ebene durch zwei beliebige sich schneidende Gerade gegeben ist?**

a) Man sucht von der Ebene zwei zugeordnete Spuren (650), zieht durch den gegebenen Punkt eine Normale (705), sucht ihren Schnitt mit der Ebene (692) und sodann die wahre Länge der Entfernung beider Punkte (581).

b) Man sucht eine Einser- und eine Zweier - Spurparallele (641); zieht durch das erste Bild des gegebenen Punktes eine Senkrechte auf das erste Bild der Einser-Spurparallelen (705), durch das zweite Bild des Punktes einer Senkrechte auf das zweite Bild der Zweier - Spurparallelen, so sind die Projectionen des durch den gegebenen Punkt gehenden Perpendikels gefunden. Nun verfährt man nach der ersten Methode.

c) Man sucht eine Nullseite und wendet das Abstandsgesetz an (710).

712. **Wie führt man durch einen gegebenen Punkt a eine Ebene u senkrecht auf eine gegebene Gerade p?**

Man zieht durch das erste Bild a_1 des Punktes eine Senkrechte q_1 auf das erste Bild p_1 der Geraden p und durch das zweite Bild a_2 des Punktes a eine Parallele q_2 zu ${}_1X_2$, so sind diese zwei Linien $q_1 q_2$ zugeordnete Projectionen einer Einser-Spurparallelen q der Ebene u (705).

Zieht man durch das zweite Bild a_2 des gegebenen Punktes a eine Senkrechte r_2 auf das zweite Bild p_2 der Geraden p, und durch das erste Bild a_1 des Punktes a eine Paralle r_1 zu ${}_1X_2$, so sind diese zwei Linien $r_2 r_1$ zugeordnete Projectionen einer Zweier-Spurparallelen r der Ebene u.

Nun kennt man von der Ebene u zwei sich schneidende Gerade q und r (Spurparallelen), folglich ist die Ebene u bestimmt, die Aufgabe gelöst.

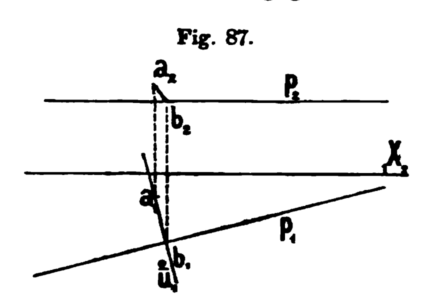
713. Will man die Spuren der Ebene finden, so wird man eine Spurparallele mit einer Bildebene zum Schnitt bringen, und durch den Schnitt in jener Bildebene eine Senkrechte auf die Projection der gegebenen Geraden ziehen; alsdann ist dieselbe schon eine Spur der Ebene.

In Fig. 86 sind gegeben $p_1 p_2 a_1 a_2$. Gezogen wurde $q_1 \perp p_1$, $q_2 \parallel {}_1X_2$, also ist q eine Einser - Spurparallele. Ferner $r_2 \perp p_2$, $r_1 \parallel {}_1X_2$, mithin ist r eine Zweier-Spurparallele. q und r bestimmen die zu p senkrechte Ebene u. Die Gerade r schneidet die Bildebene I in b_1, folglich geht $\bar{u}_1$ durch b_1 senkrecht auf p_1. $\bar{u}_1$ schneidet ${}_1X_2$ und durch diesen Schnitt von $\bar{u}_1$ mit ${}_1X_2$ zieht man jetzt $\bar{u}_2$ senkrecht auf p_2. Sucht man den Schnitt c der Spurparallelen q mit der Bildebene II, so muss c_2 in $\bar{u}_2$ liegen, mithin wird c_2 ein Probepunkt sein.

714. **Wie findet man den Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden, wenn man die Ebene durch einen gegebenen Punkt senkrecht auf die Gerade legt?**

Man zieht durch den Punkt die beiden Spurparallelen (712) und sodann eine Spur der Ebene. Dann sucht man in dieser Spur und in der zu ihr parallelen Spurparallelen zu der gegebenen Geraden die Deckpunkte, und zieht die Deckgerade (686), so schneidet diese die gegebene Gerade in dem gesuchten Punkte.

Fig. 87.

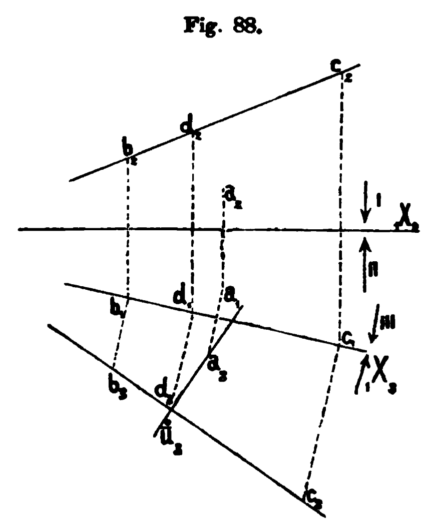


In Fig. 86 wurden a_1 und q benützt; d und e sind die Einserdeckpunkte, folglich ist f_2 (d. i. der Schnitt von $d_2 e_2$ mit p_2) das zweite Bild des Schnittes der durch a senkrecht auf p geführten Ebene. f_1 liegt in der Ordinale durch f_2 in p_1.

715. Wie zieht man durch einen gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade eine sie schneidende senkrechte Gerade.

Man legt durch den Punkt eine Ebene senkrecht auf die gegebene Gerade (712), sucht ihren Schnittpunkt (714), so geht durch diesen die gesuchte Gerade. In Fig. 86 ist $a_1 f_1$, $a_2 f_2$ die zu p senkrechte Gerade.

Fig. 88.



716. Wie zieht man durch einen gegebenen Punkt eine Gerade, welche eine gegebene Gerade senkrecht durchschneidet, wenn die gegebene Gerade zu einer Bildebene parallel ist?

Nehmen wir an, die Gerade p sei zur Bildebene II parallel, so muss p_1 zur Bildaxe parallel laufen. Führt man durch den gegebenen Punkt a eine Ebene senkrecht auf die Gerade p, so muss diese Ebene auf der Bildebene II senkrecht stehen und in ihr die Nullseite zeigen. Zieht man sonach durch a_2 eine Gerade senkrecht auf p_2, so ist sie mit $\mathring{u}_2$ zu

bezeichnen und der Schnitt von $\overset{\circ}{u}_2$ mit p_2 ist das zweite Bild des Schnittes der senkrechten Ebene u mit der Geraden p. Aus dem zweiten Bilde ergibt sich durch eine Ordinale das zugeordnete erste Bild in p_1, und jetzt lassen sich auch die beiden Bilder der zu p senkrechten Geraden zeichnen.

717. Ist die Gerade p zur Bildebene I parallel, Fig. 87, so läuft p_2 zu ${}_1X_2$ parallel; die durch a auf p senkrecht geführte Ebene u steht auf der Bildebene I senkrecht, die Spur u_1 geht durch a_1 senkrecht auf p_1 und ist die Nullseite der Ebene u, mithin ist der Schnitt von $\overset{\circ}{u}_1$ mit p_1 das erste Bild des Schnittes b der Geraden p mit der durch a gehenden senkrechten Ebene u, und $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ sind die Projectionen der zu p senkrechten durch a gehenden Geraden.

718. **Wie zieht man mit Hilfe einer dritten Bildebene durch einen gegebenen Punkt eine Gerade, welche eine gegebene Gerade senkrecht durchschneidet?**

Man legt eine dritte Bildebene senkrecht auf eine der vorhandenen Bildebenen und zugleich parallel mit der gegebenen Geraden, oder noch einfacher durch die Gerade selbst, sucht die dritten Projectionen der Geraden und des Punktes, so zeigt die durch den Punkt senkrecht auf die Gerade geführte Ebene in $\overset{\circ}{u}_3$ die Nullseite. In Fig. 88 wurde III durch $b_1 c_1$ gelegt, also ist ${}_1X_3$ mit p_1 eine und dieselbe Gerade. Mit Hilfe von zwei Punkten b und c wurde das dritte Bild p_3 bestimmt. Durch a_3 eine Senkrechte auf p_3 gezogen, gibt uns $\overset{\circ}{u}_3$ und hiedurch in d_3 das dritte Bild des Schnittes der durch a senkrecht auf p geführten Ebene. Durch Ordinalen findet man d_1, d_2 und es ist ad die gesuchte Senkrechte zu p (94).

719. **Wie findet man die senkrechte Entfernung eines Punktes von einer Geraden?**

Man zieht vom Punkte ein Perpendikel zur gegebenen Geraden (715) und sucht die wahre Entfernung ihres Schnittpunktes vom gegebenen Punkte (581).

720. **Wie construiert man eine gerade Linie r senkrecht auf zwei sich kreuzende Gerade p und q so, auf dass sie beide Gerade schneidet?**

a) Man legt durch eine der beiden Geraden, z. B. durch q, eine Ebene parallel zu p (127), und führt durch p auf diese Ebene

eine senkrechte Ebene (100), so muss der Schnitt der letzteren Ebene mit q jener Punkt sein, in welchem die zu suchende Gerade q schneidet. Construiert man durch diesen Punkt eine Normale zur ersten Ebene (705), so ist die Gerade r gefunden.

b) Man construiert sich auf der Zeichnungsebene seitwärts durch irgend einen Punkt einer Bildebene zwei Ebenen u und w beziehungsweise senkrecht auf p und q (712); nämlich $\bar{u}_1 \perp p_1$, $\bar{u}_2 \perp p_2$, $\bar{w}_1 \perp q_1$, $\bar{w}_2 \perp q_2$; und sucht ihre Schnittgerade s, so muss s der Richtung nach auf beiden Geraden p und q senkrecht stehen. Nun legt man durch p eine Ebene parallel mit s (127), sucht ihren Schnitt Q mit q und zieht durch Q eine Parallele mit s, so muss diese die gesuchte Gerade sein.

Bestimmt man die wahre Länge der Strecke, welche auf der construierten Senkrechten zwischen den gegebenen Geraden liegt, so hat man den senkrechten Abstand von zwei sich kreuzenden Geraden gefunden.

Fig. 89.

721. Was verstehen wir unter einer Spursenkrechten?

Jede Gerade, welche wir in einer Ebene senkrecht auf eine Spur derselben ziehen, nennen wir eine Spursenkrechte. Sie ist eine Einser-Spursenkrechte, wenn sie auf der ersten, eine Zweier-Spursenkrechte, wenn sie auf der zweiten Spur senkrecht steht u. s. w.

722. Welches Bild einer Spursenkrechten erhält eine besondere Lage?

Wenn eine Spursenkrechte auf der n^{ten} Spur senkrecht steht, so steht auch ihr n^{tes} Bild auf der n^{ten} Spur senkrecht. In Fig. 89 ist $\bar{u}_1\, \bar{u}_2$ und ein Punkt $a_1\, a_2$ dieser Ebene gegeben. Das erste Bild einer Einser-Spursenkrechten durch a steht senkrecht auf $\bar{u}_1$ und b_1 ist ihr Schnitt mit $\bar{u}_1$, folglich muss b_2 in ${}_1X_2$ liegen (616).

723. Was verstehen wir unter einem Spurabstand?

Den senkrechten Abstand irgend eines Punktes einer Ebene von einer Spur der Ebene.

724. Wie construiert man die wahre Länge eines Einser-Spurabstandes?

Man sucht das dem Spurabstande zugehörende erste Differenzen-Dreieck (581); die Hypothenuse gibt die gesuchte wahre Länge. In Fig. 89 kann man

α) entweder den rechten Winkel bei A benützen, wenn man $Ab' = a_1 b_1$ macht, wobei $a_2 b'$ gleich dem gesuchten Spurabstande ist, oder

β) wenn man durch $a_1 b_1$ eine Bildebene III legt, wobei $a_3 b_1$ den ersten Spurabstand des Punktes a der Ebene u angibt. Zieht man $b_1 a_3$, so ist diese Gerade eine Nullseite $\overset{\circ}{u}_3$ der Ebene u.

725. Wie construiert man die wahre Länge eines n^{ten} Spurabstandes?

Man sucht von ihm das n^{te} Differenzen-Dreieck (581).

Wenn man den n^{ten} Spurabstand eines Punktes a einer Ebene u ermittelt, so ist die n^{te} Ordinate des einen Endpunktes gleich Null, weil er in $\bar{u}_n$ liegt, während die n^{te} Ordinate (a_n) aus dem zugeordneten Bilde von a_n entnommen wird. Der n^{te} Spurabstand eines Punktes a ist sonach gleich der Hypothenuse eines Dreieckes, in welchem der senkrechte Abstand des n^{ten} Bildes a_n von der n^{ten} Spur der Ebene u eine Kathete, und die n^{te} Ordinate des Punktes a die zweite Kathete ist. (Der Lernende setze in dieser Aussage einmal Eins, ein anderesmal Zwei oder Drei u. s. w. statt n, wodurch er specielle Aussagen erhält.)

Ebene Gebilde zu projicieren. Congruenz-Projectionen. Kreise zu projicieren.

§. 36.

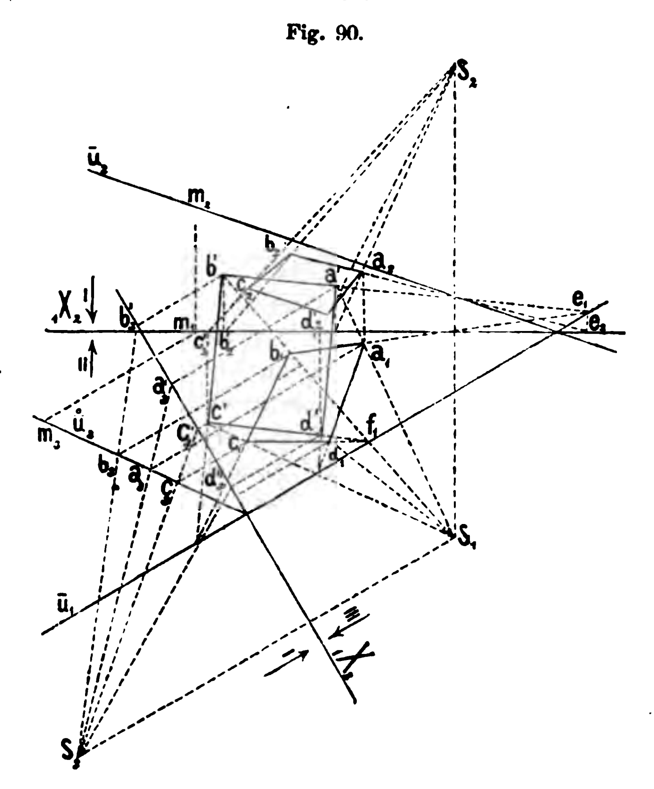
726. Man kommt häufig in die Lage, eine ebene Figur, welche in einer oder der anderen Bildebene liegt, aus einem Centrum S auf eine Ebene u projicieren zu müssen. Weil die Ebene u aber im Raume liegt, so können wir die Projection auf u nur durch zugeordnete Bilder darstellen, folglich haben wir das Verfahren zu beschreiben, wie man zu den zugeordneten Abbildungen der Projection auf u gelangt.

Es seien $\bar{u}_1 \bar{u}_2$, Fig. 90, zwei zugeordnete Spuren einer Ebene u, $S_1 S_2$ zugeordnete Bilder des Projections-Centrums und

b' sei der in der Bildebene I liegende auf u zu projicierende Punkt, dessen zugeordnetes Bild b'_2 in der Bildaxe liegt.

Man zieht in jeder Bildebene das Bild des projicierenden Strales Sb', also $S_1 b'$, $S_2 b'_2$ und sucht die zugeordneten Projectionen $b_1 b_2$ des Punktes b, in welchem der Stral Sb' die Ebene u durchdringt (692), so sind $b_1 b_2$ zugeordnete Bilder der Projection des Punktes b' auf der Ebene u.

Fig. 90.



727. Sind viele Punkte $a' b' c'$ ... der Bildebene I auf die Ebene u zu projicieren, so lohnt es die Mühe, eine Bildebene III senkrecht zur ersten Spur der Ebene u einzuführen, weil dann die dritten Bilder $S_3 a'_3$, $S_3 b'_3$, $S_3 c'_3$, ... der Stralen Sa', Sb', Sc', ... die Nullseite $\overset{\circ}{u}_3$ in Punkten $a_3 b_3 c_3$ ... schneiden, welche Punkte schon die dritten Bilder der Schnitte der Stralen Sa', Sb', Sc', ... mit der Ebene u sind.

Ordinalen zu ${}_1X_3$ geben $a_1 b_1 c_1$ ..., und durch $a_1 b_1 c_1$ ... Ordinalen zu ${}_1X_2$ geben die zweiten Bilder $a_2 b_2 c_2$ ...

728. Wie uns Fig. 90 zeigt, erhalten wir in der Bildebene I zwei perspectivisch liegende Gebilde, nämlich das gegebene Gebilde $a'b'c'd'$ und das erste Bild $a_1 b_1 c_1 d_1$ der Projection dieses Gebildes aus dem Punkte S auf die Ebene u. Es entsteht demnach die Frage: ob die beiden bezüglich S_1 perspectivisch liegenden Gebilde auch eine Begegnungsgerade haben?

Denken wir uns eine Gerade in der Bildebene I, z. B. $a'b'$ bis zur $\bar{u}_1$ nach e_1 verlängert, so ist klar einzusehen, wenn man die Gerade $a'b'$ auf die Ebene u aus S projiciert und von dieser Projection das erste Bild $a_1 b_1$ sucht, auch $a_1 b_1$ durch e_1 gehen muss; mithin ist $\bar{u}_1$ die Begegnungsgerade der beiden in der Bildebene I liegenden Gebilde. Beide Gebilde liegen demnach perspectivisch collinear. Wenn man daher einen Punkt, z. B. b_1 wie in (726) sucht, so kann man nach der Methode der perspectivischen Collineation alle übrigen Punkte $a_1 c_1 \ldots$ construieren.

729. Ist ein grösseres Gebilde, z. B. eine in der Bildebene I liegende Curve aus S auf die Ebene u zu projicieren, so wird es gut sein, auf der durch S_1 gehenden Centralen (253) zwei verwandte Punkte $k_1 k_2$ dadurch zu ermitteln, dass man b' b_1 aus einem beliebigen Punkte der Begegnungsgeraden $\bar{u}_1$ auf die durch S_1 zu $\bar{u}_1$ parallel gehende Centrale projiciert.

Aus dem gefundenen ersten Bilde $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ findet man durch Ordinalen das zweite Bild $a_2 b_2 c_2 d_2 \ldots$ in den Geraden $S_2 a'_2$, $S_2 b'_2$, $S_2 c'_2$, $S_2 d'_2, \ldots$

730. Nun kann man auch die umgekehrte Aufgabe lösen: Ein durch zwei zugeordnete Bilder gegebenes ebenes Gebilde $abcd$ aus einem Centrum S auf die Bildebene I zu projicieren.

a) Man zieht in beiden Bildebenen die Bilder der projicierenden Stralen Sa, Sb, $Sc, \ldots$ und sucht die ersten Spuren $a'b'c' \ldots$ derselben (576), welche sofort Punkte der gesuchten Projection des ebenen Gebildes $a\,b\,c \ldots$ sind; oder

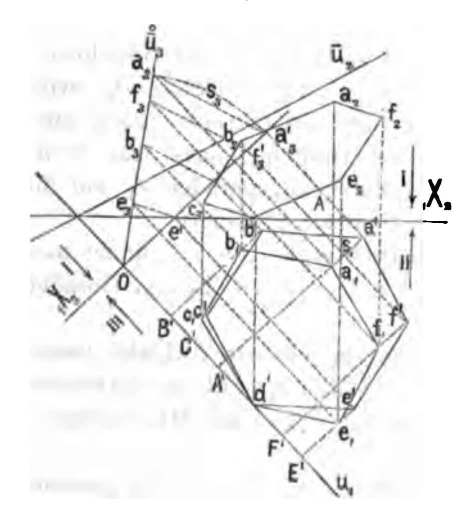
b) Man sucht nach a) blos von einem Punkte, z. B. von $b_1 b_2$ die Projection b' und ermittelt alle übrigen Punkte $a'c'd' \ldots$ nach den Gesetzen der perspectivischen Collineation (§. 12).

731. Soll man ein Gebilde einer Ebene u aus einem Punkte S auf die n^{te} Bildebene projicieren, so muss, wie aus der eben durchgeführten Betrachtung hervorgeht, das n^{te} Bild des ebenen

Gebildes mit seiner Projection aus S auf die n^{te} Bildebene perspectivisch collinear liegen. Man kann demnach auch hier die perspectivische Collineation zur Construction benützen, denn S_n ist das Centrum der perspectivischen Lage und $\bar{u}_n$ die Begegnungsgerade.

732. Ein besonderer Fall tritt ein, wenn man ein in einer Bildebene liegendes Gebilde u' auf eine Ebene u oder umgekehrt ein in einer Ebene u liegendes Gebilde u auf eine Bildebene durch **parallele Stralen** projiciert. Denn hier liegt die Projection S_n des unendlich fernen Projections-Centrums S selbst im Unendlichen, (ausgenommen die parallelen Stralen stehen auf der Bildebene senkrecht), folglich verwandelt sich die perspectivische Collineation der zwei Gebilde u' und u_n in die **perspectivische Affinität**. Man wird demnach parallel zur gegebenen Richtung einen Punkt a' der Bildebene N auf die Ebene u projicieren, die orthogonale Projection a_n dieses Bildes ermitteln und dann nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität die übrigen Punkte construieren.

Fig. 91.



733. **Wie kann man ein ebenes Gebilde u congruent auf die n^{te} Bildebene projicieren?**

Durch parallele Stralen, deren jeder folgende Bedingungen erfüllt:

a) Seine orthogonale Projection auf der n^{ten} Bildebene steht senkrecht auf der n^{ten} Spur der Ebene u;

b) der projicierende Stral ist zur Ebene u und zur n^{ten} Bildebene gleich geneigt.

734. In Fig. 91 wird ein Sechseck einer Ebene u congruent auf die **erste** Bildebene projiciert. Zieht man durch das erste Bild a_1 eines Punktes a der Ebene u eine Senkrechte auf die erste Spur der Ebene u, so ist diese Senkrechte das erste Bild

s_1 des congruent projicierenden Strales s (733, a), folglich muss in ihm auch die erste Congruenz-Projection a' von a liegen.

Um die Bedingung (733, b) zu erfüllen, lege man eine Bildebene III senkrecht auf die erste Spur von u, so muss der congruent projicierende Stral s zur Bildebene III parallel sein. Ermittelt man demnach die Nullseite $\mathring{u}_3$ der Ebene u (667), in welcher Nullseite a_3 liegt, so bildet die dritte Projection s_3 des congruent projicierenden Strales mit $\mathring{u}_3$ und ${}_1X_3$ gleiche Winkel. Wird sonach $Oa'_3 = Oa_3$ gemacht, so ist $a_3 a'_3$ das dritte Bild s_3 des den Punkt a congruent projicierenden Strales s, folglich ist der Schnittpunkt a' desselben Strales mit der Bildebene I die erste Congruenz-Projection des Punktes a.

Die Projectionen der übrigen Punkte lassen sich auf eine gleiche Weise finden, oder auch durch die Anwendung der Gesetze der perspectivischen Affinität construieren.

735. Woraus erkennt man, dass die in dieser Art erzeugte Projection $a'b'c'$ ... des ebenen Gebildes u, mit dem Gebilde abc ... der Ebene u congruent ist?

Nennt man den senkrechten Abstand eines Punktes a einer Ebene u von der n^{ten} Spur den n^{ten} Spurabstand des Punktes a, so sieht man ein, dass durch das congruente Projicieren auf die n^{te} Bildebene die Projection des n^{ten} Spurabstandes weder in der Länge, noch in der senkrechten Stellung zu $\bar{u}_n$ verändert wird, woraus die Congruenz sich ergibt.

In Fig. 91 ist daher $a'A'$ gleich dem ersten Spurabstande aA' des Punktes a in der Ebene u (723).

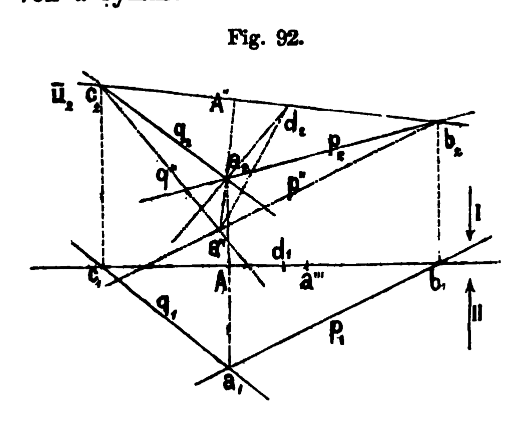
736. Man kann die n^{te} Congruenz-Projection eines Punktes a einer Ebene u auch dadurch construieren, dass man auf der durch das n^{te} Bild a_n auf $\bar{u}_n$ senkrecht gezogenen Geraden von $\bar{u}_n$ aus, die wahre Länge des nach (725) ermittelten Spurabstandes aufträgt.

Würde man demnach in Fig. 91 die wahre Länge von aA' aus $a_1 A'$ und $(a_1) = a_2 A$ als Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes ermitteln und von A' nach $A'a'$ auftragen (724), so dürfte man erst nicht eine Bildebene III einführen.

737. Dreht man die Ebene u um ihre erste Spur in die Bildebene I, so wird die in der Ebene u liegende Figur mit ihrer Congruenz-Projection zusammenfallen; desshalb nennt man die Congruenz-Projectionen ebener Figuren auch Umlegungen.

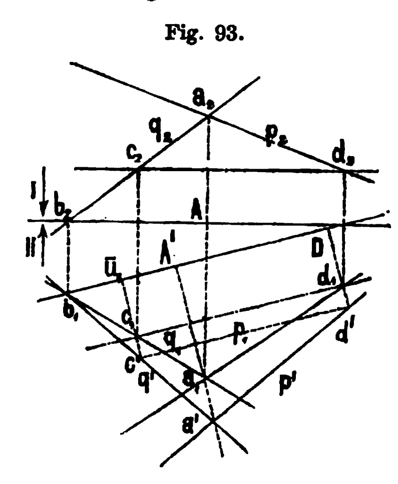
Eine ebene Figur lässt sich nach zwei verschiedenen, aber aufeinander senkrechten Richtungen auf eine Bildebene congruent projicieren und auch auf eine zweifache Art umlegen. Beide Congruenz-Projectionen oder Umlegungen liegen bezüglich der Spur von *u* symmetrisch.

Fig. 92.



738. Ausser durch die Anwendung der Methode des congruenten Projicierens kann man die wahre Gestalt eines durch zugeordnete Projectionen gegebenen Dreiecks noch dadurch finden, dass man durch Anwendung der Differenzen - Dreiecke (581) die wahren Längen der einzelnen Dreiecksseiten ermittelt und aus den drei Seiten das Dreieck construiert. Soll man die wahre Gestalt eines ebenen Polygons ermitteln, so kann man dasselbe auch in Dreiecke zerlegen, die wahren Gestalten der einzelnen Dreiecke auf die jetzt erwähnte Art construieren und aus den so gefundenen Dreiecken das Polygon zusammensetzen.

Fig. 93.



739. **Wie zeichnet man eine gegebene Figur in einer gegebenen Ebene *u*?**

Ist die Lage der ebenen Figur gegen die n_u Spur von *u* bekannt, so zeichnet man in der n^{ten} Bildebene diese Figur in der vorgeschriebenen Lage gegen $\bar{u}_n$ und projiciert sie mit der n^{ten} Congruenzrichtung parallel auf die Ebene *u* (733).

740. **Wie ermittelt man die wahre Grösse eines durch seine Projectionen gegebenen Winkels?**

Man sucht von beiden Schenkeln die Schnitte mit einer Bildebene und projiciert auf diese Bildebene den Scheitel des

Winkels parallel mit der Congruenz-Richtung. Verbindet man die Congruenz-Projection des Scheitels mit den Spuren der Schenkel, so erhält man die Congruenz-Projection des Winkels, d. i. dessen wahre Grösse.

In Fig. 92 sind $p_1 p_2$ und $q_1 q_2$ die Bilder der Schenkel des Winkels a; $b_2 c_2$ sind ihre zweiten Spuren, folglich ist die Gerade $b_2 c_2$ die $\bar{u}_2$ der Ebene pq. $a_2 A''$ ist das zweite Bild des congruent projicierenden Strales, und macht man nach (725) (a_2), d. i. $a_1 A$ zu einer, und $A a''' = A'' a_2$ zur zweiten Kathete, so ist $a_1 a'''$ der Zweier-Spurabstand des Punktes a_1, mithin, wenn $A'' a'' = a_1 a'''$ gesetzt wird, ist a'' die zweite Umlegung oder zweite Congruenz-Projection von a. Die zweiten Spuren von p und q sind $b_2 c_2$, also ist $\sphericalangle\, b_2 a'' c_2$ die wahre Grösse des Winkels, den p mit q einschliesst.

741. In Fig. 93 wurde die erste Umlegung $p' q'$ der Geraden p und q gezeichnet. Da man von p keinen Schnitt mit der Bildebene I fand, wurde in p ein Punkt $d_2 d_1$ angenommen und eine Einser-Spurparallele dc construiert; durch die erste Spur b_1 eine Parallele zu $c_1 d_1$ gezogen, fand man $\bar{u}_1$. Nun wurden die ersten Umlegungen a' und d' der Punkte a und d mit Hilfe der zu den ersten Spurabständen gehörenden Differenzen - Dreiecke construiert (725), alsdann ist $\sphericalangle\, b_1 a' d'$ die wahre Grösse der Neigung von p gegen q.

742. W i e s t e l l t m a n z u g e o r d n e t e B i l d e r e i n e s W i n k e l s v o n g e g e b e n e r G r ö s s e d a r, w e n n m a n s e i n e n S c h e i t e l, s e i n e E b e n e u n d e i n e n S c h e n k e l d e s s e l b e n k e n n t?

Man projiciert den Schenkel und den Scheitel aus der Ebene u congruent auf eine Bildebene (733), zeichnet an die Congruenz-Projection des Schenkels den gegebenen Winkel an, und projiciert den zweiten Schenkel congruent in die Ebene u zurück.

Nehmen wir an, in Fig. 92 sei $\bar{u}_2$, der Schenkel $p_1 p_2$ und der Scheitel $a_1 a_2$ eines in der Ebene u liegenden Winkels gegeben. Zeichnen wir die zweite Umlegung a'' mit Hilfe des zweiten Differenzen-Dreieckes von aA'' und verbinden a'' mit der zweiten Spur b_2 des Schenkels p, so ist $a'' b_2$ die Congruenz - Projection von ab. Ist nun $a'' c_2$ der zweite Schenkel des Winkels in der Umlegung, folglich c_2 seine zweite Spur, so ist $a_2 c_2$ das zweite Bild des zweiten Winkelschenkels. Das zugeordnete Bild von c_2 liegt in der Bildaxe, mithin ist auch $a_1 c_1$ gefunden.

Hätte man den Winkel an die andere Seite von $a'' b_2$ angezeichnet, so würde man eine zweite Auflösung der gegebenen Aufgabe gefunden haben.

In Fig. 93 sei $q_1 q_2$, $a_1 a_2$ und $\bar{u}_1$ gegeben. Man soll in der durch $\bar{u}_1$ und q denkbaren Ebene an den Schenkel q in a als Scheitel einen gegebenen Winkel anzeichnen.

Man sucht die erste Umlegung q' und a', zeichnet p' unter dem vorgeschriebenen Winkel an q' an und sucht die in $\bar{u}_1$ liegende erste Spur von p'. Dieser Schnittpunkt liegt aber unbenützbar. Man zieht desshalb in der Umlegung eine beliebige Einser-Spurparallele $d'c'$, sucht c_1 durch eine von c' aus gezogene Spursenkrechte und zeichnet die erste Spurparallele durch c_1 parallel zu $\bar{u}_1$, durch c_2 parallel zur Bildaxe und bestimmt nun d_1 durch eine Spursenkrechte aus d'. Nun sind $a_1 d_1$, $a_2 d_2$ die zugeordneten Bilder vom zweiten Schenkel p.

Fig. 94.

743. Wählt man in (742) den gegebenen Winkel gleich einem Rechten, so hat man die Aufgabe (715) gelöst:

Durch einen gegebenen Punkt auf eine Gerade eine senkrechte Gerade in einer gegebenen Ebene zu errichten.

744. Wie teilt man einen gegebenen Winkel nach einem gegebenen Verhältnisse?

Man zeichnet eine Umlegung desselben (742), teilt die Umlegung entsprechend, und projiciert die Teilungslinien congruent in die Winkelebene zurück. In Fig. 92 soll $a'' d_2$ eine Teilungslinie in der Umlegung sein, mithin ist d_2 die zweite Spur der Teilungsgeraden und $a_2 d_2$, $a_1 d_1$ sind zugeordnete Bilder derselben.

745. In welcher Lage befinden sich das erste und zweite Bild, oder überhaupt zwei zugeordnete Bilder einer ebenen Figur, in der Zeichnugsebene?

Sie liegen perspectivisch affin (§ 11). Denn erstens sind je zwei zugeordnete gerade Punktreihen geometrisch proportio-

nal, und zweitens liegen je zwei verwandte Punkte in einer zur Bildaxe senkrechten Geraden. Es erscheint demnach in der Zeichnungsebene jedes von zwei zugeordneten Bildern einer ebenen Figur als eine perspectivisch-affine Projection des anderen, wobei die parallel projicierenden Stralen die Ordinalen sind. Wenn man demnach in Fig. 91 jedes zweite Bild einer in der Ebene u liegenden Geraden mit dem zugeordneten ersten Bilde zum Schnitte bringt, so müssen alle Schnittpunkte in der Begegnungsgeraden beider Systeme liegen.

746. **Wie construiert man die Begegnungsgerade (Affinitätsaxe) für zwei zugeordnete Bilder einer Ebene u?**

Der Schnittpunkt U, Fig. 94, einer Spur, z. B. u_2 mit ihrem zugeordneten Bilde, d. i. mit der Bildaxe ist offenbar ein Punkt derselben (745). Construiert man dann noch die zugeordneten Bilder $p_1 p_2$ irgend einer Spurparallelen p (630), so ist ihr Schnittpunkt M ein zweiter Punkt von β.

747. **Wenn zwei zugeordnete Spuren einer Ebene u und eine Projection einer in u liegenden Figur gegeben sind, wie findet man ihr zugeordnetes Bild nach den Affinitätsgesetzen?**

Man construiert zuerst mit Hilfe einer Spurparallelen p die Begegnungsgerade β, Fig. 94, dann sind die zugeordneten Bilder eines jeden Punktes der Geraden p verwandte Punkte. Um nun etwa zu e_1 das zugeordnete Bild e_2 zu finden, zieht man durch e_1 eine beliebige Gerade, etwa $e_1 b_1$ des ersten Systemes, wobei aber b_1 ein Punkt in p_1 sein soll, ermittelt durch eine Ordinale in p_2 den Punkt b_2 und zieht durch den Begegnungspunkt D die verwandte Gerade Db_2, so schneidet sie die durch e_1 gezogene Ordinale in e_2.

Wenn der Punkt e_2 sehr genau construiert wurde, so eignet er sich, weil $e_1 e_2$ weit von β entfernt sind, zur Construction neuer Punkte, wie dies aus $q_1 q_2$, zu ersehen ist.

Auch kann man vorteilhaft einen Proportionalwinkel mit $e_1 E$ als Radius und $E e_2$ als Sehne benützen und hienach (237) das zweite Curvenbild ermitteln. E ist der Schnitt der Ordinale $e_1 e_2$ mit β.

In Fig. 94 wurde e_2 noch mittels einer Spurparallelen controlliert.

748. **Wie construiert man an eine ebene Curve eine Tangente?**

Man zeichnet in jeder Bildebene durch das Bild des Berührungspunktes eine Tangente an das Bild der Curve (528), so erhält man hiedurch die Bilder der Tangente an die Curve. Kennt man die Projectionen der Tangente, so ist diese dadurch bestimmt, also construiert.

In Fig. 94 trifft die Tangente durch f_1 die β in E, mithin muss die Gerade Ef_1 eine Tangente an das zweite Bild der Curve sein. Ef_1 und Ef_2 sind zwei zugeordnete Bilder der Tangente des Punktes f. Bei einer Probe muss der Schnitt von $\bar{u}_2$ mit Ef_2 und jener von ${}_1X_2$ mit Ef_1 in einer Ordinale liegen.

749. Wie construiert man an eine ebene Curve eine Tangente parallel zu einer in ihrer Ebene liegenden oder zu dieser Ebene parallelen Geraden?

Fig. 95.

Man zieht in jeder Bildebene eine Tangente an die Curve parallel zum Bilde der gegebenen Geraden. Zur Probe muss sich zeigen, dass je zwei zugeordnete Berührungspunkte in einer Ordinale liegen.

750. Wie construiert man zwei conjugierte Durchmesser eines Kreises (340), wenn man die Projectionen seines Mittelpunktes und seine Ebene u kennt?

Man projiciert congruent (733) den Kreismittelpunkt in eine Bildebene. In der Bildebene zeichnet man mit dem gegebenen Radius aus der Congruenz-Projection des Mittelpunktes als Centrum einen Kreis, zieht irgend zwei aufeinander senkrechte Kreisdurchmesser und projiciert diese in die Ebene u zurück, so ist die Aufgabe gelöst.

751. Es sind zwei zugeordnete Spuren einer Ebene u und ein Bild vom Centrum O des in u liegenden Kreises gegeben. Man soll die zugeordneten Bilder eines dem Kreise umschriebenen Quadrates construieren, wenn zwei Quadratseiten mit einer Spur von u parallel sind.

In Figur 95 wurden zwei verticale zugeordnete Bildebenen II und III vorausgesetzt; die Sehpfeile II und III bestimmen die Vereinigungsart der zweiten und dritten Projection mit der Zeichnungsebene. Die Bildebene I fehlt.

Von der Ebene u seien die zugeordneten Spuren $\bar{u}_2 \bar{u}_3$ und vom Kreismittelpunkt O das dritte Bild O_3 gegeben. Man legt durch O_3 eine Bildaxe ${}_3X_4$ senkrecht auf $\bar{u}_3$, construiert mittels einer durch O gehenden Dreier-Spurparallelen das zugeordnete Bild O_2, hieraus O_4, durch welchen Punkt die Nullseite $\mathring{\bar{u}}_4$ geht (609).

Das gesuchte Quadrat, von dem zwei Seiten mit $\bar{u}_3$ parallel sein sollen, projiciert sich in der Bildebene III als ein Rechteck, von welchem die mit $\bar{u}_3$ parallelen Seiten dem Kreisdurchmesser an Länge gleichen. Zieht man also $e_3 f_3$ senkrecht zu ${}_3X_4$ und setzt $O_3 e_3 = f_3 O_3 =$ dem Kreisradius r, so sind e_3 und f_3 die Mittelpunkte von zwei Seiten des Rechteckes.

Das vierte Bild des Quadrates erscheint in $\mathring{\bar{u}}_4$ als Gerade $b_4 c_4$, wobei $c_4 O_4 = O_4 b_4 = r$ ist; hieraus ergeben sich b_3 und c_3 als Mittelpunkte der Rechtecksseiten des dritten Bildes, welches nun gezeichnet werden kann.

Die vierten Bilder der Rechteckspunkte geben die zugeordneten dritten Ordinaten und aus den dritten Ordinaten findet man die zugeordneten zweiten Bilder $b_2 c_2 e_2 f_2$, aus welchen sich das zweite Bild des Quadrates darstellen lässt. (Zufällig liegen b und f in derselben Ordinatenebene.)

Hält der Lernende die Zeichnung so, dass ${}_2X_3$ die gewöhnliche Lage von ${}_1X_2$ einnimmt, so ersieht er augenblicklich, wie die Lösung für die Bildebenen I und II durchzuführen ist.

Bei der Ausführung der Zeichnungen wählt der Lernende für jede Zeichnungsebene eine besondere Farbe. Werden aber auf einer Bildebene mehrere Projectionen eines Gebildes, z. B. die orthogonale und die Congruenz-Projection einer ebenen Figur ausgeführt, so ist für jede Projection ebenfalls eine andere Farbe zu gebrauchen.

Beigeordnete Bildebenen. Einige Constructionen bei Ebenen, wenn ihre Spuren nicht bekannt sind.

§. 37.

752. Wenn man ein Raumgebilde orthogonal auf zwei parallele Bildebenen projiciert, so entstehen congruente Projectionen. Die Ordinaten der Raumpunkte sind für jene Bildebene grösser, welche vom projicierenden Auge weiter entfernt ist. Die Differenz der beiden Ordinaten eines Punktes ist stets gleich dem senkrechten Abstande der beiden parallelen Bildebenen.

753. Kommen in einer Zeichnung zwei parallele Bildebenen vor, so pflegt man wol nicht immer, jedoch am häufigsten nur die Zeichnung der einen Bildebene nach den Ordinatengesetzen (556) mit der zugeordneten Bildebene zu verbinden, während man sich die Zeichnung der parallelen Bildebene mit der ihr congruenten Zeichnung der ersteren Bildebene vereinigt denkt. Fig. 96 macht dies klar.

Fig. 96.

Ein Dreieck def ist durch zwei zugeordnete Projectionen $d_1 e_1 f_1$, $d_2 e_2 f_2$ gegeben. Durch den Punkt d wurde eine Bildebene III parallel zu I gelegt, folglich ist die dritte Projection $d_3 e_3 f_3$ congruent mit $d_1 e_1 f_1$, aber alle dritten Ordinaten sind um $d_2 D$ kleiner als die ersten Ordinaten (752). Würde man daher das dritte Bild mit dem zweiten Bilde nach den Ordinatengesetzen verbinden, so würde es bezüglich ${}_2X_3$, dieselbe Lage besitzen, wie sie $d_1 e_1 f_1$ bezüglich ${}_1X_2$ besitzt.

Man erspart sich das Zeichnen des dritten Bildes und denkt sich dasselbe mit dem ihm congruenten ersten Bilde vereinigt.

Also liegt beispielsweise in e_1 nicht nur e_1, sondern auch e_3, jedoch ist die dritte Ordinate (e_3) nicht $= e_2 E$, sondern $= e_2 E'$. Die zweite Ordinate ist und bleibt $(e_2) = e_1 E$, oder wenn man e_3 statt e_1 schreiben würde $(e_2) = e_3 E$.

754. Zwei parallele Bildebenen, deren orthogonale Zeichnungen man zusammenfallen lässt, wollen wir als beigeordnete Bildebenen bezeichnen. Es ist also in Fig. 96 die Bildebene III der Bildebene I beigeordnet. An die Bildaxe schreiben wir ${}_2X_3$ und setzen nur den einen Sehpfeil III hinzu.

Ist die Bildebene III der Bildebene I beigeordnet, so betrachtet man demnach die erste Projection irgend eines Gebildes zugleich als dessen dritte Projection, folglich auch den Schnitt einer Ebene mit der beigeordneten Bildebene als die dritte Spur. In Fig. 96 ist $g_1 g_2$ der Schnitt der Seite ef mit der Bildebene III, folglich erscheint dem projicierenden Auge I die Gerade $d_1 g_1$ als dritte Spur der Ebene u und ist $d_1 g_1$ demzufolge als $\bar{u}_3$ zu bezeichnen.

755. Wie construiert man eine Congruenz-Projection einer ebenen Figur auf einer beigeordneten Bildebene?

Ganz nach denselben Grundsätzen wie die Congruenz-Projection auf einer zugeordneten Bildebene. Man zieht desshalb in Fig. 96 durch e_1 eine Senkrechte auf $\bar{u}_3$, sucht mittels des dritten Differenzen-Dreieckes (581) den dritten Spurabstand des Punktes e und trägt die gefundene Länge von $\bar{u}_3$ auf der Spursenkrechten nach e''' auf, so ist e''' die gesuchte dritte Congruenz-Projection des Punktes e. Auf eine gleiche Art findet man auch f''', jedoch müssen e''' und f''' auf entgegengesetzten Seiten der Begegnungsgeraden $\bar{u}_3$ liegen, weil dasselbe auch bei e_1 und f_1 stattfindet.

Da d_1 oder vielmehr d_3 unverändert bleibt, so ist $d_1\, e'''f'''$ die wahre Gestalt des Dreieckes def.

756. Man soll den Neigungswinkel einer Dreiecksebene abc, Fig. 96, mit der Bildebene II bestimmen?

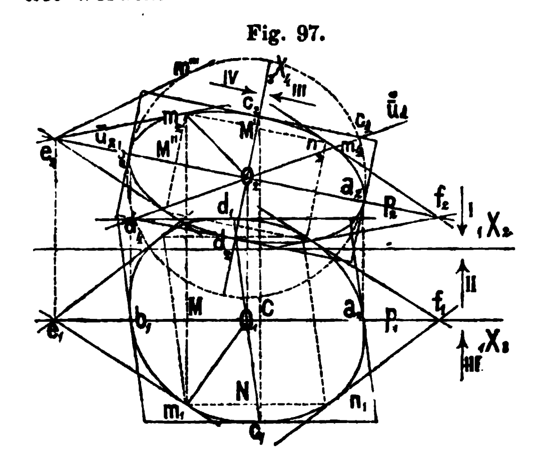
Die zweite Spur aufzufinden ist hier unbequem. Man kann daher ausser nach Art (672) auch so vorgehen, dass man durch einen Eckpunkt des Dreieckes abc, z. B. a, eine Bildebene IV parallel zu II beiordnet, sodann $\bar{w}_4$ construiert (wenn die Ebene abc mit w bezeichnet wird), ferner senkrecht zu $\bar{w}_4$ eine Bildebene V senkrecht legt, mit Hilfe der vierten Ordinate eines Punktes b der Ebene w das fünfte Bild b_5 und hiedurch die

Spur $\overset{\circ}{w}_5$ ermittelt, so ist der von $\overset{\circ}{w}_5$ mit ${}_4X_5$ gebildete Winkel das Mass der Neigung der Ebene w gegen die Bildebene IV oder gegen die Bildebene II.

757. **Man soll ein ebenes Viereck durch zwei zugeordnete Bilder darstellen, wenn,** Fig. 96, **in der Bildebene I die Projectionen $a_1 b_1 c_1 m_1$ aller vier Ecken $abcm$, in der zugeordneten Bildebene aber nur die Projectionen $a_2 b_2 c_2$ von drei Punkten abc gegeben sind.**

Zieht man im ersten Bilde zwei Vierecksseiten $a_1 c_1$ und $b_1 m_1$, welche sich in einem benützbar liegenden Punkte n_1 schneiden, so muss m_2 in $b_2 n_2$ und in der Ordinale durch m_1 liegen, folglich ist m_2 gefunden und das Viereck $a_2 b_2 c_2 m_2$ kann gezeichnet werden.

Fig. 97.



Diese Methode ist auch dann anzuwenden, wenn ein ebenes vielseitiges Polygon oder eine ebene Curve darzustellen ist, und von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten **die zugeordneten Bilder**, von allen übrigen Punkten aber nur die Bilder in einer Bildebene gegeben sind.

In manchen Fällen ergibt sich aus den zugeordneten Bildern der drei gegebenen Punkte die **Begegnungsgerade** für die perspectivisch-affine Lage beider Projectionen (745), mit deren Hilfe das fehlende zugeordnete Bild ebenfalls ermittelt werden kann.

Wie verhält es sich mit den Oberseiten der beiden Ebenen u und w?

758. **Man soll die zugeordneten Bilder eines Kreises unter folgenden Bedingungen herstellen: In der Geraden $p_1 p_2$,** Fig. 97, **liegt ein Kreisdurchmesser, $o_1 o_2$ ist das Centrum, $m_1 m_2$ ein Periferiepunkt, oder wenn $m_1 m_2$ blos ein Punkt der Kreisebene, ist der Radius gegeben.**

Im zweiten Bilde der Spurparallelen $p_1 p_2$ erscheint der Durchmesser in wahrer Länge, wodurch sich zwei Periferiepunkte $a_2 a_1$, $b_2 b_1$ ergeben.

Nun legt man durch die Gerade p parallel zur Bildebene II eine Bildebene III und denkt sich III der Bildebene II beigeordnet (754), so stellt uns p_2 gleichzeitig auch die dritte Spur $\bar{u}_3$ der Kreisebene vor.

Führt man jetzt senkrecht auf $\bar{u}_3$ durch O_3 (alle dritten Bilder fallen mit den zweiten zusammen) eine Bildebene IV, welche mit III zugeordnet sein soll, so kann man mittels der dritten Ordinate $(m_3) = m_1 M$ das zugeordnete vierte Bild m_4 construieren und durch $o_2 m_4$ die Nullseite $\mathring{u}_4$ ziehen.

Das vierte Bild des Kreises liegt in $\mathring{u}_4$ und ist einem Kreisdurchmesser an Länge gleich. In $\mathring{u}_4$ liegt aber selbst ein Kreisdurchmesser $c_4 d_4$, dessen zweites Bild $c_2 d_2$ sich in ${}_3X_4$ befinden muss. Zieht man durch c_2 eine Ordinale zu ${}_1X_2$ und forscht nach dem ersten Bilde, so muss man an den Ziffern bei ${}_1X_3$ und ${}_3X_4$ folgendermassen ablesen: Man sucht das erste Bild c_1; das erste Bild c_1 findet man aus der dritten Ordinate (c_3) und die dritte Ordinate aus dem vierten Bilde c_4 (senkrechter Abstand des Bildes c_4 von ${}_3X_4$). Trägt man die dritte Ordinate (c_3), welche positiv ist (556, c), von C aus positiv auf, so findet man c_1. Und ganz nach demselben Vorgange findet man d_1, nur ist (d_3) negativ aufzutragen.

Da man nun zwei conjugierte Kreisdurchmesser ab und cd in zugeordneten Bildern kennt, so vermag man auch in jeder Bildebene das Bild des Quadrates darzustellen, welches dem Kreise, parallel mit den erwähnten conjugierten Durchmessern, umschrieben wird.

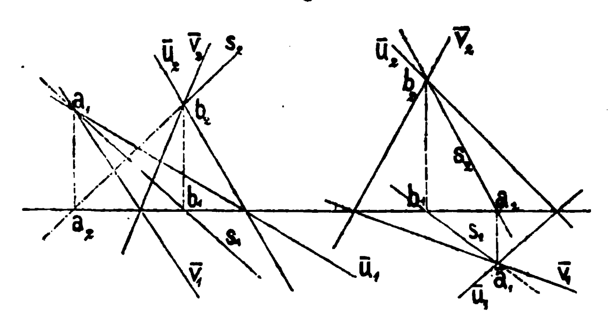
Um neue zugeordnete Bilder von Kreisperiferiepunkten zu finden, beobachte man das bekannte Verfahren (739). Man zieht von dem Punkte der Umlegung, z. B. von m''' eine Senkrechte auf die Spur der Umlegung, d. i. auf $\bar{u}_3$, und überträgt den Spurabstand $m'''M''$ vom Axenpunkt o_2 aus in die Nullseite $\mathring{u}_4$ nach $o_2 m_4$, so ist m_4 gefunden. Eine Ordinale gibt m_2 und aus $(m_3) = m_4 M'$ erhält man m_1. Was von m''' gilt auch von jedem anderen Kreispunkte.

Aus jedem Ellipsenpunkte lassen sich noch drei symmetrisch zu den conjugierten Durchmessern liegende Punkte ableiten, wie man dies in der Figur bezüglich der Punkte m_1 und m_2 durch-

geführt sieht. Es ist nämlich $Nn_1 = m_1 N$, $M'n_2 = m_2 M'$ u. s. w. Bei der Probe muss n_1 mit n_2 in einer Ordinale liegen.

759. Um die Tangente in m_2 zu erhalten, zieht man eine Tangente im verwandten Punkte m''', sucht den Begegnungspunkt e_2 in $\bar{u}_3$ und zieht $e_2 m_2$ als gesuchte Tangente. Das zugeordnete Bild $e_1 m_1$ gibt die Tangente in m_1. Die Construction der Tangenten für die drei symmetrischen Punkte ist leicht durchführbar, wenn man bedenkt, dass $o_2 f_2 = e_2 o_2$ und $o_1 f_1 = e_1 o_1$ sein muss.

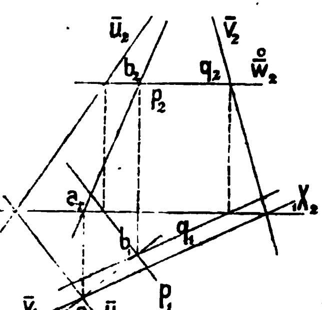
Fig. 98.



In Fig. 97 liegt ein Teil des ersten Kreisbildes negativ, ein Beweis, dass ein Teil des Raumkreises hinter der Bildebene II liegt.

Es wird für den Lernenden gut sein, bei der Ausführung der Zeichnungen für jede Projection eine andere Farbe zu benützen. Für die beigeordneten Projectionen wählt man dieselbe Farbe.

Fig. 99.



Wo liegen die Schnittpunkte des Kreises mit der Bildebene II und welcher Teil des zweiten Kreisbildes sollte gestrichelt sein?

760. Wie untersucht man, ob eine durch zugeordnete Projectionen gegebene Curve eine ebene Curve ist?

Man wählt drei beliebige Punkte einer Curve, zieht durch sie zwei sich schneidende Gerade und ermittelt zu der einen Projection der Curve die in der Ebene der beiden Geraden

liegende Deckcurve (681). Findet man, dass die Deckcurve mit der gegebenen zusammenfällt, dann ist die gegebene Curve eben.

Die Schnittgerade zweier Ebenen zu projicieren, wenn die Ebenen durch ihre Spuren gegeben sind. Kennzeichen paralleler Ebenen. Zu einander senkrechte Ebenen. Schnittgerade begrenzter Ebenen.

§. 38.

761. Wie construiert man die Durchschnittsgerade zweier Ebenen überhaupt?

Zwei gerade Linien, deren jede in irgend einer der beiden gegebenen Ebenen liegt, bringt man mit der anderen Ebene zum Schnitt und verbindet beide Schnittpunkte durch eine Gerade.

Man wählt die geraden Linien so, damit sich ihre Schnitte mit den Ebenen möglichst leicht bestimmen lassen. Sind u und v die sich schneidenden Ebenen, so können beide Geraden entweder in der Ebene u oder in der Ebene v, oder es kann auch die eine in u, die andere in v liegen.

762. Sind beide Ebenen durch ihre Spuren gegeben, so sucht man in zwei zugeordneten Bildebenen die Schnittpunkte ihrer Spuren. In Fig. 98 ist $a_1 a_2$ der Schnitt von $\bar{u}_1$ mit $\bar{v}_1$ und $b_2 b_1$ der Schnitt von $\bar{u}_2$ mit $\bar{v}_2$, folglich ist ab die Schnittgerade beider Ebenen.

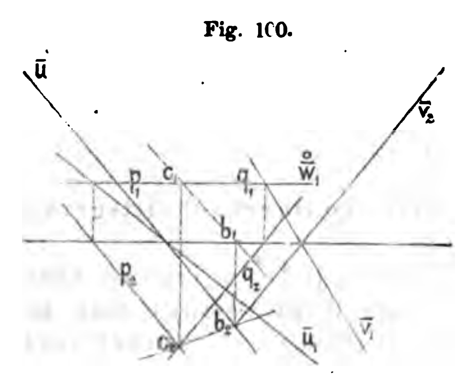
763. Liegt der Schnittpunkt der Spuren in einer Bildebene an einer unbenützbaren Stelle, so construiert man sich zwei Spurparallele mit einer gemeinsamen Projection in jener Bildebene, in welcher der unbenützbare Schnittpunkt liegt; diese Spurparallelen müssen sich schneiden, und ihr Schnittpunkt gehört der Durchschnittsgeraden beider Ebenen an (761).

In Fig. 99 wählt man zwei Einser - Spurparallelen p und q mit einem gemeinsamen zweiten Bilde $p_2 q_2$. Der Punkt $b_1 b_2$ ist der Schnittpunkt von p mit q, d. i. von p mit der Ebene v, folglich ist ab die Schnittgerade beider Ebenen.

In Fig. 100 wählt man zwei Zweier-Spurparallelen p und q mit einem gemeinsamen ersten Bilde. p_1 und q_1 wurden überdies hinter der Bildebene II angenommen; der Schnittpunkt von p_2 mit q_2 ist c_2, also ist bc die Schnittgerade beider Ebenen. Die Strecke bc liegt hinter der Bildebene II und unter der Bildebene I.

764. Welche Lage erhält die Schnittgerade zweier Ebenen, wenn die eine u eine beliebige Ebene, die andere w aber zu einer Bildebene parallel ist?

Fig. 100.

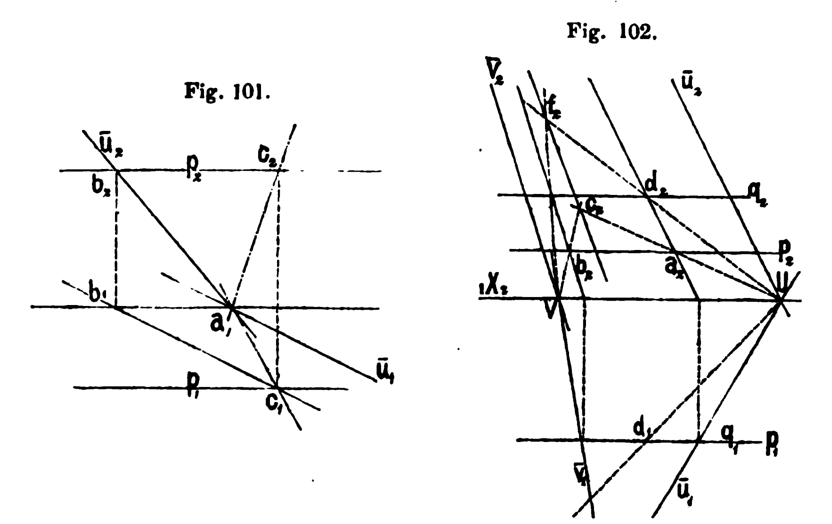


Die Schnittgerade wird eine Spurparallele der Ebene w. In Fig. 99 wurde die Ebene w parallel zur Bildebene I geführt, mithin ist die Einser-Spurparallele p die Schnittgerade der Ebene w mit der Ebene u. Ebenso ist q die Schnittgerade der Ebene w mit der Ebene v.

In Fig. 100 ist die Ebene w parallel zur Bildebene II und liegt hinter ihr. p ist die Schnittgerade der Ebene w mit u und q die Schnittgerade von w mit v

765. Wie construiert man mit Hilfe einer Ebene w einen Punkt der Schnittgeraden zweier Ebenen u und v?

Fig. 101. Fig. 102.



Man legt die Ebene w so auf, dass sie u und v günstig schneidet; der Schnittpunkt der entstehenden zwei Geraden gehört der Schnittlinie von u und v an. In Fig. 99, 100 wurde die Ebene w zu einer Bildebene parallel angenommen und der Punkt b, beziehungsweise c, durch sie bestimmt.

766. **Wie construiert man die Schnittgerade zweier Ebenen, wenn die eine u durch ihre Spuren gegeben ist, die andere w aber durch die Bildaxe ${}_1X_2$ und eine zu ihr parallele Gerade p geht?**

Man sucht, Fig. 101, zu einem Bilde der Geraden p, etwa zu p_2, eine Deckgerade in der Ebene u (687), welche Deckgerade eine Einser-Spurparallele der Ebene u wird; diese schneidet p in einem Punkte $c_1\,c_2$, welcher der gesuchten Schnittgeraden angehört. Ein anderer Schnittpunkt liegt in a_1, d. i. im Axenpunkte der Ebene u; daher ist $a_1\,c$ die Schnittgerade der Ebene w mit der Ebene u.

767. **Wie construiert man die Schnittgerade zweier Ebenen, wenn in keiner Bildebene der Schnittpunkt der Spuren benützbar liegt?**

Man wählt, Fig. 102, eine zur Bildaxe parallele Gerade $p_1\,p_2$, legt durch p und ${}_1X_2$ eine Hilfsebene w (766), sucht die Schnittpunkte a und b von p mit u und v, so sind Ua und Vb die Schnitte der Hilfsebene w mit u und v, folglich ist der Schnittpunkt c dieser zwei Geraden ein Punkt der Schnittlinie von u mit v. Wiederholt man dieses Verfahren mit einer anderen Geraden q, welche man der Einfachheit wegen als Deckgerade zu p annehmen wird, so findet man noch einen zweiten Punkt f der Schnittgeraden von u mit v, mithin ist cf die gesuchte Schnittgerade. In Fig. 102 fallen die Punkte $c_1\,f_1$ an unbenützbar liegende Orte, also kann auf dem kleinen Zeichnungsraume jener Figur kein erstes Bild der Schnittgeraden von u mit v liegen.

768. **Welche Lage besitzen die Bilder der Durchschnittsgeraden zweier Ebenen, wenn eine Spur der Ebene eine Nullseite ist?**

Die Nullseite ist schon ein Bild der Schnittgeraden; weil die Schnittgerade aber auch in der anderen Ebene liegt und ein Bild derselben gegeben ist, so findet man das zweite Bild der Geraden nach der bekannten Art (632).

769. Stehen beide Ebenen auf derselben Bildebene senkrecht, so steht auch die Schnittgerade auf dieser Bildebene normal; das eine Bild dieser Geraden ist sonach ein Punkt, das zugeordnete Bild steht normal zur Bildaxe.

770. **Woran erkennt man den Parallelismus zweier Ebenen?**

Wenn in zwei zugeordneten Bildebenen die Spuren der Ebenen parallel sind, ohne zur Bildaxe parallel zu sein. Sind

die Spuren zur Bildaxe parallel, so wird man eine dritte Bildebene, am besten senkrecht zur Bildaxe der beiden ersten Bildebenen legen und die dritten Spuren aufsuchen. Laufen diese parallel, so sind auch die gegebenen Ebenen parallel. Schneiden sich die dritten Spuren, so schneiden sich auch die Ebenen und ihre Schnittgerade ist zur Bildaxe der beiden ersten Bildebenen parallel.

771. **Wie construiert man zu einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene eine durch einen gegebenen Punkt gehende parallele Ebene?**

Man zieht durch den gegebenen Punkt eine Gerade parallel zu einer Spur der gegebenen Ebene (597), so ist diese Gerade eine Spurparallele der gesuchten Ebene. Durch ihren Schnittpunkt mit jener Bildebene, zu der sie nicht parallel ist, geht eine Spur der gesuchten Ebene parallel zur gleichvielten Spur der gegebenen Ebene (770).

772. **Wie construiert man allgemein zu einer gegebenen Ebene eine parallele Ebene durch einen gegebenen Punkt?**

Man zieht durch den gegebenen Punkt zu zwei geraden Linien der gegebenen Ebene zwei gerade Linien parallel (597) und legt durch sie die gesuchte Ebene.

773. **Wie construiert man eine Ebene, welche erstens durch eine gegebene Gerade geht, und zweitens mit einer gegebenen Richtung parallel läuft?**

Man wählt sich in der gegebenen Geraden einen Punkt (574), zieht durch ihn eine Parallele zu der gegebenen Richtung (597) und legt durch diese zwei sich schneidenden Geraden die gesuchte Ebene (621).

774. **Kann man durch eine gegebene Gerade eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene legen?**

Man untersucht, ob die Gerade zur Ebene parallel ist (703), weil nur in diesem Falle durch sie die geforderte Ebene geführt werden kann. Ist sie parallel zur Ebene, so wählt man in der gegebenen Ebene eine beliebige Gerade und legt zu ihr parallel durch die gegebene Gerade die gesuchte Ebene (773).

775. **Wie construiert man die Schnittlinien einer Ebene v mit zwei parallelen Ebenen u und w?**

Man sucht den Schnitt von v mit einer der Ebenen u oder w und zwar mit jener, mit welcher er sich am einfachsten be-

stimmen lässt. (761); von dem Schnitte der Ebene v mit der anderen Ebene sucht man blos einen Punkt und zieht durch ihn eine Gerade parallel zur gefundenen Schnittgeraden.

776. Soll man zwei durch ihre Spuren gegebene Ebenen u und v zum Schnitt bringen, so wird man bisweilen eine Ebene w parallel zu u legen und wie in (775) gelehrt wurde verfahren.

777. **Wie untersucht man, ob zwei gegebene Ebenen auf einander senkrecht stehen?**

Man errichtet auf eine Ebene eine Normale (705) und untersucht, ob diese zur anderen Ebene parallel ist (703). Trifft dies zu, so stehen die Ebenen aufeinander senkrecht.

778. **Wie legt man durch einen gegebenen Punkt eine Ebene senkrecht auf eine gegebene Ebene?**

Man zieht durch den Punkt zur gegebenen Ebene eine Normale (705) und legt durch diese eine beliebige Ebene. Die Aufgabe ist unbestimmt.

779. **Wenn in jeder von zwei zugeordneten Bildebenen die Spuren zweier Ebenen aufeinander senkrecht stehen, können dann die Ebenen selbst aufeinander senkrecht sein?**

Nein; denn zieht man auf die eine Ebene eine Normale, so kann diese zur anderen Ebene nicht parallel sein, weil man in einer Ebene im Allgemeinen keine Gerade ziehen kann, deren Projectionen zu den Spuren der Ebene parallel sind.

780. **Wenn die Spuren von zwei zueinander senkrechten Ebenen in einer Bildebene aufeinander senkrecht stehen, welche Lage müssen die Spuren in der zugeordneten Bildebene haben?**

Sie stehen senkrecht zur Bildaxe.

781. **Wie legt man durch eine gegebene Gerade eine Ebene senkrecht auf eine gegebene Ebene?**

Man zieht von einem Punkte der gegebenen Geraden eine Normale auf die Ebene (705) und legt durch sie und die gegebene Gerade die gesuchte Ebene.

782. **Wie construiert man den Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene?**

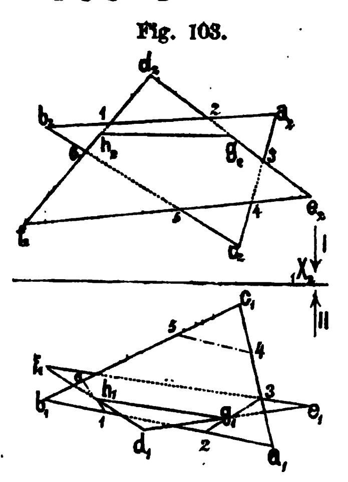
Man projiciert orthogonal die Gerade (zwei Punkte derselben) auf die gegebene Ebene und sucht die wahre Grösse des Winkels (740) zwischen der gegebenen Geraden und ihrer Projection auf der gegebenen Ebene (129).

Wählt man einen beliebigen Punkt seitwärts von der Ebene und zieht durch ihn zuerst eine Gerade mit der gegebenen Geraden parallel und dann eine Gerade auf die Ebene senkrecht und sucht die wahre Grösse des von diesen zwei Geraden gebildeten Winkels (740), so ist dieser gleich der Abweichung der Geraden von der Normale der Ebene, also ist die Ergänzung dieses Winkels auf einen Rechten gleich der Neigung der Geraden gegen die Ebene.

783. Wie construiert man die Neigung und den senkrechten Abstand zweier sich kreuzenden Geraden?

Wählt man in der einen Geraden p einen beliebigen Punkt A und zieht durch A eine Gerade q' parallel zur anderen Geraden q, so ist der von q' mit p gebildete Winkel die Neigung von q gegen p.

Fig. 108.



Sucht man von irgend einem Punkte B der Geraden q die orthogonale Projection B_u auf der Ebene $pq' = u$, und zieht man durch B_u eine Parallele q'' zu q, so wird q'' die Gerade p in einem Punkte C schneiden. Eine Gerade r durch C senkrecht auf die Ebene u muss q schneiden und die Strecke von r zwischen p und q ist der senkrechte Abstand der sich kreuzenden Geraden.

784. Sehr oft muss man die Durchschnittsgerade zweier begrenzten Ebenen construieren; eine solche Schnittgerade kann nie über den Umfang der begrenzten Ebenen hinausreichen, sondern wird von den Umfängen begrenzt.

785. Die Methode, die Schnittstrecke auszumitteln, besteht darin, dass man zu einem Bilde der einen begrenzten Ebene die Deckfigur in der zweiten begrenzten Ebene construiert, wodurch sich die Schnittpunkte des Umfanges der ersten Ebene mit der zweiten ergeben (761). Die Schnittpunkte aller Umfangsseiten liegen in einer geraden Linie, von welcher nur jener Teil be-

nützt wird, welcher beiden Ebenen innerhalb ihrer Grenzen angehört (784).

Mittels der Deckgeraden beurteilt man auch, welche Teile der Ebenen - Umfänge dem projicierenden Auge sichtbar sein werden (693—697).

786. Betrachten wir Fig. 103. Daselbst construieren wir zu dem zweiten Bilde des Dreickes *def* in der Ebene des anderen Dreieckes *abc* eine zweite Deckfigur, d. h. wir suchen jenen Teil der Ebene des Dreieckes *abc* auf, dessen zweites Bild in das zweite Bild des Dreieckes *def* fällt. Dieser Teil wurde in der Bildebene II durch die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 bezeichnet.

Die zugeordneten ersten Bilder sind leicht durch Ordinalen zu finden; denn da die Deckfigur in der Ebene *abc* liegen soll, so sind die Punkte 1, 2, 3, ... demgemäss in der Bildebene I aufzusuchen. Es liegen also 1 und 2 in der Seite *ba*, 3 und 4 in der Seite *ac*, endlich 5 und 6 in der Seite *cb*.

Nun vergleiche man die Seiten des Dreieckes *def* mit der Deckfigur im anderen Dreiecke *abc*. Das zweite Bild zeigt uns, dass *de* mit der Deckgeraden 2, 3 zu vergleichen sein wird. Die Vergleichung geschieht in der zugeordneten, also in der ersten Bildebene, woraus wir sehen, dass $d_1 e_1$ von 2, 3 in einem Schnittpunkte g_1 getroffen werden wird. Mithin sind $g_1 g_2$ die zugeordneten Bilder vom Schnitte der Seite *de* mit der Dreiecksebene *abc*, und zwar ist in der Bildebene II der von g_2 nach links liegende Teil der Geraden $d_2 e_2$ zu stricheln, weil die zweiten Ordinaten dieses Teiles kleiner sind, als die zweiten Ordinaten des deckenden Teiles der Deckgeraden 2, 3 (694).

In der Bildebene I wird der Teil $d_1 g_1$ ganz zu ziehen sein, denn von der Ebene *abc* ist die Oberseite zugleich Rückseite (697).

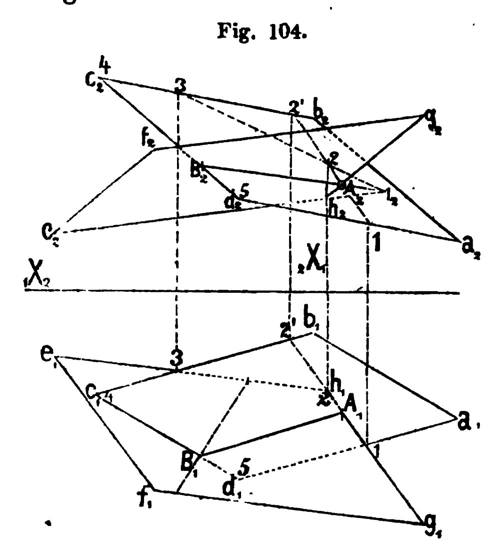
Vergleicht man die nächste Dreiecksseite *ef* mit der Deckgeraden 4, 5, so zeigt uns die Zeichnung der Bildebene I, dass zwar $e_1 f_1$ von 4, 5 geschnitten, dass aber der Schnittpunkt unbenützbar liegt. Folglich geht man zur Vergleichung der nächsten Seite *fd* mit ihrer Deckgeraden 6, 1, wobei $f_1 d_1$ von 6, 1 in einem Punkte h_1 geschnitten wird.

Die beiden Bilder $g_1 h_1$ $g_2 h_2$ bestimmen den Schnitt *gh* der Dreiecksebene *def* mit dem Dreiecke *abc*. Das Stricheln und Ziehen der Geraden wird nun leicht zu beurteilen sein.

787. Ebensogut wie zu dem Dreiecke *def* eine zweite Deckfläche in der anderen Ebene *abc* gesucht wurde, hätte man auch eine erste Deckfläche construieren können. Ebenso würde der Zweck erreicht worden sein, wenn man zum Dreiecke *abc* die Deckfigur in der Ebene *def* construiert hätte.

Der Lernende versuche es, zu Fig. 103 ein Modell anzufertigen.

Fig. 104.



788. Fig. 104 bietet ein anderes Beispiel der Durchdringung. Hier wurde zu dem Parallelogramme *efgh* eine **erste Deckfigur** in der Ebene *abc* construiert. In der Bildebene I wurden die Ecken der Deckfigur mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet, wobei 2 mit h_1, 4 mit c_1 und 5 mit d_1 zusammenfällt.

Der Deckpunkt 1 ergibt sich in *ad*, folglich liegt auch das zweite Bild von 1 in $a_2 d_2$. Der Deckpunkt 2 ergibt sich durch einen Hilfsdeckpunkt 2′, welcher in der Bildebene I durch die Verlängerung von $g_1 h_1$ bis nach $b_1 c_1$ entsteht. Durch den in $b_2 c_2$ ausgemittelten Punkt 2′ geht die Deckgerade 1, 2′, in welcher der gesuchte Deckpunkt 2 liegt. Der dritte Deckpunkt 3 liegt in *bc*, daher sein zweites Bild in $b_2 c_2$.

Vergleicht man jetzt $g_2 h_2$ mit der Deckgeraden 1, 2 in der Zeichnung der Bildebene II, so erhält man $A_2 A_1$ als den Schnitt der Seite *gh* mit der Ebene *abcd*. Vergleicht man ferner $h_2 e_2$ mit der Deckgeraden 2, 3, so findet man, dass in der Bildebene II $e_2 h_2$ von 2, 3 erst in der **Verlängerung** in i_2 getroffen wird. Trotzdem ist i_2 ein benützbarer Punkt; denn verbindet man i_2 mit A_2 und zieht von dieser Geraden jenen Teil $A_2 B_2$, welcher innerhalb der Grenzen beider Ebenen liegt, so ist $A_2 B_2$ das zweite Bild des Durchschnittes der beiden Parallelogrammsebenen.

Obwol man B_1 durch eine Ordinale bestimmen kann, wird man gut thun, der Probe halber auch B_1 mittels einer zu $c_2 d_2$ construierten Zweier-Deckgeraden zu ermitteln.

Aus den Decklinien beurteilt man die Sichtbarkeit der Parallelogrammsgrenzen (693).

789. Der Lernende zeichne nun auch Fälle, in welchen sich die begrenzten Ebenen innerhalb ihrer Grenzen gar nicht schneiden, obwol in jeder Bildebene sich die Projectionen der begrenzten Ebenen teilweise decken.

790. Sind die Ebenen durch Curven begrenzt, so kann man zu einer derselben eine Deckfigur in der anderen Ebene suchen und ähnlich wie bei Fig. 103 oder 104 verfahren; man kann aber auch jeder Curve ein beliebiges Dreieck einzeichnen und diese Dreiecke zur Construction der Durchschnittsgeraden benützen.

Das Neigungsmass zweier Ebenen von allgemeiner Lage zu construieren.

§. 39.

791. Nach (134) muss man jene zwei Ebenen u und v, deren gegenseitige Neigung gemessen werden soll, mit einer Ebene zum Durchschnitt bringen, welche auf der Durchgangslinie von u durch v senkrecht steht; der von den zwei Schnittlinien gebildete Winkel ist das Mass der Neigung von u gegen v.

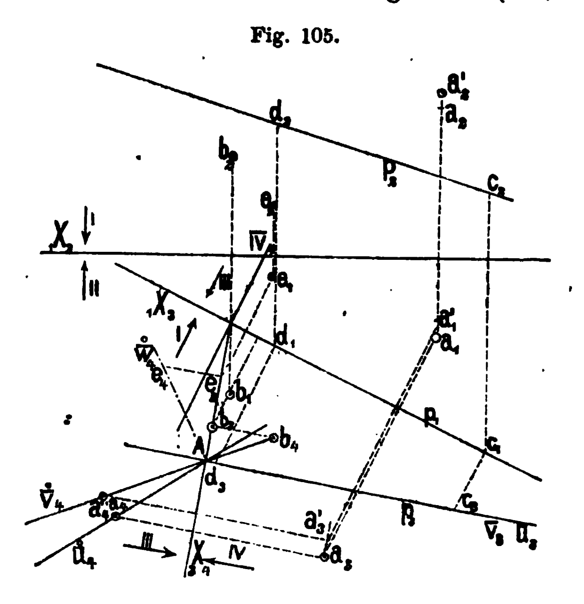
792. Der einfachste Fall, die Neigung zweier Ebenen u und v zu messen, ist jener, wenn beide Ebenen auf einer und derselben Bildebene senkrecht stehen, denn die Nullseiten beider Ebenen schliessen dann das Neigungsmass des Flächenwinkels (uv) ein.

793. Sind zwei Ebenen nicht senkrecht auf den gegebenen Bildebenen, so führt man neue Bildebenen ein, um auf den einfachsten Fall (792) zurückzukommen. Nehmen wir an, in Fig. 105 seien $p_1 p_2$ die zugeordneten Bilder der Durchschnittsgeraden zweier Ebenen u und v, von welchen u noch durch den Punkt $a_1 a_2$ und v durch den Punkt $b_1 b_2$ geht. Legen wir durch p_1 oder durch p_2 eine Bildebene III senkrecht zur vorhandenen Bildebene (in Fig. 105 wurde sie durch p_1 gelegt), und suchen durch Zuhilfenahme von zwei in der Geraden p beliebig angenommenen oder schon gegebenen Punkten $c_1 c_2$, $d_1 d_2$ das dritte

Bild $c_3 d_3$ der Geraden p, sowie auch die dritten Bilder $a_3 b_3$ der Punkte a und b, so ist $c_3 d_3$ offenbar sowol die dritte Spur der Ebene u, als auch der Ebene v und demzufolge mit $\bar{u}_3 \bar{v}_3$ zu bezeichnen.

Nun lege man eine Bildebene IV senkrecht auf die vereinigte $\bar{u}_3 \bar{v}_3$, (${}_3X_4$ wurde durch b_3 gelegt), setze wie bei der vorhergehenden Bildaxen die Sehpfeile und das richtig bezeichnete X hinzu und ermittle nach den Ordinatengesetzen (556) die vierten

Fig. 105.



Bilder $a_4 b_4'$ der Punkte a und b. Wie ${}_3X_4$ anzeigt, findet man das vierte Bild aus der dritten Ordinate und aus der Anzeige von ${}_1X_3$ ergibt sich die dritte Ordinate aus dem ersten Bilde (senkrechte Abstände der Punkte $a_1 b_1$ von der Bildaxe ${}_1X_3$). Die Vergleichung von (a_3) und (b_3) mit dem bei ${}_1X_3$ stehenden Sehpfeile III lehrt, dass (a_3) positiv, (b_3) negativ ist; mithin müssen diese Ordinaten auf den durch a_3 und b_3 senkrecht zu ${}_3X_4$ gezogenen Ordinalen von ${}_3X_4$ aus entsprechend dem bei ${}_3X_4$ stehenden Sehpfeile III aufgetragen werden, wodurch man a_4 und b_4 findet. Diese Punkte liegen in den vierten Spuren der Ebenen u und v und gehen die Spuren durch den Axenpunkt A. Da $\bar{u}_3 \bar{v}_3$ senkrecht zu ${}_3X_4$, so sind die vierten Spuren Nullseiten der Ebenen u und v, mithin ist der von $\mathring{u}_4$ und $\mathring{v}_4$ gebildete Winkel

(792) das Mass des spitzen Flächenwinkels, den u und v einschliessen.

794. Bisweilen ist es sehr empfehlenswert, die Spur jener Bildebene, auf welche die Bildebene III senkrecht geführt wurde, in der vierten Bildebene aufzusuchen. Im Falle der Fig. 105 müsste man die vierte Spur der Ebene I construieren, welche Spur nothwendigerweise durch den Schnittpunkt von ${}_3X_4$ mit ${}_1X_3$ senkrecht auf ${}_3X_4$ gezogen werden muss (604). Die durch denselben Axenpunkt auf ${}_1X_3$ gezogene Senkrechte ist die erste Spur der Ebene IV.

795. Ist die Durchschnittslinie zweier Ebenen uv, deren Neigung $\measuredangle (uv)$ gemessen werden soll, noch unbekannt, so muss man dieselbe vorher construieren (§. 38) und dann erst wie eben gezeigt verfahren.

796. Sind zwei Ebenen uv durch ihre ersten und zweiten Spuren gegeben, so kann man bei Anwendung der Methode (793), statt der beliebigen in den Ebenen liegenden Punkte a und b die in ${}_1X_2$ liegenden Axenpunkte $B_{1,2}$ $C_{1,2}$ der Ebenen u und v benützen. Man findet B_3 und C_3 in der Axe ${}_1X_3$ (oder ${}_2X_3$) und durch B_4 geht $\mathring{u}_4$, durch C_4 die $\mathring{v}_4$. Gleichzeitig ist $B_4 C_4$ die orthogonale Projection der Bildaxe ${}_1\dot{X}_2$ auf der Ebene IV.

797. Will man die vierte, zur Durchschnittsgeraden der Ebenen u und v senkrechte Ebene der Fig. 105 nicht als Bildebene ansehen, dann verfährt man gewöhnlich folgenderweise: Man legt wie vorhin durch p_1 (oder p_2) eine Bildebene III senkrecht zu I (respective II), zieht eine beliebige $\bar{s}_3$ senkrecht auf p_3 und sucht den Schnitt S_3 von $\bar{s}_3$ mit p_3 und A_1 von $\bar{s}_3$ mit p_1. Durch A_1 zieht man $\bar{s}_1$ senkrecht auf p_1, sucht den Schnitt B_1 von $\bar{s}_1$ mit $\bar{u}_1$ und C_1 von $\bar{s}_1$ mit $\bar{v}_1$, trägt $A_1 S_3$ von A_1 auf p_1 nach S' auf und verbindet S' mit B_1 und C_1, so ist $\measuredangle B_1 S' C_1$ die erste Congruenz-Projection des Winkels, in welchem die auf p senkrechte Ebene s den Flächenwinkel $(u_1 v)$ schneidet, also ist $\measuredangle B_1 S' C_1$ das Mass des $\measuredangle (u_1 v)$.

Der Lernende entwerfe sich selbst hiezu die Figur und führe den Beweis der Richtigkeit. Sollte $\bar{s}_1$ eine der $\bar{u}_1 \bar{v}_1$ in einem unbenützbar liegenden Punkte schneiden, so muss man auch $\bar{s}_2 \perp p_2$ bestimmen, und den Schnitt von $\bar{s}_2$ mit der entsprechenden zweiten Spur congruent auf die Bildebene I projicieren (733).

798. **Wie kann man eine Ebene w bestimmen, welche den von zwei Ebenen u und v gebildeten Flächenwinkel nach einem gegebenen Verhältnisse teilt?**

Man sucht sich eine Bildebene auf, in welcher die Ebenen u und v ihre Nullseiten zeigen; teilt den von den Nullseiten eingeschlossenen Winkel nach dem gegebenen Verhältnisse durch einen Stral, so ist dieser Stral eine Nullseite der gesuchten Teilungsebene, welche nun vollständig bestimmt ist.

In Fig. 105 soll der von den Ebenen u und v gebildete stumpfe Winkel halbiert werden. Man halbiert den stumpfen Winkel, den die Nullseiten $\overset{\circ}{\bar{u}}_4 \overset{\circ}{\bar{v}}_4$ in der vierten Bildebene einschliessen, durch einen Stral $\overset{\circ}{\bar{w}}_4$, so ist $\overset{\circ}{\bar{w}}_4$ eine Nullseite der Ebene w. Wird in $\overset{\circ}{\bar{w}}_4$ ein Punkt e_4 beliebig gewählt, so muss e_3 in der Bildaxe ${}_3X_4$ liegen. Durch e_3 eine Ordinale zu ${}_1X_3$ und die dritte Ordinate (e_3), (der senkrechte Abstand des Bildes e_4 von ${}_3X_4$), welche positiv ist, von ${}_1X_3$ aus auf Seite des Sehpfeiles III aufgetragen, gibt e_1 und in der durch e_1 gehenden Ordinale zu ${}_1X_2$ findet man mittels der ersten Ordinate (e_1), (senkrechter Abstand des Bildes e_3 von ${}_1X_3$), das zweite Bild e_2. Durch $p_1 p_2$ und $e_1 e_2$ ist die den stumpfen Winkel von uv halbierende Ebene w vollständig bestimmt.

Wählt man e_3 in ${}_1X_3$ statt in ${}_3X_4$, so wird e_1 ein Punkt in $\bar{w}_1$.

799. Zur Uebung wähle der Lernende eine verticale Bildaxe ${}_2X_3$, nehme zwei Ebenen u und v entweder durch ihre zweiten und dritten Spuren oder sonstwie gegeben an, und suche ohne Benützung der Bildebene I das Neigungsmass der beiden Ebenen.

In allen diesen Fällen benütze man bei der Ausführung für jede Bildebene eine andere Farbe.

Axen-Drehungen.

§. 40.

800. Bei den bisherigen Untersuchungen hatten wir Gebilde in fester Lage vor uns, welche wir auf verschiedene Bildebenen projicierten. Nun gelangen wir zu jenen Fällen, in welchen ein Gebilde aus einer durch zugeordnete Projectionen gegebenen Lage in eine neue Lage versetzt und wieder durch zugeordnete Projectionen bestimmt werden soll.

Eine Ortsveränderung eines festen Gebildes geschieht entweder durch eine Verschiebung, oder durch eine Drehung um eine Axe, oder durch Verschiebungen und Drehungen zugleich.

801. Bei einer Verschiebung beschreiben alle Punkte eines Gebildes parallele und gleich lange Strecken, folglich ist das Gebilde in der Urlage mit dem Gebilde in der Neulage perspectivisch congruent, mithin müssen auch in jeder Bildebene die orthogonalen Projectionen beider Lagen perspectivisch congruent sein. Die Ausführung einer Verschiebung durch die Zeichnung wird von jedem Lernenden, der das Vorhergehende verstanden, anstandslos vorgenommen werden können.

802. Eine Axendrehung ist die Bewegung eines Gebildes um eine feste gerade Linie, bei welcher alle Punkte des Gebildes Parallelkreise beschreiben, nämlich Kreise, deren Ebenen auf der festen Geraden senkrecht stehen, und deren Mittelpunkte in der Drehungsaxe (so bezeichnet man die feste Gerade) liegen.

Beispiele über Axendrehungen kommen sehr häufig im praktischen Leben vor; man denke dabei an die Bewegung von Wasserrädern, Zahnrädern, an die Bewegung der Thüren, Fensterflügel, des Pendels u. dgl. m.

803. Bei einer jeden Axendrehung beschreiben alle von der Drehungsaxe gleich weit abstehenden Punkte congruente Bögen; hingegen beschreiben Punkte von ungleicher Entfernung ungleiche Bögen, jedoch entsprechen allen Drehungsbögen gleiche Centriwinkel.

804. Jede durch die Drehungs- oder Rotationsaxe gelegte Ebene wird eine Meridianebene genannt.

805. Dreht man ein Gebilde um eine Axe, um einen gegebenen Drehungswinkel w, so gehören zu allen Drehungsbögen von Punkten derselben Meridianebene, parallele Sehnen. Da sich die Form eines Gebildes in Folge der Voraussetzung nicht ändert, so folgt hieraus:

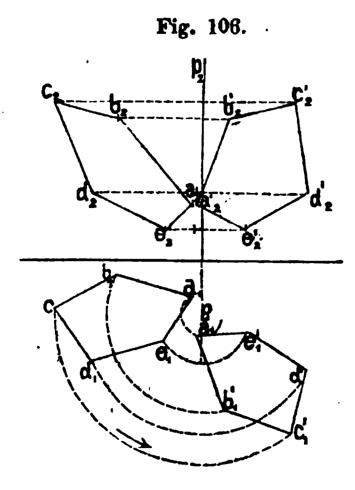
Jedes Gebilde einer Meridianebene liegt in jeder durch die Drehung herbeigeführten Lage mit der ersten Lage und auch mit allen Zwischenlagen perspectivisch affin (Congruenz-Projection).

Es ist nun leicht einzusehen, dass wir die Congruenz-Projectionen ebener Figuren auch durch Drehung derselben hervorbringen können. Wollte man z. B. ein Gebilde einer Ebene u congruent auf die Bildebene I projicieren, so würde man statt dessen nur die erste Neigung der Ebene u als Drehungswinkel und die erste Spur der Ebene als Drehungsaxe

ansehen, die Drehungsradien der einzelnen Punkte der Ebene u ermitteln, (diese sind die ersten Spurabstände der zu drehen-Punkte), und sie von $\bar{u}_1$ aus auf den durch die Drehungsmittelpunkte auf $\bar{u}_1$ errichteten in der Bildebene I liegenden Senkrechten entsprechend auftragen.

806. Dreht man ein Gebilde um eine zu einer Bildebene senkrechte Drehungsaxe p, so sind die orthogonalen Projectionen aller Parallelkreise auf dieser Bildebene den Parallelkreisen congruent, während die zugeordneten Bilder zur Bildaxe parallele Gerade sein müssen.

Fig. 106.



In Fig. 106 wurde ein ebenes Fünfeck um eine zur Bildebene I senkrechte Axe p um einen angenommenen Drehungswinkel w gedreht. Bei der Ausführung einer derartigen Drehung ist es gut auf einem Nebenblatte einen Winkel w aufzuzeichnen, sodann mit den Radien $p_1 a_1$, $p_1 b_1$, . . . zwischen seinen Schenkeln aus dem Scheitel Bögen zu beschreiben und die aus diesem Winkel abgenommenen Sehnen auf den durch a_1, b_1, . . . gehenden Bögen wieder als Sehnen einzutragen. Dadurch findet man die ersten Bilder a'_1, b'_1, . . . der Punkte a, b, . . . in ihren Neulagen a', b' . . . Die zugeordneten Bilder a'_2, b'_2, . . . liegen in den zugeordneten Bildern der Parallelkreise, d. i. in den durch a_2, b_2, . . . zur Bildaxe ${}_1X_2$ parallelen Geraden.

Zur Probe der genauen Arbeit überzeuge man sich von der Congruenz der ersten Bilder. In der Neulage der ebenen Figur ist die Oberseite Rückseite, während in der Urlage die Oberseite zugleich Vorderseite ist.

807. Ist die Drehungsaxe p nicht senkrecht zu einer der vorhandenen Bildebenen, sondern geneigt gegen beide, so wird man wie in Fig. 105 eine dritte und vierte Bildebene einführen, um die Drehungsaxe senkrecht zu einer Bildebene zu erhalten. Die Bildebene III braucht übrigens nicht wie in Fig. 105 durch p_1 zu gehen, es genügt, wenn sie nur zur Drehungsaxe p parallel und auf einer der vorhandenen

Bildebenen senkrecht ist. Führt man die Drehung im vierten und dritten Bilde aus, so ergeben sich hieraus auch die übrigen Bilder.

808. Dreht man eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene liegende Axe p, so müssen in jeder Bildebene die orthogonalen Projectionen der Ur- und Neulage perspectivisch affin liegen und die orthogonale Projection der Drehungsaxe p zur Begegnungsgeraden haben. Wenn man demnach nur einen Punkt der ebenen Figur um die Drehungsaxe nach der gewöhnlichen Art dreht und von seiner Neulage die zugeordneten Projectionen sucht, so kann man in jeder Bildebene das Bild der Neulage aus dem der Urlage nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität ableiten. Dieser Vorgang ist besonders dann sehr vorteilhaft, wenn die Ebene der Figur und die Drehungsaxe eine ganz allgemeine Lage besitzen.

809. Aufgabe. Man soll eine durch zwei zugeordnete Spuren gegebene Ebene u um eine beliebige Axe p um einen bekannten Winkel w drehen und die Neulage u' bestimmen.

Eine Ebene ist durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte vollständig bestimmt (26); mithin sind in u nur drei Punkte von einer solchen Lage zu wählen, und um die Axe p zu drehen. Durch die Neulage der drei gewählten Punkte geht die Neulage der Ebene u.

810. Bei jeder Drehung muss man in gegebenen Fällen auch den Drehungssinn berücksichtigen, denn man kann ein Gebilde auf eine zweifache Weise um eine Axe drehen.

811. Die Aufgabe (809) wird in manchen Beispielen sehr einfach; steht z. B. die Drehungsaxe p auf der n^{ten} Bildebene senkrecht, so fälle man aus der n^{ten} Spur der Axe p ein Loth auf $\bar{u}_n$ und drehe dieses Loth sammt der n^{ten} Spur um den gegebenen Winkel w, so ist die gedrehte Spur schon die n^{te} Spur $\bar{u}'_n$ der Neulage von u. Kennt man noch den Fixpunkt der Ebene u, (Durchschnittpunkt der Ebene u mit der Drehungsaxe), so ist durch $\bar{u}'_n$ und den Fixpunkt von u die Neulage u' von u vollständig bestimmt.

812. Da kein Punkt einer Drehungsaxe bei einer Drehung um diese Axe seinen Ort verändert, so kann man alle Punkte einer Drehungsaxe als Fixpunkte bezeichnen.

813. Aufgabe. Man soll eine Ebene u, welche durch eine Gerade $p_1 p_2$ und einen ausser ihr liegenden Punkt

$a_1 a_2$ gegeben ist, um einen vorgeschriebenen Winkel w um p als Axe drehen.

In Fig. 105 wurden nach (793) die Bildebenen III und IV eingeführt und $\mathring{u}_4$ ermittelt, in welcher a_4 liegt. In der Bildebene IV dreht man a_4 nach a'_4 um den Winkel w nach jener Richtung, welche allenfalls vorgeschrieben ist, so liegt a'_3 in der durch o_3 zu $\bar{u}_3$ senkrechten Geraden. Aus $a'_4 a'_3$ ergibt sich $a'_3 a'_1$ und aus $a'_3 a'_1$ das Punktepaar $a'_1 a'_2$ durch Anwendung der Ordinatengesetze. Es geht also die Neulage von u durch die Gerade $p_1 p_2$ und den Punkt $a'_1 a'_2$.

Anmerkung. Aus (793) wissen wir, dass der Punkt $b_1 b_2$ sich in der Ebene v befindet, welche bei der jetzigen Aufgabe die Neulage von u ist; es muss daher die Probe ergeben, dass die Schnitte von $a'_1 b_1$ mit p_1 und von $a'_2 b_2$ mit p_2 in einer Ordinale liegen. Dass in Fig. 105 die Punkte a und a' in derselben zu ${}_1X_2$ senkrechten Ordinatenebene liegen, ist Zufall.

Fig. 107.

814. Aufgabe. Man soll untersuchen, wie gross oder wie klein die Summe von zwei zugeordneten Neigungen einer Geraden q werden kann.

Steht eine Gerade q auf einer Bildebene senkrecht, so ist ihre zugeordnete Neigung gleich Null, daher beträgt die Summe beider Neigungen 90°. Ist eine Gerade mit der Bildaxe parallel, so sind beide Neigungen gleich Null, daher auch ihre Summe gleich Null. Ist die Gerade q zu einer Bildebene parallel, zur zugeordneten geneigt, so ist die eine Neigung gleich Null, die zugeordnete Neigung liegt zwischen den Grenzen 0° und 90°. Befindet sich die Gerade q in einer Ordinatenebene, so ist die Summe der zugeordneten Neigungen gleich 90°, denn beide Neigungen sind die spitzen Winkel eines rechtwinkeligen Dreieckes.

Befindet sich aber die Gerade q in einer allgemeinen Lage gegen die zugeordneten Bildebenen, so wähle man von der Geraden die eine Spur als Fixpunkt und die Drehungsaxe p senkrecht zur Bildaxe. Dreht man die Gerade q um p, bis sie in die durch p gehende Ordinatenebene gelangt, so hat sich während der Drehung die Neigung von q gegen jene Bildebene nicht ge-

ändert, auf welcher p senkrecht steht, während die Neigung von q gegen die zugeordnete Bildebene grösser geworden ist. In der Neulage ist die Summe der zugeordneten Neigungen gleich 90°, folglich muss in der Urlage die Summe der zugeordneten Neigungen der beliebigen Geraden q kleiner als 90° sein.

Es sind sonach 0° und 90° die noch zulässigen Grenzen für die Summe zweier zugeordneten Neigungen einer Geraden.

815. Aufgabe. Man soll eine Gerade q durch einen gegebenen Punkt $a_1 a_2$ so ziehen, dass ihre erste Neigung $\measuredangle q_I = \measuredangle \alpha$ und $\measuredangle q_{II} = \measuredangle \beta$ sei.

Soll die Aufgabe nicht unmöglich werden, so darf $\measuredangle \alpha + \measuredangle \beta$ nicht grösser als 90° sein. Nun setze man in Fig. 107 an die Ordinale $a_2 a_1$. in a_2 den Ergänzungswinkel α' von α auf 90° an, so ist ab' eine Gerade, welche mit der Bildebene I den $\measuredangle \alpha$ einschliesst. Dreht man die Raumgerade ab um die erste Ordinate aa_1 als Axe, so beschreibt b'_1 einen Kreis vom Radius $a_1 b'_1$ und b'_2 eine zur Bildaxe parallele Gerade; dabei liegt b' fort und fort auf einer Kugelfläche (139), deren Centrum a und Radius $= ab'$ ist, und alle Lagen von ab' sind unter dem Winkel α gegen die Bildebene I geneigt.

Setzt man in a_1 an die Ordinale $a_1 a_2$ die Ergänzung β' des Winkels β auf 90° an, bestimmt aber c'_1 durch die Länge $ab' = a_2 b'_2$, und lässt die Gerade ac' um die Ordinate aa_2 sich drehen, so beschreibt c' einen mit der Bildebene II parallelen Kreis, dessen erstes Bild eine durch c'_1 zur Bildaxe ${}_1X_2$ parallele Gerade ist. Der Punkt c' bleibt ferner auf derselben Kugelfläche, auf welcher b' sich bewegte, und alle Lagen von ac' sind unter dem $\measuredangle \beta$ gegen die Bildebene II geneigt. In den Punkten b und c schneiden sich die erwähnten Kreise (weil sie auf derselben Kugelfläche liegen), mithin erfüllen die vier Geraden ab und ac die Bedingungen mit der Bildebene I den Winkel α und mit der Bildebene II den Winkel β einzuschliessen.

816. Aufgabe. Man soll die Grenzen für die Summe zweier zugeordneten Neigungen einer Ebene u aufsuchen.

Ist eine Ebene u eine Ordinatenebene, so ist jede der beiden zugeordneten Neigungen = 90°, daher ihre Summe = 180°. Ist u zu einer Bildebene parallel, so ist die Neigung zu ihr = 0°, die zugeordnete Neigung = 90°, die Summe beider = 90°. Ist

u zur Bildaxe parallel, so ist jede einzelne Neigung kleiner als 90°, die Summe beider = 90°; steht aber die Ebene *u* auf einer Bildebene senkrecht, ist aber zur zugeordneten Bildebene schief, so liegt die Summe beider Neigungen zwischen 90° und 180°.

817. Zieht man zu einer Ebene *u* eine beliebige Normale *p* und sucht den Neigungswinkel von *p* mit irgend einer Bildebene, so ist dieser Winkel vermehrt um das Mass der Neigung der Ebene *u* gegen dieselbe Bildebene, stets gleich 90°, (wovon man sich leicht durch Versinnlichung der beiden Ebenen und der Geraden überzeugt), weil beide Winkel in einem und demselben rechtwinkeligen Dreiecke vorkommen.

818. Da die Summe der zugeordneten Neigungen einer Geraden *p* zwischen 0° und 90° liegt, und höchstens diese Grenzen erreicht, so kann die Summe der zugeordneten Neigungen einer Ebene *u*, vermöge des Satzes (817), nur zwischen 90° und 180° liegen, höchstens diese Grenzen erreichen.

819. Soll eine Ebene construiert werden, welche vorgeschriebene zugeordnete Neigungen besitzt, so wird man vorerst diese Neigungen von 90° subtrahieren, mit den Differenzen die Normale *p* construieren, (wofür man vier Lagen erhält [815]), und auf die Normale eine Ebene senkrecht legen.

(Eine einfachere Methode kann durch Anwendung zweier Kegelflächen, welche dieselbe Kugel umhüllen, gewonnen werden.)

Der Ebenenbüschel und einige seiner projectivischen Eigenschaften. Der harmonische Ebenenbüschel.

§. 35.

820. **Was versteht man unter einem Ebenenbüschel?**

Eine beliebige Menge von Ebenen, welche sich nur in einer einzigen geraden Linie, Axe oder Scheitellinie, schneiden.

821. Die Elemente eines Ebenenbüschels sind seine Ebenen. Liegt die Axe im Unendlichen, so wird er ein Parallel-Ebenenbüschel genannt.

822. **Wenn man einen Ebenenbüschel mit einer Ebene schneidet, welche zur Scheitellinie geneigt ist, was für ein Gebilde muss der Schnitt werden?**

Ein Stralenbüschel oder Vielstral (283), dessen Scheitel in der Scheitellinie des Ebenenbüschels liegt, und von dem je ein Stral sich in einer Ebene des Ebenen-Büschels befindet.

823. Von einem solchen Stralenbüschel sagt man, er liege im Ebenenbüschel, oder er liege mit dem Ebenenbüschel perspectivisch, oder auch, der Ebenenbüschel projiciere den Stralenbüschel. Jeder Stral des Stralenbüschels ist zu der Ebene des Ebenenbüschels, in welcher er liegt, projectivisch verwandt.

824. Wenn man einen Ebenenbüschel s (d. h. s soll die Scheitellinie des Büschels sein) mit zwei beliebigen Ebenen $E_1 E_2$ schneidet, in welcher Lage befinden sich die entstandenen zwei Stralenbüschel?

Sie liegen perspectivisch. Denn die Schnittgerade der Ebene E_1 mit E_2 wird vom Ebenenbüschel s in einer geraden Punktreihe geschnitten, und diese gerade Punktreihe ist beiden Stralenbüscheln gemein.

825. Wenn eine Gerade s die Bildebene I in einem Punkte a_1, die Bildebene II in einem Punkte b_2 schneidet, und man legt durch s einen Ebenenbüschel, in welcher Beziehung stehen die ersten Spuren dieser Ebenen zu den zweiten Spuren?

In jeder Projectionsebene bilden die Spuren einen Stralenbüschel und beide Stralenbüschel liegen perspectivisch, weil sie die Bildaxe entsprechend gemein haben (291).

826. Wenn ein Ebenenbüschel von zwei beliebigen Geraden geschnitten wird, in welcher Beziehung stehen die auf ihnen sich ergebenden geraden Punktreihen?

Sie sind projectivisch-proportional (265). Denn legt man durch jede derselben eine Ebene, so entstehen zwei perspectivisch liegende Stralenbüschel (824); jede der beiden geraden Punktreihen erscheint sodann als eine Projection jener geraden Punktreihe, welche beiden Stralenbüscheln gemeinsam ist.

827. Die in derselben Ebene des Büschels liegenden Punkte der erwähnten zwei geraden Punktreihen sind projectivisch verwandt.

828. Schneiden sich die Geraden, so liegen die geraden Punktreihen perspectivisch (273).

829. Von jeder geraden Punktreihe, die durch den Schnitt eines Ebenenbüschels mit einer Geraden entsteht, sagt man, sie liege im Ebenenbüschel, sie liege mit dem Ebenenbüschel perspectivisch, oder sie werde durch den Ebenenbüschel projiciert.

830. Wie wird eine gerade Punktreihe durch einen Ebenenbüschel, d. h. aus einer Axe projiciert?

Man wählt eine Gerade *s* als Axe eines Ebenenbüschels, aber so, dass sie den Träger der geraden Punktreihe nicht schneidet, und legt durch *s* und jeden Punkt der geraden Punktreihe eine Ebene. Der so entstehende Ebenenbüschel projiciert die gerade Punktreihe aus der Axe *s*. Schneidet dieser Ebenenbüschel eine Ebene, oder eine beliebige Gerade, so sind sowol der Stralenbüschel als auch die entstehende gerade Punktreihe Axenprojectionen der gegebenen geraden Punktreihe, und sind auch dieser letzteren projectivisch proportional (265).

831. Wie wird ein Stralenbüschel *S* durch einen Ebenenbüschel projiciert?

Man zieht durch den Scheitelpunkt *S* des Stralenbüschels eine beliebige Gerade *s*, die nicht in der Ebene des Stralenbüschels liegt, und legt durch *s* und jeden Stral von *S* eine Ebene, so projicieren diese den Stralenbüschel.

832. Wann liegen zwei Ebenenbüschel perspectivisch?

Wenn sie denselben Stralenbüschel projicieren (831). Die Axen von zwei perspectivisch liegenden Ebenenbüscheln schneiden sich in dem Scheitelpunkte des Stralenbüschels, der beiden Ebenenbüscheln gemeinsam ist.

833. Wann nennt man zwei Ebenenbüschel projectivisch-proportional oder kurzweg projectivisch?

Wenn jede gerade Punktreihe, welche der eine Ebenenbüschel auf einer beliebigen Transversalen erzeugt, einer geraden Punktreihe projectivisch-proportional ist, die der andere Ebenenbüschel auch auf einer beliebigen Transversalen hervorbringt, oder wenn jeder Stralenbüschel, den der eine Ebenenbüschel erzeugt, jedem Stralenbüschel projectivisch verwandt ist, der durch den zweiten Ebenenbüschel entsteht. Je zwei Ebenen, welche verwandte Punkte oder Stralen der geraden Punktreihen oder Stralenbüschel erzeugen, nennt man verwandte oder auch homologe Ebenen.

834. Wenn zwei Ebenenbüschel perspectivisch liegen (832), welche Lage haben die Schnittgeraden der verwandten Ebenen?

Sie liegen sämmtlich in einer Ebene und bilden den Stralenbüschel, welcher von den beiden Ebenenbüscheln projiciert wird (831).

835. Wie construiert man bei zwei perspectivisch liegenden Ebenenbüscheln irgend zwei verwandte Ebenen?

Man zieht durch den Scheitel S jenes Vielstrales, den beide Büschel projicieren, in der Ebene des Vielstrales irgend einen Stral und legt durch ihn zwei Ebenen, deren jede durch eine Axe der Ebenenbüschel geht.

836. Gibt es bei zwei perspectivisch liegenden Ebenenbüscheln verwandte Ebenen, welche zusammenfallen müssen?

Es gibt deren immer zwei und nur zwei; denn immer kann man in der Ebene des gemeinsamen Vielstrales durch den Scheitel S einen und nur einen Stral so ziehen, dass die durch ihn gehenden Ebenen der beiden Ebenenbüschel zusammenfallen.

Dieser Stral ist nämlich die Durchschnittsgerade der durch beide Axen der Ebenenbüschel gelegten Ebene mit der Ebene des gemeinsamen Stralenbüschels. Hieraus folgt auch, das jederzeit bei zwei perspectivisch liegenden Ebenenbüscheln die einzigen zwei verwandten Ebenen, welche in eine Ebene zusammenfallen, durch beide Axen der Ebenenbüschel gehen.

837. Was für eine Erscheinung muss eintreten, wenn man zwei projectivische Ebenenbüschel (833) so legt, dass irgend zwei verwandte Ebenen zusammenfallen?

Die Ebenenbüschel müssen perspectivisch liegen (832); denn die Schnittgeraden aller Paare verwandter Ebenen schneiden sich in einem einzigen Punkte S und liegen ausserdem noch in einer und derselben Ebene.

838. Wann ist eine gerade Punktreihe mit einem Stralenbüschel oder mit einem Ebenenbüschel projectivisch-proportional?

Wenn die gerade Punktreihe, welche der Stralenbüschel oder der Ebenenbüschel auf einer beliebigen Transversale erzeugt, der gegebenen geraden Punktreihe projectivisch-proportional ist.

839. Wie wird man zu einem gegebenen Ebenenbüschel s' $(a'b'c'\ldots)$ einen beliebigen projectivisch-proportionalen Ebenenbüschel s'' construieren (833)?

Man wird eine beliebige Axe s'' annehmen, einerlei ob sie s' schneidet oder nicht; durch s'' irgend drei Ebenen a'', b'', c'' legen und voraussetzen, dass a'' die zu a', b'' die zu b', c'' die zu c' verwandte Ebene sein soll. Alsdann schneidet man beide Ebenenbüschel durch gerade Linien t_1, t_2. Auf t_1 entsteht durch die Ebenen $a'b'c'd'e'$ ... eine Reihe von genau sovielen Punkten $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ ... als s' Ebenen besitzt; auf t_2 hingegen entstehen nur drei Punkte $A_2 B_2 C_2$ durch die Ebenen $a''b''c''$. Nun müssen beide Punktreihen projectivisch-proportional werden (265), und weil $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, drei Paare verwandter Punkte sind, so kann man zu jedem der Punkte $D_1 E_1$ ... seinen verwandten Punkt $D_2 E_2$ ... nach der projectivischen Proportionalität construieren (276). Sind diese Punkte gefunden, so legt man durch jeden derselben und die Gerade s'' eine Ebene, dann bilden diese Ebenen den gesuchten Ebenenbüschel.

840. Wenn zwei projectivisch-proportionale gerade Punktreihen in derselben Geraden liegen, oder wenn zwei concentrische projectivische Stralenbüschel in einerlei Ebene sich befinden, oder wenn endlich zwei projectivisch-proportionale Ebenenbüschel eine gemeinsame Scheitellinie erhalten, wie viele Elemente des einen Gebildes können mit den ihnen verwandten Elementen des anderen Gebildes zusammenfallen?

Entweder sind die Gebilde congruent und decken sich, oder es fallen nur zwei Paare oder ein Paar oder gar keine Elemente zusammen. Denn denken wir uns auf einer Geraden p zwei projectivisch-proportionale gerade Punktreihen R_1 und R_2, so können wir in einer durch p gelegten Ebene E aus einem beliebigen Punkte S_1 die Reihe R_1 und aus einem anderen Punkte S_2 die Reihe R_2 projicieren und die Linie II. Ordnung suchen, welche durch die Schnitte verwandter Stralen entsteht. Schneidet diese Curve die Gerade p in zwei Punkten, (denn mehr Schnittpunkte sind ja nicht möglich), so sind diese beiden Reihen $R_1 R_2$ entsprechend gemein; berührt die Curve die Gerade p in einem Punkte, so haben R_1 und R_2 nur einen entsprechend gemeinsamen Punkt und schneidet die Curve die Gerade p nicht, so haben R_1 und R_2 keine entsprechend gemeinsamen Punkte.

Da die Reihen $R_1 R_2$ auch die Schnitte der Geraden p mit zwei concentrischen projectivischen Stralenbüscheln oder Ebenen-

büschel sein können, so gilt der Beweis für die sämmtlichen drei Elementargebilde der ersten Stufe.

841. **Wann bilden vier Ebenen einen harmonischen Ebenenbüschel?**

Wenn sie auf einer beliebigen Geraden eine harmonische Punktreihe oder auf einer beliebigen Ebene einen harmonischen Stralenbüschel erzeugen.

842. **Wann bilden vier Ebenen einen halbierten harmonischen Ebenenbüschel?**

Wenn zwei Ebenen die Winkel halbieren, welche zwei andere Ebenen einschliessen.

Schneidet man einen halbierten harmonischen Ebenenbüschel mit einer Ebene senkrecht zur Axe des Büschels, so entsteht ein halbierter harmonischer Stralenbüschel (303).

843. **Wie construiert man zu drei Ebenen eine vierte, damit ein harmonischer Ebenenbüschel entsteht?**

Die Aufgabe lässt drei Auflösungen zu. Man nennt je zwei getrennt liegende Ebenen eines harmonischen Büschels, **conjugierte Ebenen**; desshalb muss man bei der Auflösung wissen, zu welcher Ebene die zu suchende conjugiert sein soll.

Sind abc die drei gegebenen Ebenen und soll die zu suchende Ebene d mit b conjugiert werden, so wird man in der Ebene b einen Punkt B annehmen und durch ihn zu einer der beiden anderen Ebenen, z. B. zu a eine parallele Gerade t ziehen, wodurch auf dieser ein Schnittpunkt C mit der Ebene c entstehen wird, während der Schnittpunkt A im Unendlichen liegt. Bezeichnet man den Schnitt von t mit der zu suchenden Ebene mit D, so muss ∞BCD eine harmonische Reihe, also $BC = CD$ sein (301). Trägt man demnach das Stück BC von C aus auf t nochmals auf, so erhält man den Punkt D, durch welchen die vierte Ebene d geht.

844. **Was versteht man unter einem involutorischen Ebenenbüschel?**

Einen aus zwei projectivischen Ebenenbüscheln mit gemeinsamer Axe zusammengesetzten Ebenenbüschel, welcher auf jeder Geraden eine involutorische gerade Punktreihe erzeugt (315).

845. Liegt ein ebener Stralenbüschel oder eine gerade Punktreihe so zwischen den Ebenen eines Ebenenbüschels, dass der neue Ebenenbüschel, welcher den Stralenbüschel oder die gerade

Punktreihe aus der Axe des gegebenen Ebenenbüschels projiciert (830), mit dem letzteren einen involutorischen Ebenenbüschel bildet, so sagt man, der Stralenbüschel oder die gerade Punktreihe liegen mit dem Ebenenbüschel involutorisch.

846. Wenn ein involutorischer Ebenenbüschel auf einer Geraden eine involutorische Punktreihe mit Ordnungspunkten erzeugt, so gehen durch diese die zwei Ordnungsebenen des Ebenenbüschels.

847. Je zwei conjugierte Ebenen eines involutorischen Ebenenbüschels bilden mit den Ordnungsebenen einen harmonischen Ebenenbüschel (841).

B. Die axonometrischen Projectionen.

§. 42.

848. Die gegenseitige Lage der Punkte eines Raumgebildes wird am einfachsten durch ihre senkrechten Ordinaten bezüglich dreier Ebenen bestimmt, deren jede auf den beiden anderen senkrecht steht. Sind diese Ebenen Projectionsebenen (wie in Fig. 54), und bestimmt man mittels der Ordinaten die Projectionen der einzelnen Punkte, so erhält man drei orthogonale Abbildungen des räumlichen Gebildes.

Fig. 108.

849. Oft aber haben drei zu einander senkrechte Coordinatenebenen, bezüglich welcher man die Coordinaten der Punkte eines Gebildes kennt, gegen die Zeichnungsebene eine geneigte Lage und es wird verlangt, die orthogonale Projection des Gebildes auf der Zeichnungsebene anzugeben, ohne die Lage der Coordinatenebenen gegen die Zeichnungsebene und ohne die Lage des Gebildes gegen die Coordinatenebenen zu verändern. Diejenige Methode, welche lehrt, mittels dieser Coordinaten das orthogonale Bild eines Gebildes herzustellen, bildet den Gegenstand der Axonometrie.

850. Denkt man sich im Raume drei wechselseitig aufeinander senkrechte Ebenen, deren Durchschnittslinien beziehungsweise mit X, Y, Z bezeichnet und Coordinatenaxen genannt werden sollen, so kann man den senkrechten Abstand aa'' eines Punktes a von der einen Ebene mit x bezeichnen, wenn er mit der Axe X parallel läuft, mit y, (aa'''), wenn er mit Y, und mit z, (aa'),

wenn er zu Z parallel ist. Hat man noch die nothwendigen Vorkehrungen getroffen, um das Vorzeichen einer jeden Coordinate beachten zu können, so ist auch ein jeder Punkt vollständig der Lage nach angegeben, wenn man seine drei Coordinaten xyz kennt.

851. Der Durchschnittspunkt O der drei Coordinatenaxen wird der Coordinatenanfang, oder auch der Ursprung der Coordinaten genannt. Trägt man von O, Fig. 108, die Länge x auf OX nach OA' auf, zieht durch A' eine Parallele zur Axe Y und trägt die Ordinate y von A' aus dem Vorzeichen entsprechend auf dieser Parallelen nach $A'a'$ auf, so ist a' die orthogonale Projection des zu bestimmenden Punktes a auf der Ebene $XY = \mathfrak{Z}$. Wird sodann in a' eine Parallele zu Z errichtet und z von a' aus auf ihr aufgetragen, so gelangt man zum Raumpunkte a.

Wie man aus Fig. 108 ersieht, kann man zu dem Punkte a durch den Linienzug $OA' + A'a' + a'a = x + y + z$ oder durch $OA'' + A''a' + a'a = y + x + z$, oder durch $OA''' + A'''a'' + a''a = z + y + x$, u. s. w. gelangen. In der Regel pflegt man einen der zuerst genannten Linienzüge zur Auffindung des Punktes zu benützen.

852. Da alle x der verschiedenen Punkte unter einander parallel sind, so folgt, dass auch ihre orthogonalen Projectionen untereinander parallel sein werden, und dass allen x Projectionen ein und derselbe Modulus zukommen wird, (d. h. die orthogonale Projection eines jeden x durch x dividiert, gibt stets denselben Quotienten). Der Modulus von x ist der reciproke Wert des Modulus seiner Projection.

Dieselben Bemerkungen gelten auch für y und z.

853. Die Aufgaben der Axonometrie zielen demnach dahin:

a) die orthogonalen Projectionen der Coordinatenaxen auf der Zeichnungsebene anzugeben, und

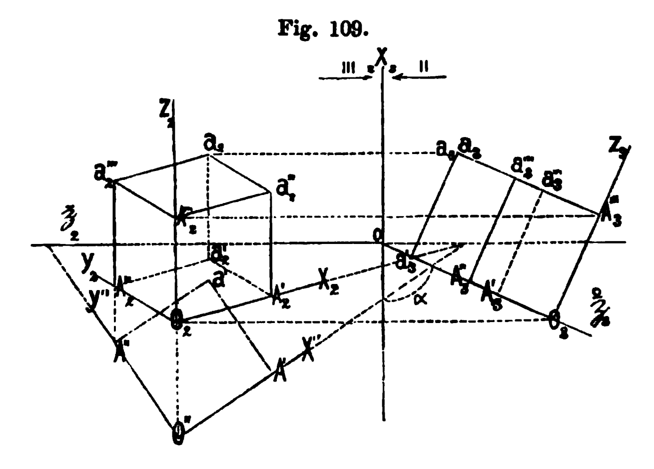
b) für jede Axenprojection den Modulus zu bestimmen.

854. Man nennt eine durch axonometrisches Verfahren bestimmte Projection trimetrisch, dimetrisch oder isometrisch, je nachdem keine oder zwei oder drei gleiche Moduli vorkommen. Wenn z. B. in Fig. 108 das orthogonale Bild eines Würfels dargestellt wäre, und es fände sich $OA'' = OA'''$ aber nicht $= OA'$, so wäre die Projection eine dimetrische.

855. Wie stellt man die Axen einer axonometrischen Projection dar?

Da es Regel ist, die Ebene $XY = \mathfrak{Z}$ so zu wählen, dass ihre Spur in der vertikal gedachten Zeichnungsebene II horizontal wird, Fig. 109, so wird man vorteilhaft mit der Bildebene II eine zugeordnete verticale Bildebene III in Verbindung bringen und ausserdem die Ebene $XY = \mathfrak{Z}$ congruent auf die Bildebene II projicieren (733). Nimmt man desshalb O'' als zweite Congruenz-Projection des Coordinatenanfanges O an, so

Fig. 109.



kann man durch O'' zwei Senkrechte $X'' Y''$ ziehen und sie als die Congruenz-Projection zweier Coordinatenaxen X und Y betrachten. Wird der zweite Spurabstand bezüglich $\bar{\mathfrak{Z}}_2$ nach oO_3 aufgetragen, so ist O_3 und hiedurch auch O_2 gefunden. Die Begegnungspunkte von X'' und Y'' mit O_2 verbunden, geben die Projectionen $X_2\, Y_2$ von zwei Axen an, während die dritte Axe Z_2 auf $\bar{\mathfrak{Z}}_2$ senkrecht stehen muss.

Um die Moduli für die Axenbilder zu erhalten, trägt man die als Einheit für das Originalgebilde angenommene Länge 1 nach $O''A'$, $O''A''$, $O_3 A'''_3$ auf und ermittelt A'_2, A''_2 A'''_2, so sind $O_2 A'_2$, $O_2 A''_2$, $O_2 A'''_2$ die Einheiten für die Massstäbe, auf welchen man die Längen für die Bilder von x, y und z abzugreifen haben wird.

856. Es kann nun jetzt jeder Punkt, dessen Coordinaten xyz man kennt, auf der Bildebene II orthogonal abgebildet werden, ohne die Bildebene III, und ohne die zweite Umlegung der Ebene $\mathfrak{Z}$ zu benützen. Ist beispielsweise a jener Punkt, für welchen $x = y = z = 1$ ist, so ergibt sich aus $x = O_2 A'_2$ und $y = A'_2 a'_2$ die orthogonale Abbildung a'_2 von der senkrechten Projection a'

des Punktes a auf der Ebene $\mathfrak{Z}$; und wird $a'_2 a_2 = z = O_2 A'''_2$ gesetzt, so ist a_2 das gesuchte orthogonale Bild von a.

857. Ergänzt man das Bild des durch a bestimmten Würfels, so erhält man auch noch die orthogonalen Abbildungen a''_2 a'''_2 der Projectionen des Punktes a auf den Coordinatenebenen $XZ = \mathfrak{Y}$ und $YZ = \mathfrak{X}$.

Auf eine ähnliche Art geht man auch vor, um die Bilder anderer Punkte zu finden, deren Coordinaten von 1 verschieden sind.

858. Bei vielen materiellen Kunstprodukten kommen vorzugsweise drei aufeinander senkrechte Dimensionen vor. Denkt man sich drei Ebenen, deren jede zu zwei Dimensionen parallel läuft, als Coordinatenebenen entsprechend angenommen, so vermag man gewöhnlich auch die Coordinaten der wichtigsten Punkte des Gegenstandes anzugeben. Werden diese Punkte axonometrisch abgebildet (856), dann kann aus ihren Bildern auch das Bild des Gegenstandes aufgefunden werden.

859. Wenn die Coordinaten xyz nicht in Zahlen angegeben sind, sondern aus einer anderen Zeichnung entnommen werden, pflegt man vorteilhaft statt der Massstäbe für die Axenbilder $X_2 Y_2 Z_2$ (855) Proportionalwinkel (230) anzuwenden. Die Einheit des Originalgebildes ist der Radius, und je eine Einheit des Axenbildes eine Sehne.

860. Sind bei einer axonometrischen Projection Constructionen auszuführen, wie sie früher bei zugeordneten Bildern ausgeführt wurden, dann wird es stets gerathen sein, die dritte Projection der zweiten zuzuordnen und die Umlegung der Ebene $\mathfrak{Z}$ zu benützen, wie dies Fig. 109 zeigt.

861. Die Umlegung der Ebene $\mathfrak{Z}$ und ihr zweites Bild liegen perspectivisch affin; $\overline{\mathfrak{Z}}_2$ ist die Begegnungsgerade. Man wird daher in manchen Fällen die Umlegung der in der Ebene $\mathfrak{Z}$ liegenden Projection des Gebildes zeichnen und mittels des Modulus der Affinität (237) das zweite Bild der Ebene $\mathfrak{Z}$ ermitteln, aus welchem sich durch Anwendung des Modulus für die Axe Z_2 das orthogonale Bild des Raumgebildes finden lässt.

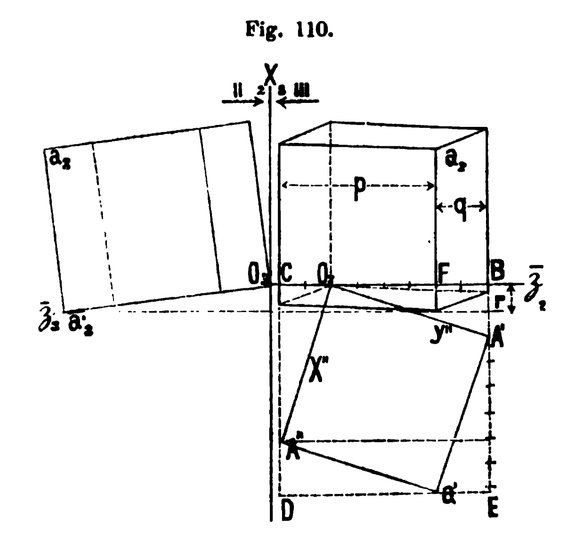
862. Stellt man die Axen $X'' Y''$ gleichgeneigt gegen $\overline{\mathfrak{Z}}_2$, so erhält man für jeden beliebigen Winkel von α eine dimetrische Projection. Wird aber $\measuredangle\, \alpha$ so gewählt, dass das dritte Bild A'''_3 a'_3 der Würfeldiagonale, senkrecht zu ${}_2X_3$ wird, dann erscheint das Bild $O_2 A'_2 a''_2 a_2 a'''_2 A''_2$ als ein einem Kreise eingeschrie-

benes reguläres Sechseck, in welchem A'''_2 und a'_2 mit dem Kreismittelpunkte zusammenfallen. Die axonometrische Projection wird in diesem Falle isometrisch.

863. Die Richtungen X_2 Y_2 sind bei der isometrischen Projection unter 30° gegen $\bar{\mathfrak{Z}}_2$ geneigt. Benützt man die rechtwinkeligen Coordinaten eines Gebildes in ihrer wahren Grösse, ohne sie dem isometrischen Massstabe entsprechend zu verkleinern, so wird die entstandene isometrische Projection eine vergrösserte Vertical-Projection des Raumgebildes sein.

864. Welche axonometrische Projection wird die Mohs'sche Projection genannt?

Fig. 110.



Jene, bei welcher, wie in Fig. 110, dem Würfel eine derartige Stellung gegeben wird, damit $p:q:r$ im Verhältnisse wie $6:2:1$ steht. Trägt man sich auf $\bar{\mathfrak{Z}}_2$ acht gleiche beliebig grosse Teile auf und construiert in dem Quadrate $BCDE$ ein anderes Quadrat $O_2 A' a' A''$, und wählt a'_3 in dem aus O_2 mit Fa' als Radius beschriebenen Kreise dort, wo er die Gerade schneidet, die in dem Abstande eines Teiles zu $\bar{\mathfrak{Z}}_2$ parallel gezogen wurde, so ist die dritte Spur der Ebene $\mathfrak{Z}$ gefunden, auf welcher Ebene der Würfel steht. Sucht man, wie bei Fig. 109, das zweite Bild des Würfels so ergeben sich aus demselben die Einheiten für die Massstäbe der Axenrichtungen.

C. Die schiefen Projectionen.

Schiefe Projectionen der zur Bildebene senkrechten Geraden. Modulus der schiefen Projection.

§. 43.

865. Wenn die parallel projicierenden Stralen zur Bildebene nicht senkrecht stehen, so bezeichnet man die Parallelprojection als eine schiefe (506).

866. Für die praktische Anwendung setzt man in der Regel voraus, die Bildebene, auf welche man schief projiciert, stehe vertical und sei mit der Bildebene II vereinigt.

867. Wie fixiert man die Richtung der schief projicierenden Stralen?

Der Lernende stelle seine Zeichnungsebene II vertical vor sich hin, nehme in ihr beliebige Punkte $a_2\, b_2\, c_2 \ldots$ an, errichte durch sie Ordinaten $a_2 a$, $b_2 b$, $c_2 c \ldots$ senkrecht zur Zeichnungsebene, so kennt er die Raumpunkte $abc \ldots$

Denken wir uns nun alle diese Punkte $a, b, c, \ldots$ werden mit irgend einer angenommenen Richtung parallel auf die Ebene II projiciert und alle durch dieses Projectionsverfahren entstandenen schiefen Projectionen mit dem Buchstaben des projicierten Punktes versehen, dem unten rechts der Zeiger s angehängt wird, so sind a_s, b_s, $c_s, \ldots$ die Bezeichnungen für die schiefen Projectionen der Punkte $a, b, c, \ldots$, und $a_2 a_s$, $b_2 b_s$, $c_2 c_s$ sind die schiefen Projectionen der Ordinaten $a_2 a$, $b_2 b$, $c_2 c, \ldots$

868. Ohne Mühe erkennt man jetzt:

1. Die schiefen Projectionen aller zur Bildebene senkrechten Geraden sind zur orthogonalen Projection der schief projicierenden Richtung parallel.

2. Die Dreiecke $a a_2 a_s$, $b b_2 b_s$, $c c_2 c_s, \ldots$ sind einander ähnlich und in Folge dessen verhält sich

$$a_2 a_s : a_2 a = b_2 b_s : b_2 b = c_2 c_s : c_2 c = \ldots .$$

d. h. das Verhältnis der Länge der schiefen Projection einer zur Bildebene II senkrechten Strecke zur Länge dieser Strecke ist eine constante Grösse; sie soll der Modulus der schiefen Projection genannt werden.

869. Zugleich sieht man aus dem Verhältnisse $a_2 a_s : a_2 a = \mu$ oder aus $a_2 a_s = \mu \,.\, a_2 a = \mu\ (a_2)$ ein:

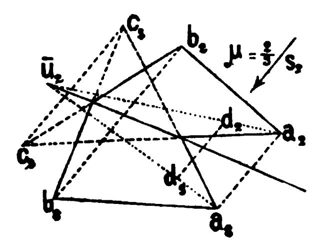
Die vom orthogonalen Bilde a_2 aus gemessene Entfernung bis zum schiefen Bilde a_s, ist ein Produkt aus der senkrechten Ordinate (a_2) in den Modulus μ der schiefen Projection. Dieses Produkt soll als modulierte Ordinate des Punktes a bezeichnet werden.

870. Durch den Modulus μ der schiefen Projection ist auch der Winkel φ angegeben, den jeder schief projicierende Stral mit seiner orthogonalen Projection auf der Bildebene II einschliesst.

871. Soll aber die projicierende Richtung vollständig für die Zeichnung bestimmt sein, so muss ausser dem Modulus noch die Richtung s_2 der orthogonalen Projection eines projicierenden Strales auf der Bildebene der schiefen Projection angegeben sein. Gleichfalls pflegt man noch durch einen Sehpfeil die Lage des projicierenden Auges im Sehstrale näher zu bezeichnen.

872. Jede zur orthogonalen Projection s_2 eines schiefen Sehstrales parallel gezogene Gerade bezeichne man als eine schiefe Ordinale, denn sie ist der Schnitt einer Ordinatenebene, welche durch die senkrechte und durch die schiefe Ordinate, also durch die zwei schief zugeordneten Ordinaten eines Punktes gelegt werden kann, mit der Bildebene.

Fig. 111.



Die orthogonale und die schiefe Projection irgend eines Punktes liegen demzufolge immer in einer schiefen Ordinale.

873. Aufgabe. Es ist die orthogonale Projection $a_2 b_2$ einer Strecke ab gegeben; man soll die schiefe Projection der zweiten Ordinatenfläche $a a_2 b_2 b$ darstellen, wenn $(a_2) = 19{\cdot}5$, $(b_2) = 39^{mm}$ ist.

In Fig. 111 ist die schief projicierende Richtung durch den Stral s_2 und den Modulus $\mu = \frac{2}{3}$ vollständig bestimmt. Zieht man durch a_2 und b_2 schiefe Ordinalen, so muss man die modulierte Ordinate (a_2), d. i. $\mu\ (a_2) = 13^{mm}$ von a_2 aus auf der Ordinale auftragen (868), um das Bild a_s zu erhalten.

Ist die Ordinate (a_2) positiv, so wird die modulierte Ordinate $\mu\,.\,(a_2)$ von a_2 aus nach dem Sinne des Sehpfeiles s_2 aufgetragen; ist aber (a_2) negativ, so geschieht das Auf-

tragen der modulierten Ordinate $\mu\,(a_2)$ im Gegensinne des Sehpfeiles s_2. Ist für Fig. 111 $(c_2) = -30^{mm}$, so erhält c_s die dort angesetzte negative Lage, während a_s und b_s positiv liegen.

Die zweite Ordinatenfläche von ab ist ein Trapez von den Seiten $a_2 b_2$, (a_2), (b_2), ab und den rechten Winkeln bei a_2 und b_2. Die schiefen Projectionen von (a_2) und (b_2) sind $a_2 a_s$, $b_2 b_s$, folglich ist $a_2 b_2 b_s a_s$ die gesuchte schiefe Projection der zweiten Ordinatenfläche von ab.

874. Die Seite $a_s b_s$ der schiefen Projection der zweiten Ordinatenfläche einer Strecke ab ist zugleich die schiefe Projection der Raumstrecke ab.

Sind die Endpunktsordinaten einer Strecke negativ, so wird die schiefe Projection der Ordinatenfläche ein verschlungenes Trapez, dessen nicht parallele Seiten sich schneiden, wie dies aus $b_2 c_2 c_s b_s$ zu ersehen ist.

875. Wenn von Ordinaten die Rede ist, welche durch keinen Beisatz näher bestimmt sind, werden wir immer die senkrechten Ordinaten von Raumpunkten bezüglich der Bildebene der schiefen Projection verstehen; analoges gilt bezüglich der Spuren von Geraden und Ebenen, und bezüglich aller Benennungen, die sonst durch die Nummer der Bildebene näher bestimmt wurden.

876. Welche Werte wird man dem Modulus μ der schiefen Projection beilegen?

Der für die Constructionen bequemste Wert ist $\mu = 1$, weil alle modulierten Ordinaten (869) den senkrechten Ordinaten gleich sind. Die Sehstralen werden in diesem Falle unter 45° zur Bildebene geneigt. Soll der Neigungswinkel grösser als 45° werden, so wird man μ kleiner als 1 wählen. $\mu > 1$ ist eine unzweckmässige Annahme.

877. In welcher Weise soll man eine nach der Methode der schiefen Projection angefertigte Zeichnung betrachten?

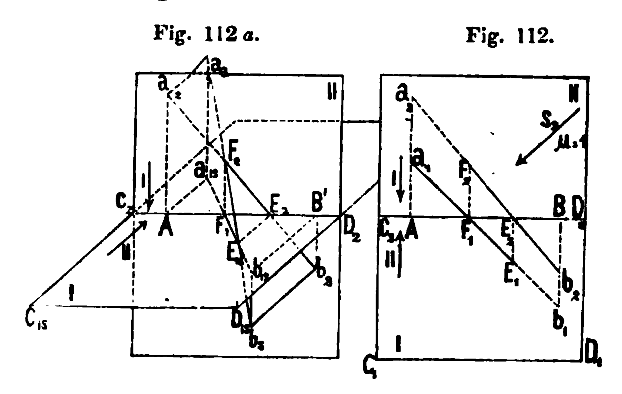
Eigentlich sollte sich die Zeichnungsebene in unendlicher Entfernung vom Auge befinden; da dies unausführbar, so wird man die Zeichnung soweit vom Auge entfernen, als es die Deutlichkeit des Sehens zulässt und dabei beachten, dass der beiläufig gegen die Mitte des Bildes gerichtete Sehstral jener Richtung nahezu parallel läuft, welche bei der Construction des Bildes

vorausgesetzt wurde. Auch wäre nur ein Auge für das Sehen zu benützen. Genügt man diesen Anforderungen nicht, so wird nicht selten das schiefe Bild seine Wirkung verfehlen.

878. **In welcher Beziehung steht das schiefe Bild einer ebenen Figur zu dem orthogonalen Bilde?**

Beide Bilder liegen perspectivisch affin, denn beide Bilder sind projectivisch verwandt, weil sie Projectionen derselben ebenen Raumfigur sind; die Spur der Ebene ist die Begegnungsgerade und s_2 die Richtung der affin projicierenden Stralen. Ein Blick auf Fig. 111 bestätigt diese Erkenntnis.

Fig. 112 *a*. Fig. 112.



Ist demnach das orthogonale Bild d_2 eines Punktes d einer ebenen Figur abc gegeben, Fig. 111, so wird man die schiefe Projection d_s nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität aus $a_2 a_s$ ermitteln, und umgekehrt kann man wieder aus dem schiefen Bilde d_s nach denselben Gesetzen die orthogonale Projection d_2 ableiten.

879. **Wie kann man aus der modulierten Ordinate eines Punktes die wahre Ordinate finden?**

Wenn man die modulierte Ordinate durch den Modulus der schiefen Projection dividiert. In Fig. 111 wäre daher $(b_2) = b_2 b_s : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \cdot b_2 b_s$. Diese Multiplication wird man nach (227) ausführen.

880. **Aufgabe. Man soll die in Fig. 112 durch zwei zugeordnete Projectionen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ dargestellte Gerade ab sammt der Bildebene I schief projicieren. Der Modulus μ werde $= 1$ vorausgesetzt.**

Auflösung. Man begrenze beide Projectionsebenen durch Rechtecke und zeichne die begrenzte Bildebene II in Fig. 112*a*

sammt der Bildaxe $C_2 D_2$ auf. Zieht man durch C_2 eine schiefe Ordinale und trägt die modulierte Ordinate $C_2 C_{1}$, welche wegen $\mu = 1$ der $C_2 C_1$ selbst gleich ist, nach $C_2 C_{1,,}$ auf, so ist $C_{1,,}$ die schiefe Projection eines Eckpunktes der Bildebene I, deren Umriss nun in schiefer Projection dargestellt werden kann.

Ueberträgt man die zweiten Bilder a_2 und b_2 aus Fig. 112 nach Fig. 112a, und sucht nach (869) die Bilder $a_s\, b_s$, indem $a_2 a_s = 1.(a_2) = A a_1$ und $b_2 b_s = 1\,(b_2) = B b_1$ gesetzt und das Vorzeichen berücksichtigt wird, so erhält man das schiefe Bild $a_s\, b_s$ von ab. Ausserdem stellt man noch das schiefe Bild $a_{1,,}$ $b_{1,,}$ vom ersten Bilde $a_1\, b_1$ dar, und bezeichnet die beiden Spuren $E_{1,,}\, F_2$, um die Lösung der gestellten Aufgabe zu beenden.

Hilfsauge, Augpunkt, Nebenpunkt, Fluchtelemente. Congruenz-Stellungen. Congruenz-Projectionen.

§. 44.

881. Um die möglichst grösste Uebereinstimmung in der Construction schiefer und centraler Bilder zu erzielen, ist es angemessen, ausserhalb der Bildebene einen beliebigen festen Punkt anzunehmen und ihn zum Ausgangspunkt für eingehendere Untersuchungen zu ernennen. Da dieser Punkt für die schiefen Projectionen von gleicher Wichtigkeit ist, wie der Ort des optischen Mittelpunktes vom projicierenden Auge bei der centralen Projection, soll er das Hilfsauge der schiefen Projection genannt werden. Die orthogonale Projection des Hilfsauges sei der Augpunkt und die schiefe Projection des Hilfsauges der Nebenpunkt der schiefen Projection. Der senkrechte Abstand des Hilfsauges von der Bildebene der schiefen Projection sei die Augdistanz d, und der mit d aus dem Augpunkt in der Bildebene beschriebene Kreis der Distanzkreis.

882. Zieht man durch das Hilfsauge einen Stral parallel zu einer gegebenen Geraden p, so werde er der Fluchtstral und sein Schnitt mit der Bildebene der Fluchtpunkt der Geraden p genannt.

883. Die Länge des Fluchtstrales vom Hilfsauge bis zum Fluchtpunkt sei die Fluchtstrecke der Geraden p.

884. Legt man durch das Hilfsauge zu einer Ebene u eine parallele Ebene $\bar{\bar{u}}$, so bezeichne man sie als die Fluchtebene und ihre Spur in der Bildebene als die Fluchtspur der

Ebene-*u*. Das Symbol der Fluchtebene und der Fluchtspur sollen zwei über u und u_2 gesetzte Querstriche sein, nämlich $\bar{\bar{u}}$ und $\bar{\bar{u}}_2$ (lese Fluchtebene u und Fluchtspur u_2).

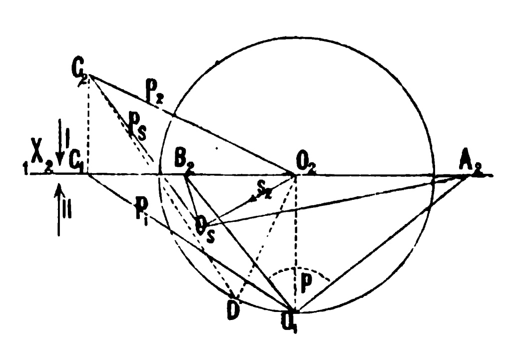
885. Welche Lage haben die schiefen Projectionen von parallelen geraden Linien?

Sie sind ebenfalls unter einander parallel, weil die schief projicierenden Stralen parallele projicierende Ebenen erzeugen.

886. Wie construiert man die Richtung des schiefen Bildes einer Geraden?

Verbindet man den Nebenpunkt (881) mit dem Fluchtpunkt der Geraden (882), so läuft mit dieser geraden Verbindung das schiefe Bild der Geraden parallel.

Fig. 113.



Beweis. Zieht man durch das Hilfsauge einen Fluchtstral zur gegebenen Geraden p parallel, so ist die Verbindung des Nebenpunktes mit dem Fluchtpunkt der Geraden die schiefe Projection des Fluchtstrales, folglich muss vermöge (885) die schiefe Projection der Geraden zur schiefen Projection ihres Fluchtstrales parallel sein.

887. Beispiel. In Fig. 113 wurde der Bildebene II, auf welche wir gewöhnlich schief projicieren, eine horizontale Bildebene I zugeordnet (531), und in ihr das Hilfsauge O_1 angenommen. Wählt man sich den Nebenpunkt O_s (881) beliebig, so ist hiedurch im Raume die Richtung OO_s der schief projicierenden Stralen vollständig gegeben. Der Modulus μ ist durch $\frac{O_2 O_s}{O_2 O_1}$ bestimmt (868, 2).

Ziehen wir durch O_1 eine horizontale Fluchtgerade $O_1 A_2$, so ist A_2 der Fluchtpunkt aller zu OA_2 parallelen Geraden, mithin muss $O_s A_2$ die schiefe Projection der Fluchtgeraden OA_2 sein. Wäre in der Bildebene II die schiefe Projection irgend einer zur OA_2 parallelen Geraden zu ziehen, so müsste sie mit $O_s A_2$ parallel sein.

Um die schiefe Projection einer horizontalen Fluchtgeraden zu finden, welche mit OA_2 den $\measuredangle\ \varphi$ einschliesst, wird man durch das Hilfsauge eine Gerade $O_1 B_2$ von dieser Beschaffenheit construieren. $O_1 B_2$ ist sofort ihr schiefes Bild.

888. Ist $p_1 p_2$ irgend eine beliebige durch $O_1 O_2$ gezogene Fluchtgerade p, C_2 ihr Fluchtpunkt, so ist $O_1 C_2$ ihre schiefe Projection. Ferner sieht man ein: Die Verbindungsgerade des Augpunktes mit einem Fluchtpunkte ist die orthogonale Projection der Fluchtstrecke auf der Bildebene.

889. Wie construiert man die wahre Länge einer Fluchtstrecke und ihre Neigung zur Bildebene?

Durch das zweite Differenzendreieck (581).

Also sind das zweite Bild einer Fluchtstrecke und die Augdistanz die beiden Katheten, die Hypothenuse ist gleich der wahren Länge der Fluchtstrecke. Wird daher in Fig. 113 $D O_2 \perp C_2 O_2$ gezogen, so ist DC_2 gleich der Fluchtstrecke OC_2 im Raume. $\measuredangle\ O_2 C_2 D$ ist die zweite Neigung der Geraden OC_2.

890. Was versteht man unter dem Modulus der schiefen Projection einer Geraden?

Einen Quotienten, welcher entsteht, wenn man die Länge der schiefen Projection einer in der Geraden liegenden Strecke durch die Länge der Strecke dividiert. Dieser Quotient ist eine unveränderliche Grösse, man mag die Strecke in der gegebenen Geraden, oder in einer zu ihr parallelen Geraden wählen, wo man will.

Also wird der Modulus der schiefen Projection einer Geraden auch gefunden, wenn man die schiefe Projection der Fluchtstrecke durch die Länge der Fluchtstrecke teilt. In Fig. 113 ist demnach $\frac{O_1 C_2}{D C_2}$ der Modulus für p_1.

Der reciproke Wert dieses Verhältnisses, nämlich, $\frac{D C_2}{O_1 C_2}$ ist der Modulus der Geraden p.

891. Wozu kann man den Modulus der schiefen Projection einer Geraden p benützen?

Um im schiefen Bilde der Geraden p Längen aufzutragen, welchen auf der Raumgeraden gegebene Längen entsprechen; oder umgekehrt, um aus dem schiefen Bilde einer Strecke die wahre Länge der Raumstrecke zu finden. Die beiden Längen, aus

welchen ein Modulus besteht, können gewissermassen als Massstäbe gelten und zwar die im Modulus vorkommende schiefe Projection als Massstab für die Längen der schiefen Bilder der Geraden p und die vorkommende wahre Länge als Massstab für die Gerade im Raume. Bei der Benützung wird man Proportionaldreiecke oder Proportionalwinkel zur Anwendung bringen (224).

892. **Ist die Lage einer Geraden im Raume vollständig bestimmt, wenn man ihre schiefe Projection kennt?**

Eine Projection allein bestimmt nie eine Linie vollständig, wesshalb bei den orthogonalen Projectionen auch zwei oder mehrere zugeordnete Bildebenen angenommen werden. Bei den schiefen Projectionen ist ebenfalls noch eine Projection herbeizuschaffen. Dabei treten gewöhnlich zwei Fälle auf:

Fig. 114.

a) man bestimmt noch die orthogonale Projection der Geraden auf der Bildebene der schiefen Projection, oder

b) man denkt sich die Raumgerade auf eine zugeordnete Bildebene I orthogonal projiciert, und projiciert diese Projection schief auf die Bildebene II. Ein Beispiel dieser Art zeigt Fig. 112 *a*. Der Zusammenhang mit Fig. 112 lehrt, dass man aus Fig. 112*a* die Fig. 112 construieren kann, wodurch eben bewiesen ist, dass Fig. 112*a* das Raumgebilde vollständig bestimmt. Ein Beispiel für *a*) zeigt Fig. 111. Ermittelt man nach (879) die zweite Ordinate von b, so kann man den Ort von b in der durch b_2 zur Bildebene senkrecht gezogenen Geraden auffinden, woraus man sieht, dass die beiden in einer schiefen Ordinale liegenden Projectionen $b_2 b_s$ und der Modulus μ die Lage von b genau auffinden lassen. Also ist in Fig. 111 das Dreieck abc vollständig bestimmt.

893. **Aufgabe. Es sei in Fig. 114 der Augpunkt O_2, der Nebenpunkt O_s, der Distanzkreis und eine Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ gegeben; man construiere:**

a) das Neigungsmass der Ebene $\bar{u}$ zur Bildebene II;

b) die schiefe Projection einer Zweier-Spursenkrechten (721), und ihren Modulus;

c) die schiefe Projection einer Normalen zur Ebene $\bar{\bar{u}}$ und den Modulus der Normalen.

ad a) Man lege durch den Augpunkt O_2 eine Bildebene III senkrecht auf $\bar{\bar{u}}_2$ und suche O_3, so ist $Q_2 O_3$ die Nullseite der Ebene u, folglich ist der von $\overset{\circ}{\bar{\bar{u}}}_3$ mit ${}_2X_3$ gebildete Winkel das Mass der zweiten Neigung der Ebene $\bar{\bar{u}}$.

ad b) $O Q_2$ im Raume ist der Fluchtstral für alle Zweier-Spursenkrechten der Ebene u, also ist das schiefe Bild einer jeden solchen Senkrechten parallel zu $O_4 Q_2$ (886). Die wahre Länge der Fluchtstrecke $O Q_2$ ist $= O_3 Q_2$, daher ist $\frac{O_3 Q_2}{O_4 Q_2}$ der Modulus aller Zweier-Spursenkrechten (890).

ad c) Zieht man durch das Hilfsauge O in der Bildebene III eine Senkrechte $O_3 B_2$ auf $\overset{\circ}{\bar{\bar{u}}}_3$, so ist diese der Fluchtstral für alle Normalen der Ebene u, mithin müssen deren schiefe Bilder zu $O_4 B_2$ parallel sein. Der Modulus aller Normalen ist $= \frac{O_3 B_2}{O_4 B_2}$.

894. Den Fluchtpunkt Q_2 aller Spursenkrechten einer Ebene u bezeichnet man als Nebenaugpunkt der Ebene $\bar{\bar{u}}$. Die Verbindung des Nebenpunktes O_4 mit dem Nebenaugpunkt Q_2 gibt sonach die Richtung der schiefen Projection der Spursenkrechten an.

895. Aufgabe. Man projiciere eine Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$ congruent auf die Bildebene II, und bestimme die Congruenz-Projection oder Umlegung des Hilfsauges.

Trägt man in Fig. 114 den Spurabstand $Q_2 O_3$ nach $Q_2 O''$ auf, so ist O'' die Umlegung des Hilfsauges O. Ist $O_4 C_2$ die schiefe Projection eines in der Ebene $\bar{\bar{u}}$ liegenden Fluchtstrales, so ist $O'' C_2$ seine Umlegung; also ist $\measuredangle\, O'' C_2 Q_2$ die wahre Grösse des Winkels, welchen der Fluchtstral $O C_2$ mit $\bar{\bar{u}}_2$ einschliesst. Ferner ist $O'' C_2$ die wahre Grösse der Fluchtstrecke $O C_2$ mithin ist $\frac{O'' C_2}{O_4 C_2}$ der Modulus aller zu $O C_2$ parallelen Geraden. Man kann demnach mittels der Umlegung O'' des Hilfsauges in der Ebene $\bar{\bar{u}}$ oder in jeder zu ihr parallelen Ebene u gerade Linien von bestimmter Richtung ziehen und ihre schiefen Projectionen ermitteln.

896. **Gibt es bei einer schiefen Projection auch Ebenen von einer solchen Stellung, auf dass die schiefen Projectionen der in ihnen liegenden Gebilde den Gebilden congruent sind?**

Es gibt zwei Stellungen von dieser Art:

a) Die eine Stellung ist parallel zu der Bildebene der schiefen Projection; denn wenn man ein beliebiges zur Bildebene paralleles Gebilde durch parallele Stralen auf die Bildebene projiciert, so ist die Projection zum Originalgebilde congruent.

b) Die nicht parallele oder schiefe Congruenz-Stellung findet man nach Fig. 115 auf folgende Art:

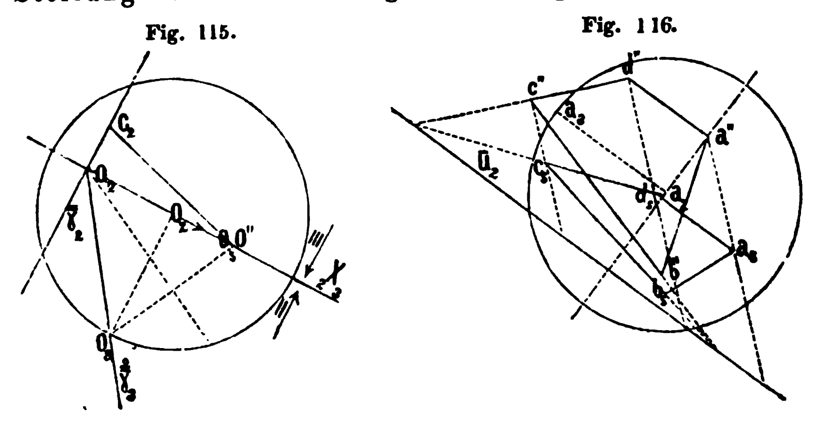


Fig. 115. Fig. 116.

Man lege durch Aug- und Nebenpunkt eine Bildebene III und suche O_3, (welcher Punkt im Distanzkreise liegen muss); verbindet man O_3 mit O_1, so ist $\sphericalangle O_2 O_1' O_3$ der Neigungswinkel der schief projicierenden Richtung gegen die Bildebene II. Errichtet man in der Mitte von $O_1 O_3$ eine Senkrechte auf $O_1 O_3$ bis ${}_2X_3$ in Q_2 getroffen wird und legt durch Q_2 eine Fluchtebene $\bar{\bar{\gamma}}$ senkrecht zur Bildebene III, so ist $\bar{\bar{\gamma}}$ die gesuchte nicht parallele Congruenz-Stellung, weil die congruent-projicierende Richtung mit der Richtung der schiefen Projection identisch ist. Also ist beispielsweise $O_1 C_2 = O C_2$ im Raume.

897. Wenn man demnach eine beliebige Ebene γ parallel zur Fluchtebene $\bar{\bar{\gamma}}$ legt, so ist die schiefe Projection einer jeden in der Ebene γ liegenden Figur mit dieser Figur congruent, folglich können alle Dimensionen derselben unmittelbar aus dem schiefen Bilde abgenommen werden.

898. **Wie viele Congruenz-Richtungen gibt es in einer jeden Ebene u?**

Im Allgemeinen zwei. Es muss nämlich das schiefe Bild einer jeden in einer Ebene u liegenden Strecke, welche entweder zur zweiten Spur von u oder zu der schiefen Congruenz-Stellung $\overline{\overline{\gamma}}$ parallel ist, dieser Strecke an Länge gleich sein. Nur wenn $\bar{u}_2$ mit $\overline{\overline{\gamma}}_2$ parallel läuft, werden beide Congruenzrichtungen der Ebene u zur $\bar{u}_2$ parallel.

899. **Wie construiert man die schiefe Congruenzrichtung einer Ebene u?**

Man sucht das schiefe Bild des Schnittes der Fluchtebene $\overline{\overline{u}}$ mit der Congruenz-Stellung $\overline{\overline{\gamma}}$, indem man O_t mit dem Schnitte von $\overline{\overline{\gamma}}$ mit $\overline{\overline{u}}_2$ verbindet. Einfacher erreicht man das Ziel, wenn man wie in Fig. 114 auf die Mitte von O_t und der Umlegung O'' eine Senkrechte errichtet. Der Schnittpunkt D_2 mit O_t verbunden, gibt die schiefe Congruenzrichtung der Ebene $\overline{\overline{u}}$, also auch einer jeden zu $\overline{\overline{u}}$ parallelen Ebene u. Die Richtigkeit ergibt sich daraus, weil $O''D_2$ die wahre Länge der Fluchtstrecke OD_2, und der Construction zufolge $O_tD_2 = O''D_2$ ist.

900. **Wozu kann man die beiden Congruenzrichtungen einer Ebene u benützen?**

Zur Darstellung der wahren Gestalt einer in schiefer Projection gegebenen ebenen Figur. Man wird sich im schiefen Bilde zwei gerade Linien als Coordinatenaxen für das schiefe Bild der Figur wählen; die eine Gerade ist parallel zu $\bar{u}_2$, die andere Gerade zur schiefen Congruenzrichtung O_tD_2, Fig. 114. Seitwärts zieht man zwei neue Coordinatenaxen; eine ist ebenfalls parallel zu $\bar{u}_2$, die andere aber parallel zur Umlegung $O''D_2$. Gibt man nun im schiefen Bilde von irgend einem Punkte die mit den Axen parallelen Coordinaten an, so darf man ihre Längen auf die neuen Axen nur unverändert übertragen; durch das Ziehen der neuen Coordinaten findet man den übertragenen Punkt u. s. w.

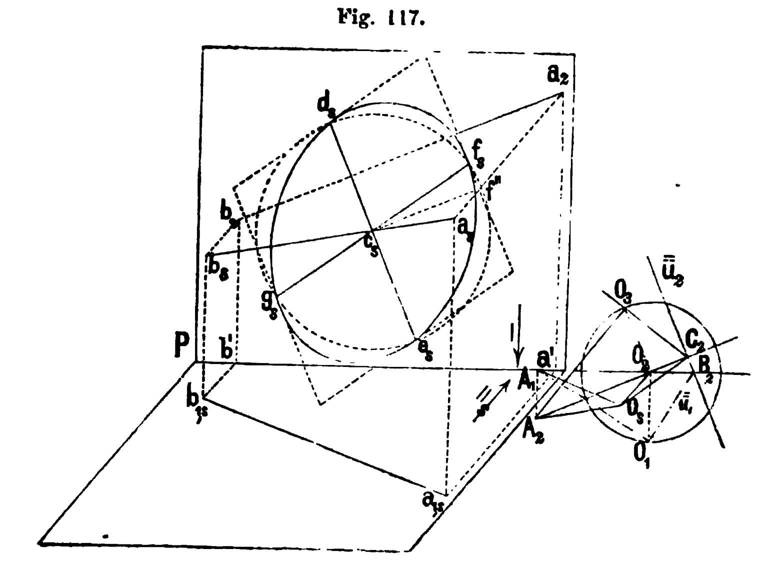
901. **In welchem Zusammenhange muss die schiefe Projection einer ebenen Figur u zu ihrer Congruenz-Projection u'' stehen?**

Beide Gebilde liegen perspectivisch affin. Nehmen wir an, in Fig. 116 sei $a_tb_tc_td_t$ das schiefe Bild irgend eines ebenen Gebildes u, dessen Spur in $\bar{u}_2$ gegeben ist. Vom Punkte a sei a_2 und seine zweite Ordinate (a_2), mit welcher der Distanzkreis beschrieben wurde, gegeben. Betrachten wir a als Hilfsauge, so

können wir sein drittes Bild a_3 und seine Umlegung a'' nach (895) construieren. Nun versinnlichen wir uns den congruent projicierenden Stral aa'' im Raume, so sehen wir ein, dass $a_s a''$ seine schiefe Projection ist; also müssen wir schliessen: je zwei verwandte Punkte der in Rede stehenden Bilder liegen in einem zu $a_s a''$ parallelen Strale.

Denken wir uns in der Ebene u eine beliebige Gerade cd, welche $\bar{u}_2$ schneidet; versinnlichen wir uns diese Gerade und projicieren sie sowol congruent, als auch schief auf die Bildebene,

Fig. 117.



so müssen sich beide Projectionen in $\bar{u}_2$ schneiden; also ist $\bar{u}_2$ die Begegnungsgerade für die perspectivisch affine Lage der congruenten und der schiefen Projection. Man kann also nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität die congruente Projection aus dem schiefen Bilde ableiten, und umgekehrt das schiefe Bild einer ebenen Figur construieren, wenn diese in einer Ebene u eine bestimmte Lage einnehmen soll.

Das Beispiel in Fig. 116 zeigt zugleich, dass man jeden beliebigen geeigneten Punkt a zum Hilfsauge wählen kann.

902. Soll ein Kreis in schiefer Projection dargestellt werden, so wird man (399) zur Anwendung bringen.

903. Um wenigstens an einem Beispiele die Constructionen in schiefer Projection zu zeigen, nehmen wir an, es seien $(a_1) = 37$,

$(a_2) = 35$, $(a_3) = 48$; $(b_1) = 19$, $(b_2) = 10$, $(b_3) = 5^{mm}$ die Ordinaten bezüglich dreier auf einander senkrechter Bildebenen I, II, III, von welchen, wie immer vorausgesetzt sein soll, die Bildebene II für die schiefe Projection bestimmt wird. In der Entfernung $ac = 18^{mm}$, liegt auf der Geraden ab der Mittelpunkt c eines Kreises vom Radius $r = 15^{mm}$, dessen Ebene u auf ab senkrecht steht. Es ist $O_2\,O_s$ und der Distanzkreis gegeben, man soll die Gerade ab sammt dem Kreise in schiefer Projection darstellen.

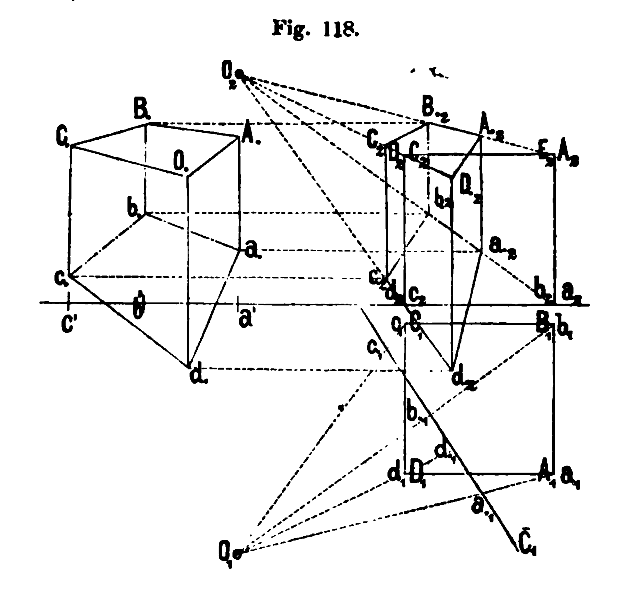
Auflösung. Man setze in Fig. 117 $Pa' = (a_3)$, $Pb' = (b_3)$ und ziehe durch a' und b' sowol senkrechte als schiefe Ordinalen. In der senkrechten Ordinale wird $a'a_2 = (a_1)$, $b'b_2 = (b_1)$ und in der schiefen Ordinale $a'a_{1,s} = \mu \cdot (a_2)$, $b'b_{1,s} = \mu \cdot (b_2)$, (869), aufgetragen, so ergeben sich die zweiten Bilder $a_2 b_2$, sowie die schiefen Bilder $a_{1,s} b_{1,s}$ der orthogonalen ersten Projectionen $a_1 b_1$. Durch Ergänzung zu Parallelogrammen findet man $a_s b_s$ als das nach schiefer Projection erzeugte Bild der Raumgeraden ab. Durch den Nebenpunkt O_s zieht man zum ersten Bild $a_{1,s} b_{1,s}$ und durch den Augpunkt O_2 zum orthogonalen zweiten Bilde $a_2 b_2$ eine Parallele, so ergibt sich in A_2 der Fluchtpunkt der Geraden ab, und $O_s A_2$ muss zu $a_s b_s$ parallel sein. Ist $O_2\,O_3$ senkrecht zu $O_2 A_2$, so wird $O_3 A_2$ die wahre Länge der Fluchtstrecke OA_2 angeben (889), und $O_3 A_2 : O_s A_2$ den Modulus derselben bestimmen (868). Verändert man die gegebene Länge ac im Verhältnisse von $O_3 A_2$ zu $O_s A_2$ und trägt die verminderte Länge von a_s nach $a_s c_s$ auf, so ist das schiefe Bild des Kreismittelpunktes gefunden.

Die Kreisebene u soll senkrecht auf ab stehen, also muss $\bar{u}_2$ senkrecht auf $a_2 b_2$ sein (705). Man kann desshalb durch c_s eine Senkrechte zu $a_2 b_2$ ziehen, den gegebenen Radius r beiderseits auftragen; $d_s e_s$ ist dann das schiefe Bild des zur Bildebene II parallelen Kreisdurchmessers de (898). Um den conjugierten Durchmesser fg zu finden, legt man durch das Hilfsauge zu u eine Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$; ihre erste Spur $\bar{\bar{u}}_1$ ist senkrecht zu $O_1 A_1$ orthogonales erstes Bild der Fluchtstrecke OA) und $\bar{\bar{u}}_2$ geht durch B_2 senkrecht auf $O_2 A_2$ (705), also ist C_2 (Schnitt von $\bar{\bar{u}}_2$ mit $O_2 A_2$) der Fluchtpunkt aller zweiten Spursenkrechten der Ebene u, und $O_3\,C_2 : O_s C_2$ deren Modulus. Da der zu de conjugierte Kreisdurchmesser fg auf de senkrecht steht, so wird man durch c_s zu $O_s C_2$ eine Parallele ziehen (886), den Radius im Verhältnis von $O_3 C_2 : O_s C_2$ verändern und die veränderte Länge beider-

seits von c_1 auftragen, wodurch man $f_1 g_1$ als den zu $d_1 e_1$ conjugierten Durchmesser der Ellipse findet.

Beschreibt man über $d_1 e_1$ als Durchmesser einen Kreis, so kann man diesen als eine Congruenz-Projection des in der Ebene u liegenden Kreises auf die durch c zur Bildebene II parallel gelegte Ebene ansehen. Errichtet man $c_1 f'$ senkrecht auf $d_1 e_1$, so ist f' der mit f_1 verwandte Punkt, und nun kann nach den Ge-

Fig. 118.



setzen der perspectivischen Affinität zu jedem Punkte der Kreisumlegung das schiefe Bild construiert werden, wodurch man die Ellipse erhält.

Die Anwendung des Hilfsauges hält möglichst viele Hilfslinien von der eigentlichen Zeichnung fern und gestattet eine schnelle Ausmittelung von Fluchtstrecken und deren Moduli.

Bei der Ausführung von Studien-Zeichnungen über schiefe Projectionen wolle man ebenfalls an dem Grundsatze festhalten: Jede Zeichnung, welche aus einem anderen Projectionscentrum abgeleitet wurde, ist mit einer anderen Farbe auszuziehen. Es müssen daher die Congruenz-Projectionen ebenfalls ihre eigenen Farben erhalten.

D. Die centralen Projectionen.

Die Durchschnittsmethode. Beziehungen der Lage des Auges und Gegenstandes gegen die Bildebene.

§. 45.

904. Die nächstliegende Methode, die centrale Projection eines Objectes zu bestimmen, besteht darin, zwei zugeordnete (also orthogonale) Projectionen desselben anzugeben, eine Ebene C senkrecht zur Bildebene I aufzustellen, ein Projections-Centrum O im Endlichen anzunehmen, alle Punkte des Objectes aus O auf die Ebene C zu projicieren und die wahre Gestalt dieser Projection zu ermitteln.

905. Die Buchstaben, welche centrale Projectionen bezeichnen, sollen rechts unten einen Punkt als Zeiger erhalten.

906. In Fig. 118 wurde eine Bildebene C so gestellt, dass sie den in zwei zugeordneten Projectionen gezeichneten Würfel schneidet. Denkt man sich durch das Centrum O zur Bildebene I senkrechte Ebenen gelegt, welche durch einzelne Punkte des Objectes gehen, so müssen in den verticalen Schnitten mit der Bildebene C die centralen Projectionen der Punkte liegen. So ist beispielsweise $a._1$ (lese a Punkt Eins) das erste Bild des Schnittes vom Strale Oa mit der Bildebene C, während in der durch $a._1$ senkrecht zur Bildebene I gezogenen Geraden das Centralbild von a, nämlich $a.$ liegt, dessen Abstand von der Bildebene I durch das zugeordnete Bild a_2 nach den Ordinatengesetzen bestimmt wird. Genau so wie $a._2$ findet man auch $b._2$, $c._2$, $d._2$, $A._2$, ... Das Bild, welches sich aus der Verbindung der letztgenannten Punkte ergibt, ist die orthogonale Projection des centralen Würfelbildes auf der Bildebene II.

907. Um die wahre Gestalt der Central-Projection zu erhalten, trägt man die Abstände $a._1c._1$, $a._1b._1$, $a._1d._1$ nach $a'c'$, $a'b'$, $a'd'$ auf, zieht Ordinalen zu ${}_1X_2$ und projiciert durch einen zu ${}_1X_2$ parallelen Stralenbüschel die Punkte $a._2$, $b._2$, $c._2$ . . . . nach $a.$, $b.$, $c.$, . . ., wodurch sich die wahre Gestalt der auf der Ebene C entstandenen Central-Projection ergibt.

908. Der Punkt a' wird beliebig in ${}_1X_2$ gewählt. Die Lage von $a._2$, $b._2$, $c._2$, . . . gegen $a.$, $b.$, $c.$, . . . ist eine perspectivisch affine.

909. Die eben angewendete sogenannte Durchschnittsmethode setzt zwei zugeordnete Abbildungen des central zu projicierenden Objectes voraus, und ist dessbalb in ihrer Anwendung beschränkt. Die Methode der freien Perspective bedarf der zugeordneten orthogonalen Abbildungen nicht.

910. Was ist ein perspectivisches Bild und welcher Unterschied besteht zwischen einer centralen Projection und einem perspectivischen Bilde?

Wenn eine centrale Abbildung so construiert wurde, dass sie aus dem Projections-Centrum auch durch ein Auge projiciert werden kann, dessen optischen Mittelpunkt man (wenigstens annäherungsweise) an die Stelle des Projections-Centrums versetzt, dann bezeichnet man die centrale Projection als ein perspectivisches Bild. Um den Unterschied zwischen einem centralen und einem perspectivischen Bilde einzusehen, darf man nur bedenken, dass ein Auge nur solche Punkte auf die Bildebene projicieren kann, die entweder hinter der durchsichtig gedachten Bildebene liegen, oder welche sich zwischen der Bildebene und der zur Bildebene parallelen durch das Auge (darunter wird stets dessen optischer Mittelpunkt verstanden) gelegten Ebene befinden; hingegen können alle Raumpunkte central auf die Bildebene projiciert werden.

Ausserdem muss ein perspectivisches Bild noch Bedingungen erfüllen, die aus den folgenden Betrachtungen sich ergeben.

911. Was versteht man unter der Augdistanz d?

Die Entfernung des Projections-Centrums O von seiner orthogonalen Projection auf der Bildebene.

912. Wie gross ist die Augdistanz zu wählen?

Bei einer Central-Projection überhaupt, ist d beliebig.

913. Bei der Construction einer Perspective wählt man d gleich jener Entfernung, welche der Besichtiger des fertigen perspectivischen Bildes vor der Bildebene mit einem Auge einhalten wird, um, ohne den Kopf zu wenden, durch dieses Auge ohne Anstrengung im Sehen, einen Gesammteindruck des Bildes empfangen zu können.

914. Man muss also den Zweck kennen, für welchen eine Perspective anzufertigen ist, um die Augdistanz bemessen zu können. Soll z. B. das fertige perspectivische Bild eines Gegenstandes in das Bilderwerk eines Buches aufgenommen werden, so wird man d ungefähr 8 bis 12 Zoll annehmen. Soll das fertige

perspectivische Bild eine grössere Ausdehnung als eine gewöhnliche Quartseite eines Buches erhalten und auf einer Tafel demselben beigegeben werden, so wird man das Bild wegen seiner Grösse entfernter vom Auge halten, um einen übersichtlichen Blick auf dasselbe werfen zu können; *d* kann daher von 12 bis auf 20 und 24 Zolle steigen.

Soll ein fertiges perspectivisches Bild in der Längenausdehnung etwa 10 Fuss erhalten und an einer verticalen Wand seinen Aufstellungsort erhalten und man will *d* wissen, dann wird man sich ungefähr die Grösse des Bildes auf einer Wand in der entsprechenden Stellung markiren oder markirt vorstellen, und durch eine Aufstellung des Auges vor dem angedeuteten Bilde die Entfernung ermitteln, aus welcher man wol mit einem Blicke das ganze Bild wird übersehen können. Diese Entfernung wählt man als Distanz *d*.

Selbstverständlich ist *d* keine Grösse, welche sich aus dem perspectivisch abzubildenden Objecte berechnen lässt, sondern nur dem Zwecke des Bildes entsprechend innerhalb gewisser Grenzen angenommen werden kann. Im letzteren Beispiele wird die Distanz mindestens bei neun Fuss betragen. Denn stellt man sich, wie es gewöhnlich geschieht, der Mitte der Breite des Bildes dem letzteren gegenüber auf und sieht auf den Raum, den das Bild einnehmen soll, so bemerkt man, dass eine Entfernung von sieben Fuss nicht bequem einen Uebersicht des Bildes auf einen Blick zulässt, wesshalb man *d* grösser annehmen wird.

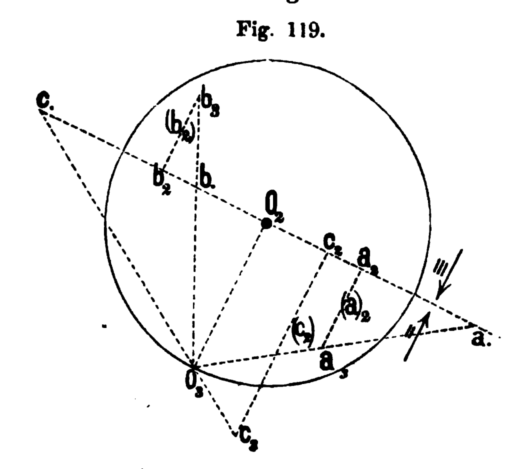
915. Von wo aus soll ein fertiges perspectivisches Bild, sobald es an seinen Ort gebracht ist, den es bei der Besichtigung einnehmen soll, betrachtet werden?

Aus jenem Punkte *O*, welchen der Zeichner bei der Construction des perspectivischen Bildes voraussetzte. Sieht man von diesem Punkte das Bild mit einem Auge an, während man das andere schliesst, und beseitigt etwa durch die vor das Auge hohl gehaltene Hand andere das Sehen störende Lichteindrücke, so scheint es dem Auge, als ob es den abgebildeten Gegenstand projicierte, d. h. als ob es diesen Gegenstand selbst vor sich sähe. Die Täuschung wird um so vollkommener werden, je richtiger die Perspective construiert wurde und je besser es gelungen ist, mit Farben die Beleuchtung und Farbe des abgebildeten Objectes nachzuahmen.

916. Die Wissenschaft, welche richtige perspectivische Bilder ohne Rücksicht auf Farbe und Beleuchtung der Objecte, also nur in Punkten und Linien darstellen lehrt, wird **Linear-Perspective** — die Kunst, in Linien dargestellte Perspectiven mit Farben richtig zu behandeln, **malerische Perspective** genannt.

917. Aber auch schon die Ausführung einer reinen, d. i. einer nicht zu colorierenden Linear-Perspective, bedarf einigen Geschickes und der Erfahrungen über deutliches Sehen bei grösseren Distanzen. Im Allgemeinen werden die Linien eines perspectivischen Bildes um so stärker gezogen, je grösser die **Augdistanz**; und an demselben Bilde werden die Linien des Hintergrundes etwas schwächer als die des Vordergrundes.

Fig. 119.



918. Bei fertigen perspectivischen Bildern findet man nur selten den Augpunkt und noch seltener die Augdistanz angegeben. Der Augpunkt liegt in den meisten Fällen nahe oder ganz in der halben Breite des Bildes, in einer Höhe, die eben nur jener beurteilen kann, der etwas von der Perspective versteht. Die Distanz ergibt sich beiläufig nach dem oben über die Wahl der Augdistanz Gesagten (914).

Der Lernende wolle es nicht unterlassen bei ihm vorkommenden perspectivischen Bildern den Augpunkt und den Ort des Auges beiläufig aufzusuchen und das Bild durch die hohle Hand mit einem Auge anzusehen.

919. Was die Stellung des zu projicierenden Objectes gegen die Bildebene bei Anfertigung perspectivischer Bilder anbelangt, so pflegt man sie so zu wählen, auf dass vom Centrum O aus mit einem Auge, ohne den Kopf zu wenden, alle jene Teile des Gebildes gesehen werden können, welche zur centralen oder perspectivischen Abbildung gelangen sollen. Der Zweck der Abbildung wird daher auch wie für die Distanz, so für die Stellung des Gebildes gegen die Bildebene massgebend sein.

920. Den Gegenstand stellt man gewöhnlich auch noch so, dass von ihm ein Teil hinter, ein Teil vor die Bildebene zu liegen kommt; dabei ist es rathsam, keinen Punkt des Gegenstandes mehr als um ein Vierteil der Augdistanz vor die Bildebene treten zu lassen.

Bestimmung centraler Bilder von Punkten aus senkrechten Ordinaten.

§. 46.

921. In den gewöhnlich vorkommenden Fällen der Construction perspectivischer Bilder setzt man die Bildebene C vertical voraus. Diese Voraussetzung soll hier ebenfalls vorhanden sein und soll die Bildebene für die centrale Projection ausser mit C auch noch mit II bezeichnet werden. Die orthogonalen Projectionen auf derselben werden demnach den Zeiger 2 wie bisher erhalten.

922. Die Lage des Auges zur Bildebene C bestimmt man in derselben Weise wie das Hilfsauge der schiefen Projection (881); auch gelten die Begriffe, Augpunkt, Distanzkreis, Fluchtpunkt, Fluchtstrecke, Fluchtebene und Fluchtspur für das Auge der centralen Projection ganz in gleicher Weise wie für das Hilfsauge der schiefen Projection.

923. Ausserdem nennt man noch bei der Perspective, die durch das Auge O gelegte horizontale Ebene Horizontsebene und deren Schnitt mit der Bildebene C Horizont.

Selbstverständlich liegt der Augpunkt O_2 jederzeit im Horizonte.

924. Wie construiert man das centrale Bild $a.$ eines Punktes a, wenn sein zweites Bild a_2 und die Ordinate (a_2) gegeben ist?

Man legt durch die Ordinate (a_2) und das Auge O eine Bildebene III, Fig. 119, sucht die dritten Bilder O_3 und a_3, so gibt der Schnitt von $O_3 a_3$ mit $O_2 a_2$ das centrale Bild $a.$.

In derselben Bildebene III wurde noch ein Punkt b durch b_2 und eine negative Ordinate (b_2) gegeben, folglich ist im dritten Bilde (b_2) entgegengesetzt dem Sehpfeile II aufzutragen. Im Schnitt von $O_3 b_3$ mit $O_2 b_2$ liegt die centrale Projection $b.$ des Punktes b.

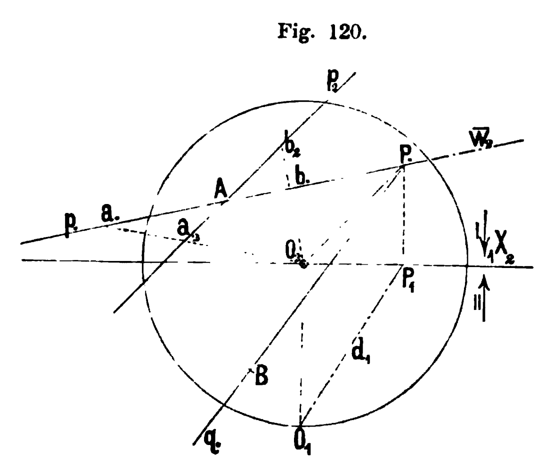
Die Längen $a_2 a.$, $b_2 b.$ geben die Abstände der Raumpunkte ab von ihren centralen Bildern $a.b.$, nämlich die centralen Ordinaten $(a.)$, $(b.)$ an, von welchen letztere negativ ist.

925. Projiciert man einen Punkt a orthogonal und central auf die Bildebene C, so entstehen zwei central zugeordnete Ordinaten (a_2), $(a.)$ und zwei central zugeordnete Projectionen a_2 und $a.$. Der Schnitt der durch zwei central zugeordnete Ordinaten gehenden Ebene mit der Bildebene C gibt eine Central-Ordinale, welche offenbar durch den Augpunkt O_2 gehen muss. Also kann man sagen:

Je zwei central zugeordnete Projectionen eines Punktes liegen in einer Central-Ordinale.

926. Sind zwei central zugeordnete Bilder $a.a_2$ eines Punktes a gegeben, so zeigt die Construction der Fig. 119 ebenfalls, wie man die Ordinaten $(a.)$ und (a_2) ermitteln kann.

Fig. 120.



927. Wo muss ein Punkt a liegen, damit seine Central-Projection $a.$ in's Unendliche kommt, d. h. aus der Reihe der wirklichen Punkte verschwindet?

Fig. 119 lehrt: Ist die senkrechte Ordinate (a_2) eines Punktes a positiv und gleich der Augdistanz d, so fällt das centrale Bild $a.$ ins Unendliche. Hieraus schliesst man weiter:

928. Alle Punkte der durch das Auge O zur Bildebene C parallel gelegten Ebene V haben ihre centralen Bilder im Unendlichen. Aus dem Grunde, dass die centralen Bilder aller Punkte der Ebene V aus der Reihe der wirklichen Punkte verschwinden, dass also ein jeder Punkt der Ebene V ein Verschwindungspunkt ist (327), bezeichne man die Ebene V als die Verschwindungsebene des Raumgebildes.

929. Welche Lage haben zwei central zugeordnete Projectionen $c_2 c.$ eines Punktes c, wenn (c_2) grösser als die Augdistanz d?

Sie liegen in einer Central-Ordinale (925) auf verschiedenen Seiten des Augpunktes O_2, Fig. 119.

930. Wie viele Räume können wir bei einer Central-Projection demnach unterscheiden?

Drei. Der erste Raum reicht hinter der Bildebene C aus dem Unendlichen bis an die Bildebene C, der zweite Raum liegt zwischen der Bildebene C und der Verschwindungsebene V und der dritte Raum reicht von der Verschwindungsebene V ins Unendliche, demzufolge liegt in Fig. 119 Punkt b im ersten, a im zweiten und c im dritten Raume.

931. Wie erkennt man aus zwei central zugeordneten Projectionen eines Punktes, ob derselbe im ersten oder im zweiten Raume liegt?

In beiden Fällen liegen die zugeordneten Bilder auf einerlei Seite vom Augpunkt. Liegt das centrale Bild näher am Augpunkt, als das orthogonale Bild, so liegt der Punkt im ersten Raume; befindet sich aber der Punkt im zweiten Raume, so ist das Umgekehrte der Fall.

Von den Punkten des dritten Raumes sagt man, sie besitzen imaginäre perspectivische Bilder (910).

Ueber centrale Bilder von Geraden und Ebenen.

§. 47.

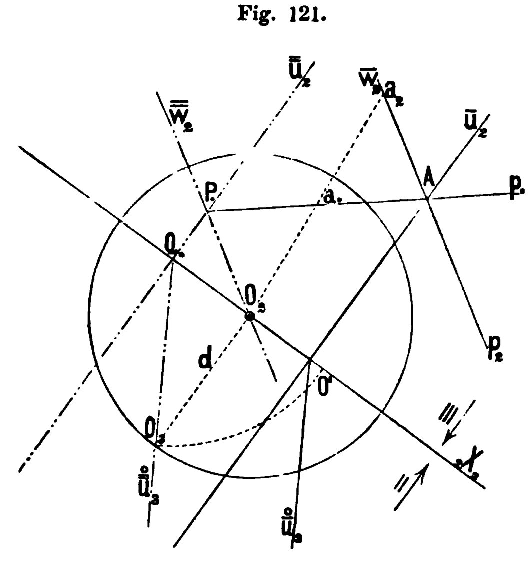
932. Wie construiert man das centrale Bild $p.$ einer Geraden p, wenn man zwei zugeordnete Projectionen von p kennt?

Man zieht durch das Auge einen Fluchtstral und verbindet den Fluchtpunkt $P.$ mit der zweiten Spur A (575) der Geraden p. In Fig. 120 wurde die erste orthogonale Projection p_1 von p weggelassen, dafür aber wurden die beiden zugeordneten Projectionen $O_1 P_1$ und $O_2 P.$ des zu p parallelen Fluchtstrales dargestellt; da $P.$ der Schnitt dieses Strales mit der Bildebene C ist, so ist $P.$ der Fluchtpunkt der Geraden p (922). Nun denke man sich durch die Gerade $OP.$ des Raumes und die zu ihr parallele durch A gehende Gerade p eine Ebene w gelegt, so muss $AP.$ die zweite Spur dieser Ebene sein und man er-

kennt ohne Mühe, dass alle Stralen, welche aus O die Punkte der Geraden p projicieren, in der Ebene w liegen und desshalb die Bildebene C in $\bar{w}_2$ durchschneiden müssen. Nun sind aber die Schnitte der aus O projicierenden Stralen mit der Bildebene C die centralen Projectionen der projicierten Punkte, folglich liegt in der Geraden, welche die zweite Spur A der Geraden p mit dem Fluchtpunkte $P.$ verbindet, das centrale Bild der beliebigen Geraden p.

933. Von welchem Punkte einer Geraden p ist der Fluchtpunkt dieser Geraden ein centrales Bild?

Fig. 121.



Von dem unendlich fernen Punkte der Geraden p; denn der Fluchtstral, weil er zu p parallel ist, projiciert jenen unendlich fernen Punkt.

934. Parallele gerade Linien haben einen gemeinsamen Fluchtpunkt.

935. Was folgt aus dem Umstande, dass parallele gerade Linien einen gemeinsamen Fluchtpunkt besitzen?

Dass sich die centralen Bilder von parallelen geraden Linien in dem gemeinsamen Fluchtpunkte schneiden (932). In Fig. 120 ist B die zweite Spur einer zu p parallelen Geraden q, also ist $BP.$ ihr centrales Bild?

936. Wo haben zur Bildebene C senkrechte gerade Linien ihren Fluchtpunkt?

Im Augpunkt O_2.

937. Wo haben horizontale parallele gerade Linien ihren Fluchtpunkt?

Im Horizont (923).

938. Sind parallele gerade Linien zur Bildebene C parallel, so sind sie auch zu ihren parallelen centralen Bildern parallel.

939. Wenn sich gerade Linien im Raume schneiden, so ist das centrale Bild ihres Schnittpunktes, der Schnittpunkt ihrer centralen Bilder (628).

940. Kann es auch sich schneidende gerade Linien geben, deren centrale Bilder parallel sind?

Wenn der Schnittpunkt mehrerer Raumgeraden in der Verschwindungsebene V liegt (928), dann werden ihre centralen Bilder parallel.

941. Wie findet man die zweiten Projectionen $a_2 b_2$ von zwei Punkten der Geraden p, wenn die centralen Projectionen $a_.,b_.$ bekannt sind?

Durch das Ziehen von Central-Ordinalen $O_2 a_.$, $O_2 b_.$ (Fig. 120). Es ist also nach (926) die Lage der Punkte a und b im Raume vollständig bestimmt.

942. Wie pflegt man am gewöhnlichsten eine Ebene durch centrale Projection zu bestimmen?

Durch ihre Spur in der Bildebene C und durch die Spur der zu ihr parallelen Fluchtebene (922). In Fig. 121 sei $\bar{\bar{u}}_2$ die Spur der Fluchtebene zu u in der Bildebene C und $\bar{u}_2$ die Spur der Ebene u in derselben Bildebene; also geht die Ebene u durch $\bar{u}_2$ parallel zur Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$.

943. Um die Neigung beider Ebenen gegen die Bildebene C zu erkennen, legt man durch den Augpunkt $\overset{\circ}{O}_2$ eine Bildebene III $\perp$ $\bar{\bar{u}}_2$, dann ist der von der dritten Spur $\overset{\circ}{\bar{\bar{u}}}_3$ der Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$ mit ${}_2X_3$ gebildete Winkel, das Mass ihrer zweiten Neigung. Die $\overset{\circ}{\bar{\bar{u}}}_3$ läuft mit der Nullseite $\overset{\circ}{\bar{u}}_3$ parallel.

944. Die Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ ist zu $\bar{u}_2$ selbstverständlich parallel.

945. Welche Bedeutung hat der zwischen $\bar{u}_2$ und der Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ liegende Teil der Bildebene C?

Er enthält die centralen Bilder aller Punkte der Ebene u, die sich im ersten Raume (930) befinden.

946. Die Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ ist das centrale Bild der in der Ebene u liegenden unendlich fernen Durchschnittsgeraden der Ebene u mit ihrer Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$.

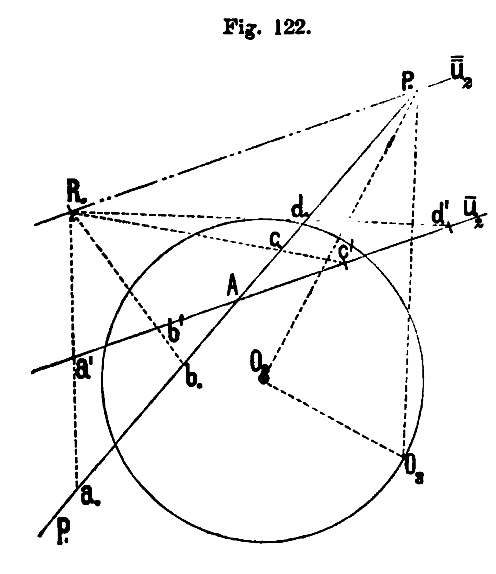
Es haben daher parallele Ebenen eine gemeinsame Fluchtspur.

947. Der Horizont ist die Fluchtspur aller horizontalen Ebenen.

948. Alle Punkte der Ebene u die im zweiten Raume liegen, haben ihre centralen Projectionen in jenem Teile der Bildebene, welcher sich an den eben erwähnten Parallelstreifen (945) in $\bar{u}_2$ anschliesst.

949. Die im dritten Raume (930) liegenden Punkte der Ebene u projicieren sich auf jenen Teil der Bildebene, welcher in $\mathring{\bar{\bar{u}}}_2$ an den Parallelstreifen $\bar{u}_2 \bar{\bar{u}}_2$ grenzt. Die Richtigkeit der letzten vier Sätze sieht man augenblicklich ein, sobald man sich die Lage der Ebene u und das Centrum O versinnlicht und je einen Punkt der Ebene u der in einem anderen Raume liegt, aus O auf C projiciert.

Fig. 122.



950. Wenn eine Gerade p in einer Ebene u liegt, oder zu einer Ebene u parallel ist, wo muss ihr Fluchtpunkt liegen?

In der Fluchtspur der Ebene u. In Fig. 121 ist das centrale Bild $p.$ einer Geraden p der Ebene u dargestellt. Der Schnitt A einer Geraden p einer Ebene u mit der Central-Bildebene, muss stets in der zweiten Spur jener Ebene u liegen (921).

951. Wo liegt die zweite Projection p_2?

Sie geht durch A zu $O_2 P.$ parallel (888).

952. Wie kann man die orthogonale Projection eines Punktes a einer Ebene u bestimmen, wenn man das centrale Bild $a.$ kennt?

Man zieht Fig. 121 durch $a.$ das centrale Bild $p.$ irgend einer in der Ebene u liegenden Geraden p (950), sucht ihr zweites Bild p_2

(950) und zieht die Central-Ordinale durch $a.$; diese schneidet p_2 in a_2. Es ist also die Lage des Punktes a im Raume vollständig bestimmt.

953. **Es ist das zweite Bild a_2 eines Punktes a der Ebene u gegeben, wo liegt das centrale Bild $a.$?**

Man zieht durch a_2, Fig. 121, eine Gerade p_2 beliebig als zweites Bild einer in u liegenden Geraden p; durch O_2 eine Parallele zu p_2 gezogen, gibt in $\bar{\bar{u}}_2$ den Fluchtpunkt $P.$ für $p.$. Verbindet man jetzt die Spur A mit dem Fluchtpunkte $P.$, so liegt in ihr und in der Central-Ordinale $a_2\,O_2$ das centrale Bild $a.$.

954. **Wie construiert man das centrale Bild der Schnittgeraden zweier Ebenen u und w?**

Man verbindet den Schnitt A von $\bar{u}_2$ und $\bar{w}_2$ mit dem Schnitte $P.$ von $\bar{\bar{u}}_2$ und $\bar{\bar{w}}_2$; denn der Fluchtpunkt der Schnittgeraden beider Ebenen muss in der Fluchtspur jeder der beiden Ebenen liegen.

955. **Geht eine Fluchtspur $\bar{\bar{w}}_2$ durch den Augpunkt O_2, so ist die Ebene w zur Bildebene C senkrecht,** also muss die orthogonale Projection p_2 der Schnittgeraden p **in der zweiten Spur der Ebene w liegen.** Man vergleiche hiemit die Auflösung in (952).

Die Teilungspunkte.

§. 48.

956. **Wie kann man eine durch ihren Fluchtpunkt $P.$ und ihre Spur A bestimmte Gerade p durch parallele Stralen auf die Bildebene C projicieren?**

Da alle parallel projicierenden Stralen in einer Ebene u liegen, so muss die Parallel-Projection von p in $\bar{u}_2$ liegen. Zieht man desshalb Fig. 122 durch die Spur A der Geraden p eine beliebige Gerade $\bar{u}_2$, so kann diese als die zweite Spur der projicierenden Ebene u angesehen werden. Die Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ geht durch den Fluchtpunkt $P.$ parallel zu $\bar{u}_2$. Die parallel projicierenden Stralen liegen in der Ebene u, also muss ihr Fluchtpunkt $R.$ in der Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ liegen (950). Da in der Ebene u die Richtung der parallelen Stralen beliebig angenommen werden kann, so folgt, dass wir ihren Fluchtpunkt $R.$ in $\bar{\bar{u}}_2$ beliebig wählen können. Ist nun $R.$ in $\bar{\bar{u}}_2$ angenommen, und ist $a.$ das centrale Bild irgend eines Punktes a der Geraden p, so muss $a.R.$ das

centrale Bild desjenigen Strales sein, welcher mit der angenommenen Richtung parallel, den Punkt a auf die Bildebene C projiciert und der Schnitt a' von $a.R.$ mit $\bar{u}_2$ ist nun die Parallel-Projection von a, folglich ist die Strecke von der Spur A bis a' die Parallel-Projection der Strecke von A bis zum Punkte a im Raume. In ganz gleicher Weise ist auch $A\,b'$ die Parallel-Projection von Ab im Raume, also ist auch $a'\,b'$ eine solche Projection von $a\,b$, ebenso $b'c'$ von bc u. s. w.

957. **Wie kann man sich die Lage der Geraden p, Fig. 122, und die Richtung R der parallel projicierenden Stralen versinnlichen?**

Man versinnliche sich das Centrum O in der durch O_2 zur Bildebene C senkrechten Geraden $O_2\,O = d$ und ziehe im Raume die Geraden $OP.$ und $OR.$, so ist $OP.$ zu p parallel (922, 882) und $OR.$ gibt die Richtung der parallel projicierenden Stralen an. Versinnlicht man sich noch die durch A zu $OP.$ parallele Gerade p und projiciert einige ihrer Punkte parallel mit $OR.$, so sieht man ein, dass die Projectionen in $a'\,b'c'$ entstehen müssen. Versinnlicht man sich noch die Entstehungsweise des centralen Bildes von einem dieser parallel projicierenden Stralen, so gelangt man zum vollständigen Verständnis der Fig. 122.

958. **Wie gross ist der Modulus der Parallel-Projection $a'b'c' \ldots$?**

Der Modulus ist das Verhältnis, in welchem die Parallel-Projection $a'b'$ irgend einer Strecke ab einer Geraden p zur Länge dieser Strecke, also zu ab steht (890). Bei Parallel-Projectionen ist dieses Verhältnis für alle Strecken dasselbe und desshalb wird es ein Modulus genannt. Um den Modulus zu erforschen, muss man entweder ein Dreieck im Raume kennen, wie z. B. aAa', oder ein Dreieck, von dem man weiss, dass es diesem Dreiecke aAa' ähnlich ist. Nun ist $OP.$ im Raume zur Seite aA parallel; ebenso ist $OR.$ zu aa' (man versinnliche sich alles), und Aa' zu $P.R.$ parallel; also ist das Dreieck $OP.R.$ dem $\triangle\, aAa'$ ähnlich und demnach verhält sich Aa' zu der Raumstrecke Aa genau so wie $P.R.$ zu $P.O$. Da aber $P.O = P.O_2$ ist, so gibt uns $P.R. : P.O_3$ den Modulus der schiefen Projection an, welche von der Geraden p auf $\bar{u}_2$ entsteht.

959. **Wozu kann man die Parallel-Projection einer geraden Punktreihe bei den Constructionen centraler [Pro]jectionen benützen?**

Um auf die Längenverhältnisse von Strecken im Raume schliessen zu können, die in derselben geraden Linie liegen und deren centrale Bilder man kennt. Fände sich z. B. $b'c' = 3 \cdot a'b'$, so kann man mit Sicherheit schliessen, dass auch bc im Raume dreimal so gross wie ab ist.

960. Die durch eine Gerade p, Fig. 122, beliebig gelegte Ebene u, auf deren $\bar{u}_2$ man die Gerade p durch parallele Stralen projiciert, nennt man eine Teilungsebene und den Fluchtpunkt $R.$ der parallel projicierenden Stralen einen Teilungspunkt.

Der Abstand des Teilungspunktes $R.$ vom Fluchtpunkte $P.$ der Geraden p ist die Teilungsdistanz.

961. Wie kann man mittels der Teilungsdistanz die wahre Länge einer central abgebildeten Strecke bestimmen?

Ist die Teilungsdistanz $P. R.$ gleich $\frac{1}{n}$ der Fluchtstrecke $O P. = O_2 P.$, Fig. 122, so ist auch die Projection $a'b'$ oder $c'd'$ auf $\bar{u}_2$ irgend einer Strecke $a.b.$ oder $c.d.$ aus $R.$ gleich $\frac{1}{n}$ der Raumstrecke ab oder cd (958), also $\frac{1}{n}$ der wahren Länge; mithin ist diese Parallel-Projection $a'b'$ oder $c'd'$ zu ver-n-fachen, um die wahre Länge der Raumstrecke zu erhalten. Man sagt in einem solchen Falle: man habe mit Ein n^{tel} Fluchtstrecke oder mit dem Teilungs-Modulus $\frac{1}{n}$ projiciert.

962. Ist die Teilungsdistanz $P.R.$ = der ganzen Fluchtstrecke $O_2 P.$, Fig. 122, so sind die Parallel-Projectionen $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ ... den Raumstrecken ab, bc, cd.. an Länge gleich.

963. Wieviele Teilungspunkte kann man zu einer gegebenen Geraden p wählen?

Unendlich viele; denn die zu einander parallelen Geraden $\bar{u}_2 \bar{\bar{u}}_2$ der Teilungsebene können durch $P.$ und A beliebig gezogen werden, und in $\bar{\bar{u}}_2$ kann jeder Punkt zum Teilungspunkt ernannt werden. Ist $R.$ angenommen, dann ist $\frac{1}{n} = \frac{P. R.}{P. O} = \frac{P. R.}{P. O_2}$.

Also kann ein jeder Punkt der Bildebene ein Teilungspunkt sein.

964. Alle Teilungspunkte für denselben Modulus (961) liegen in einem aus dem Fluchtpunkte mit der Teilungsdistanz beschriebenen Kreise.

Jener aus dem Fluchtpunkte einer Geraden p beschriebene Kreis, dessen Radius der Fluchtstrecke $OP.$ gleich ist (962), wird vorzugsweise Teilungskreis genannt.

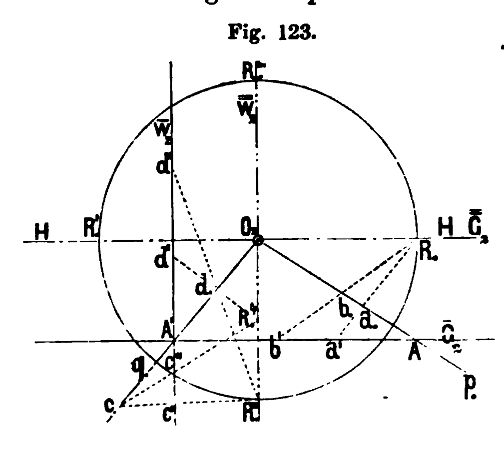
965. Für alle zur Bildebene C senkrechten Geraden ist der Distanzkreis zugleich Teilungskreis, weil die Fluchtstrecke der zu teilenden Geraden mit der Augdistanz an Länge gleich ist.

966. Was muss man also thun, um aus dem centralen Bilde einer begrenzten Geraden die wahre Länge derselben aufzufinden?

a) Man zieht $\bar{u}_2$ und Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ einer durch p gelegten Teilungsebene (Fig. 122).

b) Man sucht die wahre Grösse $O_3P.$ der Fluchtstrecke $OP.$ der Raumgeraden p.

Fig. 123.



c) Trägt man $\frac{1}{n}$ der Fluchtstrecke $O_3P.$ vom Fluchtpunkt der Geraden auf der Fluchtspur auf, so ist der Teilungspunkt $R.$ gefunden.

d) Aus $R.$ projiciert man das centrale Bild $a.b.c.d.\ldots$ der Geraden p auf $\bar{u}_2$, so ist die Projection $a'b'c'd'\ldots$ gleich $\frac{1}{n}$ von der wahren Länge $abcd\ldots$ der Geraden p im Raume.

e) Am einfachsten ist es $n = 1$, also die Teilungsdistanz $P.R.$ gleich der Fluchtstrecke $O_3P.$ zu wählen, weil dann die Projectionen auf $\bar{u}_2$, der wahren Länge der Strecken auf p gleich werden (962).

967. Beispiel. In einer horizontalen Ebene G deren Spur $\bar{G}_2$ in Fig. 123 gegeben ist, liegen zwei zur Bildebene C senkrechte Gerade p und q, deren centrale Bilder in $p.q.$ dargestellt sind (936). Man soll die wahren Längen der Raumstrecken ab und cd ermitteln.

Bei der Geraden p wurde die horizontale Ebene G als Teilungsebene, und $R.$ im Distanzkreis als Teilungspunkt angenommen. Projiciert man $a.b.$ aus $R.$ auf $\bar{G}_2$, so ist $a'b'$ die wahre Länge der Raumstrecke ab, weil die Teilungsdistanz $O_2R.$

gleich der Fluchtstrecke $O O_2 = d$ ist. Würde man $c.d.$ aus $R.$ auf $\overline{G}_2$ projicieren, so fände man ebenfalls als Projection die wahre Länge von cd. Ebenso wie $R.$ lässt sich auch $R'.$ benützen.

Man kann aber auch durch q eine andere, z. B. verticale Teilungsebene w legen, dann geht die Fluchtspur $\overline{\overline{w}}_2$ durch den Augpunkt O_2 senkrecht zum Horizont. Wählt man $R''.$ oder $R'''.$ im Distanzkreis als Teilungspunkt, und projiciert $c.d.$ auf $\overline{w}_2$, so ist $c'd'$ ebenfalls gleich der wahren Länge der Raumstrecke cd.

Ist $R^4.$ (lese R vier Strich Punkt) als Teilungspunkt für den Modulus $\frac{1}{2}$ gewählt worden, so muss $O_2 R^4. = \frac{1}{2}$ der Fluchtstrecke $O O_2$ sein; mithin wird die Projection $c''d''$ die halbe Länge der Raumstrecke cd angeben. Mit einem Modulus kleiner als 1 projiciert man gewöhnlich dann, wenn mit dem Modulus = 1 mehrere Parallel-Projectionen an unbenützbar liegende Orte zu liegen kommen.

Congruenz-Projectionen ebener Gebilde.

§. 49.

968. In einer gegebenen Ebene u liegt ein Gebilde, dessen centrales Bild $a.b.c.\ldots$ bekannt ist; wie wird man dieses Gebilde mit parallelen Stralen auf die Bildebene C projicieren?

Denken wir uns alle Punkte $abc\ldots$ der Ebene u mit ihren Parallel-Projectionen $a''b''c''\ldots$ (die wir erst suchen) verbunden, so erhalten wir die Strecken aa'', bb'', cc'', ... die wir uns versinnlichen können. Bestimmen wir von allen diesen Strecken die centralen Projectionen, so werden $a.a''$, $b.b''$, $c.c''\ldots$ diese Projectionen sein müssen; denn weil $a''b''c''\ldots$ in der Bildebene C liegen, so sind sie ihre eigenen centralen Bilder, und liegen also auch in den centralen Bildern von aa'', bb'' u. s. w.

Die Geraden aa'', bb'' cc'' sind nach der Voraussetzung untereinander parallel, also haben ihre centralen Bilder einen gemeinsamen Fluchtpunkt $K.$, woraus wir schliessen: die centrale Projection $a.b.c.\ldots$ liegt mit ihrer Parallel-Projection $a''b''c''\ldots$ bezüglich des Fluchtpunktes $K.$ der parallel projicierenden Stralen perspectivisch.

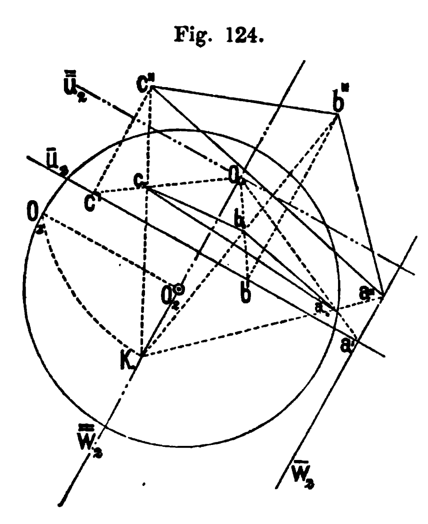
969. Da überdies beide Projectionen projectivisch verwandt sind, da sie von demselben Gebilde $abc\ldots$ der Ebene u abstammen, so folgt:

Die Lage der Parallel- und der Central-Projection eines ebenen Gebildes ist eine perspectivisch-collineare; der Fluchtpunkt K. der parallel projicierenden Stralen ist das Centrum und $\bar{u}_2$ der Ebene u die Begegnungsgerade der perspectivisch-collinearen Lage.

970. Wie findet man die Parallel-Projection a'' eines Punktes a der Ebene u?

Man legt, Fig. 124, durch den gegebenen oder vielleicht auch beliebig angenommenen Fluchtpunkt K. der Parallel-Projection eine beliebige Fluchtspur $\bar{\bar{w}}_2$ und sucht den Fluchtpunkt Q. in $\bar{\bar{u}}_2\,\bar{\bar{w}}_2$. Zieht man $Q.a.a'$, so ist diese Gerade die centrale Projection einer durch a in der Ebene u gezogenen Geraden. Durch diese legt man eine Ebene w, in welcher man nun a parallel auf $\bar{w}_2$ projiciert, mithin in der Zeichnung aus K. auf $\bar{w}_2$ nach a'', wodurch die Aufgabe (970) gelöst erscheint. Bei den übrigen Punkten $b.b''$, $c.c''$, ... ist der Vorgang derselbe, oder man verfährt nach den Gesetzen der perspectivischen Collineation (969); also ist in Fig. 124 das Dreieck $a''b''c''$ eine Parallel-Projection des Raumdreieckes abc.

Fig. 124.



In der Fig. 124 wurde $\bar{w}_2$ senkrecht auf $\bar{u}_2$ angenommen, und hat K. noch eine besondere Lage, indem $\bar{\bar{w}}_2$ auch durch O_2 geht. Diese Besonderheiten müssen jedoch nicht vorhanden sein.

971. Wie kann man ein central in $a.b.c.\ldots$ abgebildetes ebenes Gebilde $abc\ldots$ congruent auf die Bildebene projicieren?

Wenn man den Fluchtpunkt K. der congruent projicierenden Richtung ermittelt (man vergleiche mit 895), und dann wie vorhin verfährt (970). In Fig. 124 ist K. der erwähnte Punkt, welcher nun Congruenz-Fluchtpunkt der Ebene u genannt

werden soll, also ist $a''b''c''$ **die wahre Gestalt des Raumdreieckes** abc.

Der zweite Congruenz-Fluchtpunkt $K.'$ liegt in $\overline{\overline{w}}_2$ derart, dass $Q.$ die Strecke $K.K'.$ halbiert.

972. **Wie wird man das centrale Bild einer gegebenen ebenen Figur herstellen, wenn diese in einer gegebenen Ebene** u **eine bestimmte Lage einnehmen soll?**

Denkt man sich die Ebene u congruent auf die Bildebene projiciert, so kann man in der Bildebene die Figur in wahrer Gestalt und Lage gegen $\bar{u}_2$ zeichnen und hierauf mittels des Congruenz-Fluchtpunktes $K.$ das centrale Bild bestimmen. Zieht man nämlich durch a'' und $K.$ zwei **beliebige** zu einander parallele Gerade, von welchen die erstere mit $\overline{w}_2$ letztere mit $\overline{\overline{w}}_2$ bezeichnet werden soll, und sucht das centrale Bild $a'Q.$ des Schnittes der Ebene w mit u, so muss in $a'Q.$ das centrale Bild $a.$ liegen. Am einfachsten ist es wie in Fig. 124, $\overline{w}_2\overline{\overline{w}}_2$ senkrecht auf $\bar{u}_2$ anzunehmen.

Nach diesem Vorgange kann man auch die centralen Bilder von Kreisen construieren.

Der Lernende wolle nun auch die Verschwindungslinien der beiden perspectivisch-collinearen Systeme (328) construieren. Er wird für das Gebilde $a.b.c.$ in Fig. 124 die Gerade $\overline{\overline{u}}_2$ und für das Gebilde $a''b''c''$ die Congruenz-Projection des Schnittes der Ebene u mit der Verschwindungsebene V (928) als Verschwindungslinien finden. Für beide Gebilde gelten alle Beziehungen der perspectivischen Collineation.

973. Wie viele Mittel haben wir nun kennen gelernt, um die wichtige Aufgabe zu lösen: **das centrale Bild einer Strecke von gegebener Länge zu ermitteln, wenn die Gerade, in welcher das Bild liegt, und ein Endpunkt des Bildes gegeben ist?**

Zwei. Nämlich, entweder:

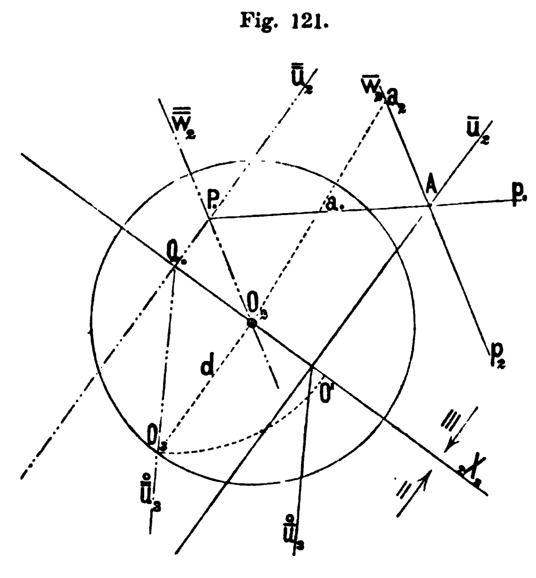
α) durch die Gerade eine Teilungsebene zu legen und einen Teilungspunkt zu benützen (966), oder

β) durch die Gerade überhaupt eine Ebene zu legen und diese Ebene mit der Geraden auf die Bildebene mittels des Congruenz-Fluchtpunktes zu projicieren (971). Man kann dann in der Congruenz-Projection die betreffende Strecke auftragen und auf umgekehrtem Wege das centrale Bild derselben ermitteln.

kennt ohne Mühe, dass alle Stralen, welche aus O die Punkte der Geraden p projicieren, in der Ebene w liegen und desshalb die Bildebene C in $\bar{w}_2$ durchschneiden müssen. Nun sind aber die Schnitte der aus O projicierenden Stralen mit der Bildebene C die centralen Projectionen der projicierten Punkte, folglich liegt in der Geraden, welche die zweite Spur A der Geraden p mit dem Fluchtpunkte $P.$ verbindet, das centrale Bild der beliebigen Geraden p.

933. Von welchem Punkte einer Geraden p ist der Fluchtpunkt dieser Geraden ein centrales Bild?

Fig. 121.



Von dem unendlich fernen Punkte der Geraden p; denn der Fluchtstral, weil er zu p parallel ist, projiciert jenen unendlich fernen Punkt.

934. Parallele gerade Linien haben einen gemeinsamen Fluchtpunkt.

935. Was folgt aus dem Umstande, dass parallele gerade Linien einen gemeinsamen Fluchtpunkt besitzen?

Dass sich die centralen Bilder von parallelen geraden Linien in dem gemeinsamen Fluchtpunkte schneiden (932). In Fig. 120 ist B die zweite Spur einer zu p parallelen Geraden q, also ist $BP.$ ihr centrales Bild?

936. Wo haben zur Bildebene C senkrechte gerade Linien ihren Fluchtpunkt?

Im Augpunkt O_2.

937. Wo haben horizontale parallele gerade Linien ihren Fluchtpunkt?

Im Horizont (923).

938. Sind parallele gerade Linien zur Bildebene C parallel, so sind sie auch zu ihren parallelen centralen Bildern parallel.

939. Wenn sich gerade Linien im Raume schneiden, so ist das centrale Bild ihres Schnittpunktes, der Schnittpunkt ihrer centralen Bilder (628).

940. Kann es auch sich schneidende gerade Linien geben, deren centrale Bilder parallel sind?

Wenn der Schnittpunkt mehrerer Raumgeraden in der Verschwindungsebene V liegt (928), dann werden ihre centralen Bilder parallel.

941. Wie findet man die zweiten Projectionen $a_2 b_2$ von zwei Punkten der Geraden p, wenn die centralen Projectionen $a.,b.$ bekannt sind?

Durch das Ziehen von Central-Ordinalen $O_2 a.$, $O_2 b.$ (Fig. 120). Es ist also nach (926) die Lage der Punkte a und b im Raume vollständig bestimmt.

942. Wie pflegt man am gewöhnlichsten eine Ebene durch centrale Projection zu bestimmen?

Durch ihre Spur in der Bildebene C und durch die Spur der zu ihr parallelen Fluchtebene (922). In Fig. 121 sei $\bar{\bar{u}}_2$ die Spur der Fluchtebene zu u in der Bildebene C und $\bar{u}_2$ die Spur der Ebene u in derselben Bildebene; also geht die Ebene u durch $\bar{u}_2$ parallel zur Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$.

943. Um die Neigung beider Ebenen gegen die Bildebene C zu erkennen, legt man durch den Augpunkt $\mathring{O}_2$ eine Bildebene III $\perp$ $\bar{\bar{u}}_2$, dann ist der von der dritten Spur $\mathring{\bar{\bar{u}}}_3$ der Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$ mit ${}_2X_3$ gebildete Winkel, das Mass ihrer zweiten Neigung. Die $\mathring{\bar{u}}_3$ läuft mit der Nullseite $\mathring{\bar{\bar{u}}}_3$ parallel.

944. Die Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ ist zu $\bar{u}_2$ selbstverständlich parallel.

945. Welche Bedeutung hat der zwischen $\bar{u}_2$ und der Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ liegende Teil der Bildebene C?

Er enthält die centralen Bilder aller Punkte der Ebene u, die sich im ersten Raume (930) befinden.

946. Die Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ ist das centrale Bild der in der Ebene u liegenden unendlich fernen Durchschnittsgeraden der Ebene u mit ihrer Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$.

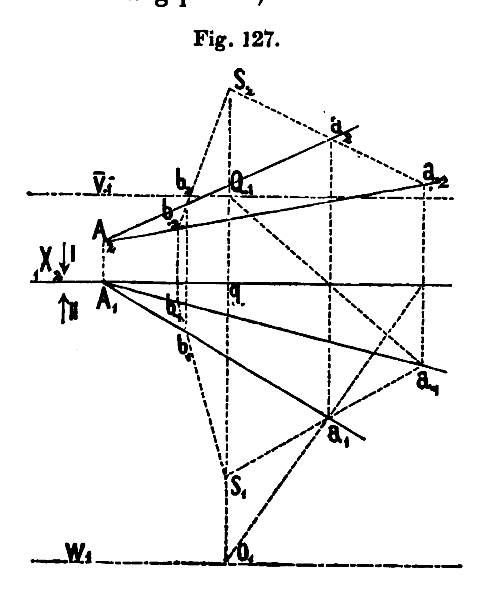
die Strecke von der Länge $a''c''$ sich befindet; man soll das centrale Bild $c.$ bestimmen, wenn $a.$ gegeben ist.

α) Man wählt, Fig. 126, $a''c''$ als Radius im Proportionalwinkel (979) und trägt die Sehne in $x.$, von $a.$ nach $c.$ auf. Oder:

β) Man zieht durch a'' eine Parallele zum centralen Bilde $x.$, trägt die gegebene Länge $a''c''$ nach $a''c_2$ auf und verbindet c_2 mit dem Congruenz-Fluchtpunkte O_2, so ergibt sich ebenfalls $c.$.

981. Anmerkung. Die hier entwickelten Grundsätze bilden die Fundamente der Perspective, da sie bei allen anderen Aufgaben zur Anwendung kommen. Es ist Sache der Uebung in gegebenen Fällen die zweckmässigsten Anordnungen über den Ort der Teilungspunkte, die Grösse der Teilungsdistanz, die Lage der Teilungsebenen u. s. w. zu treffen. Soll man gerade Linien von bestimmter Lage perspectivisch darstellen, so wird man wo möglich einen Fluchtstral construieren, um den Fluchtpunkt der Geraden zu erhalten. Fällt der Fluchtpunkt an einen unbenützbar liegenden Ort, so wird man auf der Bildebene C die orthogonale Projection der zu construierenden Geraden ermitteln, und durch Hilfe der zweiten Ordinaten von Punkten der Geraden, zu deren centralem Bilde gelangen.

Fig. 127.



Bei solchen Aufgaben ist es gut zur Bildebene C senkrechte Ebenen zu legen und mit Hilfe von zugeordneten orthogonalen Projectionen die Lösung von Aufgaben zu erstreben.

Hat der Lernende es nie versäumt, so oft als möglich in Gedanken mit den Projectionen das Modell in Verbindung zu bringen (557), so wird ihm die Darstellung von Projectionen räumlicher Gebilde keine besonderen Schwierigkeiten bereiten.

982. Oft kommt es bei centralen Projectionen vor, durch mehrere Punkte Gerade zu ziehen, die sich in dem unbenützbar liegenden Durchschnittspunkte zweier anderen Geraden schneiden.

938. Sind parallele gerade Linien zur Bildebene C parallel, so sind sie auch **zu ihren parallelen centralen Bildern** parallel.

939. Wenn sich gerade Linien im Raume schneiden, so ist das centrale Bild ihres Schnittpunktes, der Schnittpunkt ihrer centralen Bilder (628).

940. **Kann es auch sich schneidende gerade Linien geben, deren centrale Bilder parallel sind?**

Wenn der Schnittpunkt mehrerer Raumgeraden in der Verschwindungsebene V liegt (928), dann werden ihre centralen Bilder parallel.

941. **Wie findet man die zweiten Projectionen $a_2 b_2$ von zwei Punkten der Geraden p, wenn die centralen Projectionen $a.,b.$ bekannt sind?**

Durch das Ziehen von Central-Ordinalen $O_2 a.$, $O_2 b.$ (Fig. 120). Es ist also nach (926) die Lage der Punkte a und b im Raume vollständig bestimmt.

942. **Wie pflegt man am gewöhnlichsten eine Ebene durch centrale Projection zu bestimmen?**

Durch ihre Spur in der Bildebene C und durch die Spur der zu ihr parallelen Fluchtebene (922). In Fig. 121 sei $\bar{\bar{u}}_2$ die Spur der Fluchtebene zu u in der Bildebene C und $\bar{u}_2$ die Spur der Ebene u in derselben Bildebene; also geht die Ebene u durch $\bar{u}_2$ parallel zur Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$.

943. Um die Neigung beider Ebenen gegen die Bildebene C zu erkennen, legt man durch den Augpunkt O_2 eine Bildebene III $\perp$ $\bar{\bar{u}}_2$, dann ist der von der dritten Spur $\mathring{\bar{\bar{u}}}_3$ der Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$ mit ${}_2X_3$ gebildete Winkel, das Mass ihrer zweiten Neigung. Die $\mathring{\bar{\bar{u}}}_3$ läuft mit der Nullseite $\mathring{\bar{\bar{u}}}_3$ parallel.

944. Die **Fluchtspur** $\bar{\bar{u}}_2$ ist zu $\bar{u}_2$ selbstverständlich **parallel.**

945. **Welche Bedeutung hat der zwischen $\bar{u}_2$ und Fluchtspur $\bar{\bar{u}}_2$ liegende Teil der Bildebene C?**

[illegible] centralen Bilder aller Punkte der Ebene u, [illegible] Raume (930) befinden.

[illegible]tspur $\bar{\bar{u}}_2$ ist das centrale Bild der in der [illegible] unendlich fernen Durchschnittsgeraden der [illegible] Fluchtebene $\bar{\bar{u}}$.

durch eine Gerade $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, deren Schnitt $A_1 A_2$ mit der Begegnungsebene II ein Punkt der unbekannten Geraden $a.b.$ sein muss. Da aber $a.$ durch $a._1 a._2$ gegeben, so kann man $a.A$ ziehen, und projiciert man aus $S_1 S_2$ den Punkt $b_1 b_2$, so findet man in der Geraden $a.A$ den Punkt $b._1 b._2$ als Collinear-Projection des gegebenen Punktes $b_1 b_2$. Auf diese Weise ergeben sich aus zwei zugeordneten Abbildungen des Originales auch die zugeordneten Abbildungen der Collinear-Projection.

985. **Wie construiert man zu einer Ebene u ihre Collinear-Projection?**

Man wählt in der Ebene u einen beliebigen Punkt b, dessen Collinear-Projection $b.$ man nach (984) ermittelt. Ist $\bar{u}_2$ der Schnitt von u mit der Begegnungsebene II, so geht auch die Ebene $u.$ durch $\bar{u}_2$, so dass also $\bar{u}_2$ und $\bar{u}._2$ eine und dieselbe Spur bezeichnen. Demnach ist die Collinear-Projection $u.$ durch $b.$ und $\bar{u}_2$ vollständig bestimmt. Zugleich sieht man ein, ist eine Ebene u zur Begegnungsebene β parallel, so ist es auch ihre Collinear-Projection.

986. **Welche Lage besitzt die erste Abbildung der Collinear-Projection eines Originalgebildes zur ersten Abbildung des Originalgebildes?**

Da die ersten Bilder b_1 und $b._1$, Fig. 127, von zwei collinear verwandten Raumpunkten b und $b.$ in einem durch S_1 gehenden Strale liegen, und da die ersten Bilder $a_1 b_1$ und $a._1 b._1$ von je zwei verwandten Raumgeraden sich in der Bildaxe $_1X_2$ schneiden müssen, so folgt, dass die **ersten** Bilder beider Raumgebilde perspectivisch-collinear liegen, wobei S_1 das Centrum und $_1X_2$ die Begegnungsgerade ist. Sucht man demzufolge zum ersten Bilde des Originalgebildes die Collinear-Projection in der Bildebene I, so geben die einzelnen Punkte derselben an, wie weit die Raumpunkte der Collinear-Projection von der Bildebene II entfernt sind (544, b).

987. **Wenn man zu den beiden perspectivisch-collinearen Gebilden der Bildebene I nach (328) die Verschwindungsgeraden $\bar{V}._1$ und W_1 construiert, was werden diese Geraden bezüglich der räumlichen Collinear-Projection bedeuten?**

Vermöge der Erläuterungen in (328) müssen alle Punkte der Ebenen $V.$ und W, die man durch W_1 und $\bar{V}._1$ zur Begegnungsebene II parallel führt, ihre verwandten Punkte im Unendlichen

haben; also sind diese Ebenen W und $V.$ als Verschwindungsebenen der beiden räumlichen Collineargebilde zu bezeichnen und W_1, $\overline{V}_{.1}$ sind ihre ersten Spuren. Wenn also mehrere gerade Linien des ersten Systemes durch einen und denselben Punkt M der Verschwindungsebene W gehen, so sind die verwandten Geraden im zweiten Systeme zu SM parallel, weil $M.$ im Strale SM im Unendlichen liegt (5). Und wenn mehrere Stralen des zweiten Gebildes sich in einem Punkte $N.$ der Verschwindungsebene $V.$ treffen, so sind die verwandten Stralen des ersten Gebildes zu $SN.$ parallel (5).

Nach (330) ist $S_1\, O_1 = Q_{.1}\, q.$, d. h. die Verschwindungsebene W ist vom Projectionscentrum S ebensoweit entfernt, wie die andere Verschwindungsebene $V.$ von der Begegnungsebene II, und zwar liegen beide Ebenen gleichzeitig zwischen oder ausserhalb S und der Ebene II (332).

988. **Welcher Punkt eines Systemes wird sein Verschwindungsmittelpunkt genannt?**

Derjenige Punkt in der **Verschwindungsebene** des Systemes, welcher mit dem Projectionscentrum S in einer zur Begegnungsebene II senkrechten Geraden liegt. Es sind demnach in Fig. 127 $O_1\, S_2$ bezüglich der Bildaxe ${}_1X_2$ die zugeordneten Projectionen vom Verschwindungsmittelpunkt O des Originalsystemes und $Q_{.1}\, S_2$ die zugeordneten Abbildungen des in der Ebene $V.$ liegenden Verschwindungsmittelpunktes $Q.$ der collinearen Projection.

989. **Was muss geschehen, wenn man ein Originalgebilde $ab\ldots$ aus einem beliebigen Punkte P, und die Collinear-Projection $a.b.\ldots$ aus dem zu P collinear-verwandten Punkte $P.$ auf die Begegnungsebene II projiciert?**

Es entstehen auf der Begegnungsebene II nicht zwei verschiedene Projectionen, sondern es fällt die Projection aus dem Punkte P mit jener aus dem Punkte $P.$ vollständig zusammen, weil je zwei Stralen, welche zwei verwandte Punkte, z. B. b und $b.$ projicieren, nämlich Pb und $P.b.$, collinear verwandte Gerade sind, die sich vermöge des zweiten Projectionsgesetzes (6) in einem Punkte der Begegnungsebene schneiden müssen.

990. **Wenn man demnach die Collinear-Projection $a.b.\ldots$ eines Raumgebildes $ab\ldots$ auf die Begegnungsebene II orthogonal, also aus einem unendlich fernen**

Punkte O. projiciert, mit welcher Projection des Originalgebildes ab.... muss diese orthogonale Abbildung identisch sein?

Mit jener centralen Projection des Originalgebildes, welche aus dem Verschwindungsmittelpunkte O (988) erzeugt wird. Construiert man demzufolge aus dem Verschwindungsmittelpunkte O (d. i. $O_1 S_2$, Fig. 127) des Originalgebildes die centrale Projection desselben, so ist diese die orthogonale Abbildung der dem Originalgebilde zugehörigen räumlichen Collinear-Projection. Man kann sonach durch Anwendung der Lehren über Central-Projectionen direct die orthogonale Abbildung der räumlichen Collinear-Projection auf der Begegnungsebene II herstellen.

991. Ist nicht auch die senkrechte erste Abbildung $a._1 b._1$... der Collinear-Projection $a.b$...., eine centrale Abbildung der orthogonalen ersten Projection $a_1 b_1$... des Originalgebildes?

Nach (974) ist $a._1 b._1$ ... eine centrale Projection der in der Ebene I liegenden orthogonalen Abbildung $a_1 b_1$ ... des Originalgebildes, und zwar ist für diese centrale Projection $Q._1$ der Augpunkt und $Q._1 S_1$ die Augdistanz. Weil $q.O_1$ die Augdistanz für die centrale Abbildung $a._2 b._2$ ... des Originalgebildes ist (999), und nach (330) geschlossen werden kann, dass $Q._1 S_1 = q.O_1$ sein muss, so folgt, dass die beiden centralen Abbildungen des Originales und seiner orthogonalen Projection auf der Bildebene I für dieselbe Augdistanz $q.O_1$ construiert sind, nur mit dem Unterschiede, dass für die Abbildung des Originalgebildes ab... der Augpunkt in S_2, für die Abbildung von $a_1 b_1$ ... der Augpunkt in $Q._1$ liegt.

992. Wie muss man die zur Bildebene II senkrechte Ebene I annehmen, auf dass die centrale Projection $a._1 b._1$ ... aus demselben Centrum O entsteht, aus welchem die centrale Abbildung $a._2 b._2$ hergestellt wird?

Man muss zuerst in einer Nebenconstruction aus den Angaben $S_1 S_2$, $a_1 a_2$, $a._1 a._2$ den Punkt $Q._1$ ermitteln und sodann in der Hauptzeichnung die Projectionsaxe ${}_1X_2$ von S_2 ebensoweit entfernt halten, wie es der Abstand $Q._1 q.$ anzeigt. Denkt man sich dann das Originalgebilde auf die neue Bildebene I orthogonal projiciert und sucht sowol von diesem Grundrisse, als auch vom Raumgebilde die centralen Abbildungen auf der Begegnungs-

ebene II, wobei man S_2 zum Augpunkte und $Q_1 S_1$ zur Augdistanz wählt, so sind dieselben gleichzeitig zwei zugeordnete orthogonale Abbildungen der räumlichen Collinear-Projection des gegebenen Originalgebildes. Wenn man sonach versteht, die centrale Projection eines Raumgebildes und seines Grundrisses ohne Anwendung der Durchschnittsmethode (909) zu construieren, so hat man auch hiedurch erlernt, die Collinear-Projection eines gegebenen Raumgebildes direct in zwei zugeordneten orthogonalen Projectionen darzustellen.

993. Wenn man von einem Raumgebilde sein perspectivisches Bild und auch jenes seines Grundrisses kennt, kann man immer diese beiden Bilder als zugeordnete orthogonale Abbildungen einer Collinear-Projection des Original-Raumgebildes ansehen?

Immer (992). Jedoch liegt das Collineations-Centrum um den senkrechten Abstand der Axe $_1X_2$ vom Augpunkt, der Begegnungsebene II näher als das Auge O, für welches die Perspective construiert wurde.

994. Was versteht man unter einem Relief eines Original-Raumgebildes?

Wenn man von dem Raumgebilde und seiner orthogonalen Projection auf der Bildebene I ein perspectivisches Bild auf der Ebene II unter allen jenen Vorsichten anfertiget, die in §. 45 erörtert wurden, und die Collinear-Projection, welche durch diese beiden Bilder bestimmt ist, stofflich, z. B. in Stein, ausführt; dann nennt man dies neue Raumgebilde ein Reliefbild oder ein Relief des Original-Raumgebildes.

Der Lernende sieht nun ein, dass es keiner neuen Studien bedarf, um zwei zugeordnete orthogonale Projectionen eines Reliefbildes eines gegebenen Gegenstandes direct darzustellen.

Diese bisher noch unbekannte, so einfache Darstellung der orthogonalen Relief-Abbildungen verdient von allen Architekten und Bildhauern gekannt zu sein.

Es sei hier bemerkt, dass in dem 132 Seiten umfassenden Büchlein: „Grundzüge der Reliefperspective, von Rudolf Staudigl, Wien 1868“, die Sätze (990, 991) ohne Benützung der Collinear-Projectionen aufgestellt wurden, und dass daselbst ein besonderes Constructionsverfahren zur Darstellung der Reliefbilder gelehrt

wird, welches nun durch die in (992) gegebene weit einfachere Lehre ersetzt werden kann.

995. Welche Lage haben zwei perspectivisch affine Raumgebilde?

Die verwandten Punkte liegen in parallelen Stralen und je zwei verwandte Gerade schneiden sich in der endlich gelegenen Begegnungsebene β. Wählt man wieder die verticale Bildebene II als Begegnungsebene und denkt man sich zwei Punkte a und $a.$ als affin verwandt durch die zugeordneten Bilder $a_1 a_2$, $a._1 a._2$ gegeben, so kann man nach derselben Art wie in (984) zu irgend einem Punkte b seine affine Projection $b.$ ermitteln.

996. In welcher Lage befindet sich die orthogonale erste Abbildung des Original-Raumgebildes zur ersten orthogonalen Abbildung der räumlich-affinen Projection?

Diese Lage ist eine perspectivisch affine, denn sie geht aus (Fig. 127) hervor, wenn S_1 im Unendlichen liegt.

997. In welcher Beziehung stehen die zweiten Ordinaten des Original-Raumgebildes zu den zweiten Ordinaten der verwandten Punkte im affinen Raumgebilde?

Die senkrechten zweiten Ordinaten des Raumgebildes, nach einem gewissen Verhältnisse proportional verändert, geben die senkrechten zweiten Ordinaten des affinen Raumgebildes. Die Wahrheit dieses Satzes erkennt man aus der perspectivisch-affinen Lage der ersten Abbildungen der beiden Raumgebilde (996).

998. Mit welcher Projection des Original-Raumgebildes ist die auf der Bildebene II befindliche orthogonale Abbildung des affinen Gebildes identisch?

Die Geraden $a.a._2$, $b.b._2, \dots$ stehen auf der Bildebene II senkrecht und haben ihre Begegnungspunkte in $a._2$, $b._2, \dots$, folglich sind $aa._2$, $bb._2, \dots$ die verwandten und unter sich parallelen Geraden des ersten Systemes. Projiciert man demnach ein Original-Raumgebilde, dem der Punkt a angehört, parallel mit $aa._2$ auf die Bildebene II, so ist die so entstehende schiefe Projection des Original-Raumgebildes eine orthogonale Projection des affinen Raumgebildes.

999. Verändert man alle zweiten Ordinaten aa_2, $bb_2, \dots$ im Verhältnisse von aa_2 zu $a.a._2$ und trägt die so veränderten Ordinaten als zweite Ordinaten auf den durch $a._2$, $b._2, \dots$ zu ${}_1X_2$

gezogenen Ordinalen ihrem Vorzeichen entsprechend von ${}_1X_2$ aus auf, so ergeben sich hiedurch die ersten Bilder $a._1\, b._1 \ldots$ der affinen Collinear-Projection des Raumgebildes. Es ist somit diese Projection durch zwei zugeordnete orthogonale Abbildungen direct bestimmt.

1000. Wie kann man eine perspectivisch ähnliche Raumprojection eines Raumgebildes construieren?

In diesem Falle liegt die Begegnungsebene β im Unendlichen, das Centrum S im Endlichen. Wie leicht einzusehen, liegt in jeder Bildebene das orthogonale Bild des Originalgebildes mit dem orthogonalen Bilde des perspectivisch ähnlichen Raumgebildes, perspectivisch-ähnlich. Wenn man daher die ersten und zweiten Ordinaten eines Raumgebildes in demselben Verhältnisse verändert, und mit diesen veränderten Ordinaten zwei neue zugeordnete Projectionen construiert und dabei berücksichtigt, dass sich auch die Entfernung von je zwei Ordinatenebenen des Originalgebildes in eben diesem Verhältnisse ändert, so sind die neuen Projectionen die orthogonalen Abbildungen des dem Originalgebilde ähnlichen Raumgebildes.

Bei der praktischen Anwendung der Projectionslehre werden gewöhnlich nur den Raumgebilden ähnliche Gebilde abgebildet, insbesonders dann, wenn die Dimensionen der Raumgebilde, wie z. B. bei Maschinen, Brücken, Gebäuden u. dgl., das Ausmass der Zeichnungsebene übersteigen. Der Massstab wird Behufs der Anfertigung einer Zeichnung verjüngt, und die aus einer verjüngten (d. h. geometrisch ähnlich verkleinerten) Zeichnung entnommenen Massen werden wieder auf das Originalmass zurückgeführt, sobald aus der Zeichnung das Originalgebilde stofflich ausgeführt werden soll.

Wir können uns desshalb die in den folgenden Abschnitten vorkommenden Raumgebilde immer als ähnliche Nachbildungen der Originalgebilde vorstellen. Das Originalgebilde ist sofort bestimmt, wenn man das Verhältnis des Zeichnungsmasses zum Originalmasse kennt.

Vierter Abschnitt.

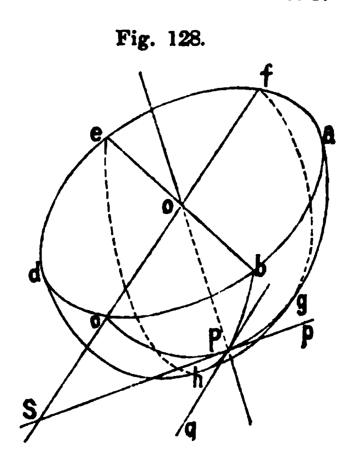
Entstehung, Darstellung und Untersuchung der Regel- und Curvenflächen.

Allgemeine Bemerkungen über Flächen. Flächentangenten. Tangentenebenen. Flächennormalen.

§. 51.

1001. Um geometrische Flächen abzubilden, wird man eine Reihe von geeigneten, auf der Fläche liegenden Linien projicieren; aus der Gesammtheit der Linien-Projectionen erhält man ein Bild der Fläche.

Fig. 128.



In Fig. 128 sind von einer gekrümmten Fläche, welche im Verein mit einer begrenzten Ebene einen Raum umschliesst, nur wenige Linien $abcdefa$, bPe, cPf, $aghd$, (von der Ebene die Geraden be, cf) abgebildet, und doch erhält man schon eine beiläufige Vorstellung von der Gestalt des Körpers. Weiss man, dass bhe und cgf ebene Curven sind, so ist die Gerade oP das Bild ihrer Durchschnittsgeraden. Man sieht ein, dass für die Abbildung einer Fläche auch die Bilder der dem projicierenden Auge unsichtbaren Linien sehr erspriesslich sind, indem sie, als gestrichelt, die dem Auge abgewendete Flächenseite leichter erkennen lassen.

1002. Welches ist die einfachste Entstehungsweise der Flächen?

Eine Linie *e* von gegebener Gestalt und Lage bewegt sich nach einem gegebenen Gesetze weiter, so dass je zwei unendlich nahe Punkte von *e* auch zwei unendlich nahe Linien beschreiben.

Um sich eine Vorstellung von dieser Entstehungsweise einer Fläche an einem materiellen Gegenstande machen zu können, denke sich der Lernende, eine homogene plastische Masse (z. B. Töpferthon) werde durch einen Drat (der eine gerad- oder krummlinige, eine constante oder eine veränderliche Gestalt haben kann) so zerschnitten, dass während des Schneidens der Drat nach irgend einem Gesetze sich weiter bewegte — alsdann ist klar, dass jeder der beiden Teile der plastischen Masse die Gestalt der vom Drate durchlaufenen Fläche zeigen muss, und dass diese Flächen in der angegebenen Weise entstanden sind.

1003. Die sich fort bewegende, eine Fläche erzeugende Linie *e* wird die Erzeugende der Fläche genannt.

Sind mehrere Linien gegeben, an welchen die Erzeugende stets anliegen soll, so werden diese als Leitlinien der Fläche bezeichnet.

1004. Was ist über die Gestalt der Flächen im Allgemeinen zu bemerken?

Die Gestalt einer Fläche richtet sich nach der Gestalt der Erzeugenden und ihrem Bewegungsgesetze. Im Grossen und Ganzen unterscheiden wir zwei Hauptarten von Flächen, nämlich Regelflächen und Curvenflächen.

Unter Regelflächen werden alle Flächen verstanden, welche durch die Weiterbewegung einer geraden Linie entstanden gedacht werden können.

Curvenflächen (Fig. 128) hingegen sind jene, welche nur durch die Weiterbewegung einer Curve entstehen.

1005. Was versteht man unter der Natur einer Fläche?

Die Gesetze, welche in den Lagen verschiedener Punkte und Linien der Fläche gegen andere auf der Fläche oder ausserhalb derselben liegende Punkte oder Linien wahrzunehmen sind.

1006. Wie wird man die zugeordneten Projectionen eines Flächenpunktes einer durch zugeordnete Bilder gegebenen Fläche (1001) construieren?

Man muss die Projectionen des Punktes so wählen, auf dass sie in den zugeordneten Bildern einer der Fläche angehörenden Linie liegen und einen Punkt dieser Linie bestimmen.

1007. Wie wird man den Schnitt einer Ebene mit einer abgebildeten Fläche projicieren?

Man bildet die Schnittpunkte einer hinreichenden Menge von auf der Fläche liegenden Linien mit der Ebene ab (man lese in (692) statt Gerade das Wort Linie) und verbindet in jeder Bildebene die Schnittpunkte in der entsprechenden Reihenfolge.

1008. Was verstehen wir unter einer Flächendecklinie?

Eine Linie auf einer Fläche, welche mit einer anderen Raumlinie eine gemeinsame Projection besitzt. Wir können daher die Flächendecklinien, die wir zu einer beliebigen Linie construieren, auf dieselbe Weise wie in (593) die Deckgeraden, nach der Nummer des gemeinsamen Bildes bezeichnen.

1009. Wie wird man den Schnitt einer beliebigen Linie mit einer Fläche abbilden?

Man betrachtet eine Projection der Linie als die Projection einer auf der Fläche liegenden Decklinie (1008), und construiert eine zugeordnete Projection der Decklinie mit Hilfe der abgebildeten, auf der Fläche liegenden Linien (1006). Die Schnittpunkte der gegebenen Linie mit ihrer Decklinie sind auch die Schnittpunkte der gegebenen Linie mit der Fläche.

1010. Wie wird man den Schnitt zweier Flächen abbilden?

Man sucht die Bilder der Schnittpunkte von Linien der einen Fläche mit der zweiten Fläche (1009) und verbindet sie in jeder Bildebene ihrer Reihenfolge entsprechend durch eine Linie.

1011. Wie kann man durch eine gegebene Linie s eine Fläche F' legen?

Diese Aufgabe lässt unendlich viele Auflösungen zu. Wir unterscheiden zwei Gruppen von Auflösungen:

a) die gegebene Linie s ist eine Erzeugende, oder

b) sie ist eine Leitlinie für eine andere irgendwie angenommene Erzeugende der Fläche F' (1003).

1012. Wie kann man ganz allgemein den Schnitt einer Linie s mit einer Fläche F abbilden?

Man wählt sich eine Fläche F', auf welcher die Linie s liegt (1011) und sucht den Schnitt s' der Fläche F mit der Hilfs-

fläche F' (1010). Liegt ein Punkt der Linie s zugleich in s', so ist er offenbar der Schnitt von s mit der Fläche F.

1013. Wie kann man ganz allgemein einen Schnittpunkt zweier Flächen F und F' construieren?

Man denkt sich eine Hilfsfläche F'', welche F in einer Linie s und F' in einer Linie s' schneidet (1010). Jeder Punkt, welcher zugleich in s und s' liegt, ist ein Punkt in der Schnittlinie der beiden Flächen F und F'.

1014. Was sind Elementar-Dreiecke?

Unendlich kleine, auf einer Fläche liegende Dreiecke. Man stellt sich nämlich vor, dass eine jede Fläche aus geometrischen Punkten (10) stetig zusammengesetzt ist (8); alsdann muss jeder beliebige Punkt P einer Fläche F mit unendlich vielen anderen ihn umgebenden Punkten der Fläche F in Berührung stehen, also reihen sich auch unendlich viele und unendlich kleine Elementar-Dreiecke um den gemeinsamen Punkt P herum aneinander an.

1015. Welche Ebene wird Berührungsebene einer Fläche F genannt?

Jede Ebene, welche durch die allseitige Erweiterung eines Elementar-Dreieckes der Fläche entsteht.

1016. Von den Punkten des der Fläche F angehörenden Elementar-Dreieckes einer Berührungsebene B sagen wir, sie seien die Berührungspunkte der Ebene B mit der Fläche F. Da diese Punkte unendlich nahe bei einander liegen, also sinnlich nicht von einander unterschieden werden können, so spricht man gewöhnlich nur von einem Berührungspunkte der Berührungsebene.

1017. Wann sagt man, eine Fläche F ist in einem Punkte P stetig gekrümmt?

Wenn alle durch den Punkt P (Fig. 128), denkbaren Berührungsebenen (1015) nur unendlich kleine Flächenwinkel mit jeder einzelnen dieser Berührungsebenen einschliessen.

In den Punkten der Linie *abcdef* ist die Gesammtfläche in Fig. 128 unstetig gekrümmt.

1018. Welche durch einen Punkt P einer stetig gekrümmten Fläche F gelegte Ebene wird eine tangierende Ebene oder Tangentenebene des Punktes P genannt?

Jene Ebene, die durch den Punkt P geht und sich allen Berührungsebenen dieses Punktes (1015) so innig als möglich anschliesst.

1019. Um eine klare Vorstellung von einer Tangentenebene zu bekommen, denke sich der Lernende zuerst einen Kreis; durch einen Periferiepunkt P gehen zwei Linienelemente, welchen P gemeinsam ist: werden beide Linienelemente zu Geraden erweitert, so entstehen zwei unendlich nahe Berührungsgerade des Kreises. Jede dieser beiden Geraden steht nahezu auf dem Kreishalbmesser PO senkrecht. Die in der Kreisebene durch P zu PO wirklich senkrecht gezogene Gerade ist die einzige construierbare Gerade, die man sich durch P so denken kann, dass sie beiden Berührungsgeraden am innigsten sich anschliesst, und diese Gerade ist eine eigentliche Kreistangente. Die durch einen Periferiepunkt P gehende Curventangente schliesst mit den beiden durch denselben Punkt gehenden Berührungsgeraden unendlich kleine, also unmessbare Winkel ein und daher kommt es, dass gewöhnlich die Berührungsgeraden eines Curvenpunktes und die Tangente dieses Punktes nicht unterschieden werden.

Wie das erwähnte Beispiel mit dem Kreise lehrt, wird die Lage der Tangente eines Curvenpunktes aus dem Entstehungsgesetze, aus der Natur der Curve abgeleitet; sie kann aber bei allen praktischen Constructionen als mit einer Berührungslinie dieses Punktes zusammenfallend, angenommen werden.

Nun in einer ähnlichen Weise verhält es sich mit der Tangentenebene eines Flächenpunktes. Denken wir uns z. B. P sei ein Flächenpunkt einer Kugel, so ist, wie leicht zu erkennen, der Radius PO auf allen durch P gehenden Berührungsebenen fast ganz genau senkrecht und ist die Abweichung von diesem senkrechten Stande zu den Berührungsebenen eine unangebbar kleine Grösse. Legt man aber durch P wirklich eine senkrechte Ebene zu PO, so nähert sich diese allen Berührungsebenen von P so innig als möglich und wir vermögen keine andere durch P gehende Ebene zu erkennen, welche diese Annäherungseigenschaft in einem höheren Grade besässe, als die zu PO senkrechte Ebene. Wir müssen diese letztere demnach als die Tangentenebene des Punktes P bezeichnen, und erkennen ebenfalls, dass die Lage der Tangentenebene eines Punktes nur aus der Natur einer Fläche (1005) bestimmt werden kann.

1020. Weil der Neigungswinkel der Tangentenebene eines Punktes P mit den Berührungsebenen desselben Punktes ein unmessbar kleiner ist, so kann man für alle grafischen Constructionen annehmen, alle Berührungsebenen im Punkte P einer stetig gekrümmten Fläche bilden mit der Tangentenebene desselben Punktes nur eine Ebene.

1021. Sobald der Lernende die Kegelflächen verstehen gelernt haben wird, kann er sich die Tangentenebene eines Punktes P einer Fläche F auch auf folgende Weise vorstellen. Es wird der Punkt P mit allen ihn umgebenden Punkten der Fläche F durch unbegrenzte gerade Linien verbunden, welche in ihrer Gesammtheit eine vollständige Kegelfläche aus zwei einfachen Kegelmänteln bestehend ausmachen, die P zur Spitze haben. Ist die Fläche im Punkte P stetig gekrümmt, so liegen die beiden Kegelmäntel so unendlich nahe aneinander, auf dass zwischen ihnen nur noch eine durch P gehende Ebene gedacht werden kann, welche nun die Tangentenebene des Punktes P vorstellt.

1022. Eine Flächentangente ist jene Gerade, welche durch den Berührungspunkt P einer Tangentenebene in dieser gezogen werden kann. Für alle grafischen Operationen kann man eine Flächentangente auch als eine Berührungsgerade ansehen, welche durch die geradlinige Verlängerung eines Linienelementes einer Fläche entsteht.

1023. Wie construiert man in einem gegebenen Punkte P einer Fläche F eine Flächentangente?

Man legt durch den Punkt P eine Ebene und sucht ihren Schnitt mit der Fläche F (1007). Im Punkte P zieht man an diese Schnittcurve eine Tangente (748), welche sofort eine Flächentangente ist (1022).

1024. Wenn man durch einen Punkt P einer stetig gekrümmten Fläche alle möglichen Flächentangenten construiert (1023), was bildet die Gesammtheit dieser Tangenten?

Eine Ebene (1020); nämlich die Tangentenebene im Punkte P.

1025. Wie wird man die Tangentenebene durch einen Punkt P einer stetig gekrümmten Fläche F construieren?

Man construiert irgend zwei durch P gehende Flächentangenten (1023), so ist durch sie die Tangentenebene bestimmt (1024).

1026. **Wie kann man von einem Punkte** *S* **(Fig. 128) ausserhalb einer Fläche** *F* **eine Tangente an die Fläche** *F* **legen?**

Man legt durch den Punkt *S* irgend eine Gerade (*SO*), durch diese eine die Fläche *F* schneidende Ebene und sucht ihren Schnitt mit *F* (1007). Kann man von *S* Tangenten (*SP*) an diesen Schnitt ziehen, so sind dieselben die gesuchten Flächentangenten.

1027. **Wie kann man durch einen unendlich fernen Punkt** *S*, **oder was dasselbe ist, parallel zu einer gegebenen Geraden** *s* **eine Tangente an eine Fläche** *F* **legen?**

Man nimmt irgend eine Gerade *s'* zu *s* parallel an, legt durch *s'* eine die Fläche *F* schneidende Ebene und sucht ihren Schnitt mit *F* (1007). Kann man parallel zu *s'* Tangenten an diesen Schnitt ziehen, so sind dieselben die gesuchten Flächentangenten.

Wie man sieht, ist dieses Verfahren ganz dasselbe, als ob *S* ein endlich gelegener Punkt wäre (1026).

1028. Wenn von einem Punkte *S* Tangenten an eine Fläche *F* gelegt werden können, so sagt man, der Punkt *S* liege auf der **convexen** Seite der Fläche *F* (Fig. 128); lassen sich aber von *S* keine Flächentangenten ziehen, so liegt *S* auf der **concaven** Flächenseite.

1029. **Wann ist eine stetig gekrümmte Fläche geschlossen?**

Wenn sie durch keine Linie begrenzt wird. Eine Kugelfläche ist beispielweise eine geschlossene, ein Teil einer Kugelfläche aber eine offene Fläche.

Es gibt Flächen, welche durch eine unendlich ferne Linie begrenzt, oder durch eine unendlich ferne Linie in Teile zerlegt werden; diese Flächen gehören zu den **offenen**.

1030. **Wenn** *S* **auf der concaven Seite einer stetig gekrümmten Fläche** *F* **liegt, wie viele Tangenten kann man von** *S* **an die Fläche** *F* **ziehen?**

Unzählig viele Tangenten, wovon man sich am einfachsten durch **Versinnlichung der Tangenten** an irgend eine stetig gekrümmte Fläche überzeugt.

Zieht man durch *S* **alle möglichen** Tangenten an eine Fläche *F*, so bilden diese Tangenten zusammengenommen selbst

wieder eine Fläche F'; jede Gerade dieser Fläche F' berührt die Fläche F in einem Punkte, folglich berührt die Fläche F' die gegebene Fläche F längs einer Linie, welche wir die Umrisslinie oder auch kurzweg den Umriss oder die Contour der Fläche F für den Punkt S nennen wollen.

Würden z. B. in Fig. 128 alle durch S gehenden Tangenten die Fläche in Punkten der Linie $bPhe$ berühren, so wäre $bPhe$ für den Punkt S die Contour der Fläche.

1031. Wenn man an Stelle des Punktes S den optischen Mittelpunkt eines sehenden Auges versetzt, was sind jene Sehstralen, welche mit den von S an die Fläche F gezogenen Tangenten zusammenfallen?

Sie sind Sehstralen, welche durch die scheinbare Grenze der Fläche F gehen. Ihre Berührungsorte mit der Fläche sind Punkte, in welchen der von S aus sichtbare Teil der Fläche endet und der unsichtbare beginnt; also ist es ganz richtig, die Berührungslinie der Fläche F' mit F als (1030) Umriss oder Contour von F für den Punkt S, die Fläche F' aber als Umrissfläche aus S für die Fläche F zu bezeichnen.

1032. Wie construiert man an einer gegebenen stetig gekrümmten Fläche F für einen Punkt S den Umriss?

Wenn die Fläche vermöge ihrer Natur nicht specielle Methoden zur Construction eines Umrisses zulässt, dann zieht man durch den Punkt S eine beliebige Menge von geraden Linien $p, q, r, \ldots$, legt durch jede derselben eine die Fläche F schneidende Ebene, construiert nach (1026) die möglichen Flächentangenten und ermittelt ihre Berührungspunkte mit der Fläche F. Die der Natur der Fläche entsprechende Verbindung der erhaltenen Berührungspunkte durch eine Linie gibt die gesuchte Contour der Fläche F für den Punkt S.

Bei einer Kugel beispielsweise, ist für jeden auf der convexen Seite liegenden Punkt S die Umrisslinie ein Kreis.

1033. Wie construiert man den Umriss einer gegebenen Fläche F, wenn der unendlich ferne Punkt S durch eine Richtung s gegeben ist?

Man wählt mehrere gerade Linien parallel zur Richtung s, legt durch jede eine die Fläche F schneidende Hilfsebene, construiert ihren Schnitt mit der Fläche (1007) und zieht an den Schnitt Tangenten parallel zur gegebenen Richtung (749). Die

Berührungspunkte dieser Tangenten, durch eine der Natur der Fläche entsprechende Linie verbunden, geben den Umriss der Fläche F für den unendlich fernen Punkt S.

Bei einer Kugel geht die Ebene des Berührungskreises durch den Kugelmittelpunkt, wenn S im Unendlichen liegt (154).

1034. **Wie construiert man an eine Fläche F eine Tangentenebene, wenn diese durch einen gegebenen Punkt S ausserhalb der Fläche F gehen soll?**

Man zieht (Fig. 128) von S eine Tangente p an die Fläche F (1026) und findet einen Berührungspunkt P. Durch P construiert man noch eine Tangente q an die Fläche F (1023), alsdann geht durch p und q die gesuchte Tangentenebene (1025). Die Aufgabe lässt im Allgemeinen viele Auflösungen zu.

1035. **Wie construiert man an eine Fläche F eine Tangentenebene, welche durch eine gegebene Gerade p geht, wenn p die Fläche F nicht berührt?**

Man wählt in der Geraden zwei Punkte S und S', welche auf der convexen Seite von F liegen, und construiert für beide Punkte die Umrisse auf der Fläche F (1032). Ist P ein Schnittpunkt der beiden Umrisslinien, so tangiert die durch P und p gelegte Ebene u die Fläche F im Punkte P, weil SP und $S'P$ zwei durch P gehende Flächentangenten sind (1025). Schneiden sich die Umrisslinien nicht, so ist durch p keine Tangentenebene an die Fläche F möglich.

1036. **Wie construiert man an eine Fläche F eine Tangentenebene parallel zu einer gegebenen Ebene w?**

Man zieht in der Ebene w zwei beliebige, am besten nahezu unter einem rechten Winkel sich schneidende Gerade p, q, construiert für beide Richtungen die Umrisslinien auf der Fläche (1033) und legt, wenn P ein Schnittpunkt derselben ist, durch P eine Ebene w' parallel zu w, so muss w' die gesuchte Tangentenebene sein, weil durch P zwei Flächentangenten gehen, von welchen eine zu p, die andere zu q parallel ist.

1037. **Wie construiert man die einer Ebene w nächsten oder fernsten Punkte einer Fläche F?**

Man legt nach (1036) alle zu w parallelen Tangentenebenen an die Fläche F; ihre Berührungspunkte entsprechen der Aufgabe.

1038. **Wie construiert man in einem gegebenen Punkte P einer ebenen Curve w, die auf einer gegebenen Fläche F liegt, an die Curve eine Tangente?**

Man legt durch den Punkt P eine Tangentenebene an die Fläche; ihr Schnitt mit der Ebene w ist die gesuchte Tangente.

1039. Wann ist eine Fläche in einem Punkte S unstetig gekrümmt?

Wenn nicht alle durch diesen Punkt S gehenden Berührungsebenen (1015) mit jeder derselben einen verschwindend kleinen Winkel einschliessen, sondern wenn die Flächenwinkel von einigen dieser Berührungsebenen eine messbare Grösse annehmen.

1040. Besitzt eine Fläche F nur einen einzigen Punkt, in welchem sie unstetig gekrümmt ist, dann nennt man diesen Punkt eine Spitze der gekrümmten Fläche.

1041. Enthält aber eine Fläche F eine Linie, von der Beschaffenheit, dass die Fläche in jedem Punkte dieser Linie unstetig gekrümmt ist, dann nennt man dieselbe eine Kante der gekrümmten Fläche.

1042. Wenn in einer Kante einer krummen Fläche F ein Eck vorhanden ist (530), so bildet dasselbe auch ein Eck der krummen Fläche.

Eine Kugel besitzt weder Spitzen, noch Kanten, noch Ecken, weil sie sich in allen Punkten stetig krümmt.

1043. Was versteht man unter Flächen-Normalen?

Gerade Linien, welche in einem ihrer Durchschnittspunkte mit der Fläche F auf der Tangentenebene dieses Schnittpunktes senkrecht stehen. Man construiert in einem gegebenen Punkte P einer Fläche F eine Flächen-Normale N, wenn man in P auf die Tangentenebene des Punktes P (1025) ein Perpendikel errichtet (705).

1044. Wie construiert man parallel zu einer gegebenen Geraden p eine Normale an eine Fläche F?

Man legt irgend eine Ebene w senkrecht auf die Gerade p (705) und construiert parallel zur Ebene w eine Tangentenebene an die Fläche F (1036). Wird im Berührungspunkte P eine Gerade N parallel zu p gezogen, so ist N die gesuchte Normale.

A. Regelflächen.

a) Stralenflächen.

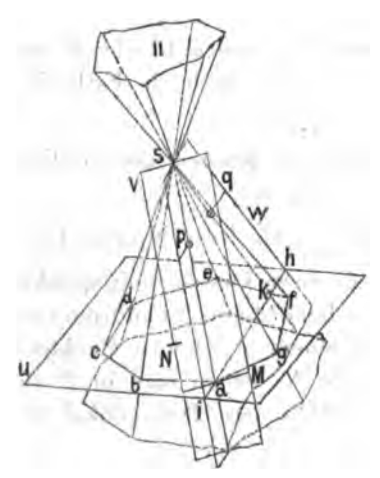
Begriff, Entstehungsweise, Einteilung und einige allgemeine Eigenschaften von Stralenflächen. Die wichtigsten Constructions-Eigenschaften der senkrechten Kreiskegelfläche.

§. 52.

1045. Was versteht man unter einem Stralenbündel?

Den Inbegriff aller Geraden (Stralen), die man durch einen Punkt S im Raume ziehen kann. S wird der Scheitel des Stralenbündels genannt. Liegt S im Unendlichen, so werden alle Stralen parallel, wodurch ein Parallel-Stralenbündel entsteht.

Fig. 129.



Jede durch den Scheitel eines Stralenbündels gehende Ebene enthält einen Stralenbüschel (283) des Stralenbündels; liegt der Scheitel im Unendlichen, so ist die Ebene zu den Stralen des Bündels parallel und enthält einen Parallel-Stralenbüschel des Parallel-Stralenbündels.

In jedem Stralenbündel liegen unzählig viele Stralenbüschel.

1046. Was verstehen wir unter einer Stralenfläche?

Eine aus Stralen eines Stralenbündels gebildete Fläche.

1047. Wie kann man eine Stralenfläche erzeugen?

Eine unbegrenzte gerade Linie p bewegt sich so weiter, dass sie stets durch einen festen Punkt S, den Scheitel der Stralenfläche geht, und dabei entweder eine gegebene Linie, die sogenannte Leitlinie, schneidet, oder eine gegebene Fläche F, die Leitfläche, tangiert.

Wie später gezeigt werden wird, können Stralenflächen auch durch andere Bedingungen erzeugt werden, bei welchen eine

Leitlinie oder eine Leitfläche nicht vorhanden zu sein braucht.

1048. Welche Eigentümlichkeit müssen wir an der Flächenform einer Stralenfläche bemerken?

Die Eigentümlichkeit, dass sie aus zwei Flächenteilen (Flächenmäntel genannt) bestehen, die im Scheitel S eine gemeinsame Grenze besitzen (Fig. 129). Die andere Grenze eines jeden Flächenmantels liegt im Unendlichen.

1049. Unter einer einfachen Stralenfläche soll immer eine Mantelfläche einer vollständigen Stralenfläche (Fig. 129, die also aus zwei einfachen Stralenflächen besteht) verstanden werden.

1050. Die Stralenflächen zerfallen in Central- und in Parallel-Stralenflächen, je nachdem der Scheitel S im Endlichen (Fig. 129) oder Unendlichen (Fig. 9, 17) liegt. Die Parallel-Stralenflächen bestehen nur aus einer Mantelfläche.

1051. Wie werden die Stralenflächen noch weiter eingeteilt?

Die Central-Stralenflächen zerfallen in Kegel- und Pyramidenflächen, die Parallel - Stralenflächen in Cylinder- (die innere Fläche in Fig. 9) und Prismenflächen. Kegel- und Cylinderflächen sind gekrümmte Stralenflächen, während Pyramiden- und Prismenflächen ungekrümmte Stralenflächen sind, welche aus einzelnen Teilen in Gestalt von ebenen Winkeln, oder in Gestalt von Parallelstreifen zusammengesetzt sind. Diese Teile nennt man Seitenflächen und den zwei aufeinanderfolgenden Seitenflächen gemeinsamen Stral, eine Kante der ungekrümmten Stralenfläche. Der Flächenwinkel von zwei in einer Kante zusammentreffenden Seitenebenen ist als Kantenwinkel zu bezeichnen.

1052. Ebenen, welche durch den Scheitel einer Stralenfläche gehen, sind als Scheitelebenen (v und w Fig. 129), alle übrigen Ebenen als Schnittebenen (u, Fig. 129) zu bezeichnen.

1053. Die Schnitte von Schnittebenen mit Kegel- und Cylinderflächen sind Curven (Fig. 130), mit Pyramiden- und Prismenflächen Polygone (Fig. 129); die Ecken der Polygone liegen in den Kanten der ungekrümmten Stralenflächen.

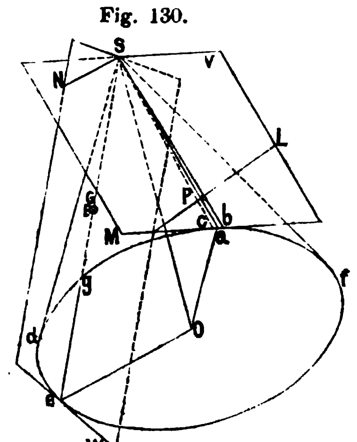
1054. Was verstehen wir unter einem Seitenelemente einer Stralenfläche?

Einen von zwei aneinanderliegenden Stralen gebildeten, also einen unendlich langen aber unendlich schmalen Teil einer Stralenfläche (*Sa*, *Sb*, Fig. 130). Im Scheitel der Stralenfläche liegt der Scheitel des Seitenelementes und ist die Breite desselben auf einen Punkt reduciert.

1055. Bei den gekrümmten Stralenflächen liegen je zwei aufeinanderfolgende Seitenelemente (*Sab* und *Sac*) in verschiedenen Ebenen, bei den ungekrümmten Stralenflächen hingegen liegt immer eine ganze Gruppe von aufeinanderfolgenden Seitenelementen in einer Ebene. Jede dieser Gruppen bildet eine Seitenfläche der ungekrümmten Stralenfläche (*Sab*, *Sbc*, ... Fig. 129).

1056. Ein jedes Seitenelement einer Stralenfläche besteht aus unendlich vielen Elementardreiecken (1014). Legt man daher durch ein einziges dieser Elementardreiecke (z. B. bei P in Fig. 130) eine Ebene, so liegen auch alle anderen Elementardreiecke des Seitenelementes in dieser Ebene.

Fig. 130.



1057. Berührt eine Ebene V eine Stralenfläche in einem Elementar-Dreiecke P, so berührt diese Ebene die Stralenfläche nach der ganzen Länge jenes Seitenelementes (*Sab*, Fig. 130), dem das Elementardreieck P angehört. Die Richtigkeit folgt aus (1056).

1058. Da zwei unendlich nahe Stralen einer Stralenfläche sinnlich nicht von einander unterschieden werden können (in Fig. 130 würden blos wegen der leichteren Erklärung die Stralen *Sa* und *Sb* von einander unterschieden), so wird das Seitenelement, in welchem eine Ebene eine Stralenfläche berührt, gewöhnlich als der Berührungsstral der Berührungsebene V betrachtet (*Sa*, Fig. 130), und man sagt: Jede Berührungsebene einer gekrümmten Stralenfläche berührt die letztere nach der ganzen Länge eines Flächenstrales.

1059. Ist der Schnitt einer gekrümmten Stralenfläche mit einer Schnittebene (1052) eine stetig gekrümmte Curve, so ist auch die Stralenfläche (Fig. 130) stetig gekrümmt (1017). Wenn demnach eine Ebene eine Stralenfläche in einem Punkte P

tangiert (1018), so muss sie die Stralenfläche auch in jedem Punkte des durch P gehenden Flächenstrales ($S a$) tangieren, wodurch für die grafischen Constructionen die Tangentenebene mit der Berührungsebene identisch wird (1057).

1060. Der durch einen Punkt P einer Stralenfläche gehende Flächenstral ist als eine Flächentangente für den Punkt P anzusehen, welcher die Eigenschaft besitzt, auch in allen seinen übrigen Punkten die Stralenfläche zu tangieren. Wenn es sich bei manchen Aufgaben darum handelt, durch einen Punkt P einer Stralenfläche zwei Flächentangenten zu legen, so kann immer der durch P gehende Flächenstral als eine dieser Tangenten angenommen werden.

1061. Wie construiert man in einem Punkte P einer ungekrümmten Stralenfläche eine tangierende Ebene?

Liegt der Punkt P in keiner Kante (1051), so ist die Seitenebene, in welcher P liegt, selbst die gesuchten Tangentenebene.

Liegt aber P in einer Kante (Fig. 129), so ist jede durch diese Kante gelegte unbegrenzte Ebene V, welche nicht in den von den Seitenebenen gebildeten einfachen Flächenwinkel (73) eindringt (wie dies von der Ebene w geschieht), eine Tangentenebene an die ungekrümmte Stralenfläche. Demzufolge kann man durch eine Kante einer ungekrümmten Stralenfläche unzählig viele Tangentenebenen legen.

1062. Führt man durch eine solche Kante auch noch alle möglichen unbegrenzten Ebenen, welche in den einfachen Flächenwinkel der Seitenebenen eindringen (wie w), so ergänzt die Gesammtheit dieser Ebenen die Gesammtheit der Tangentenebenen zu dem ganzen unendlichen Raum.

1063. Wenn ein Punkt (M oder N Fig. 129 und 130) ausserhalb einer ungekrümmten Stralenfläche eine solche Lage besitzt, dass durch ihn eine Tangentenebene V an die Stralenfläche gelegt werden kann (1061), dann sagt man der Punkt liege auf der convexen Seite der Stralenfläche.

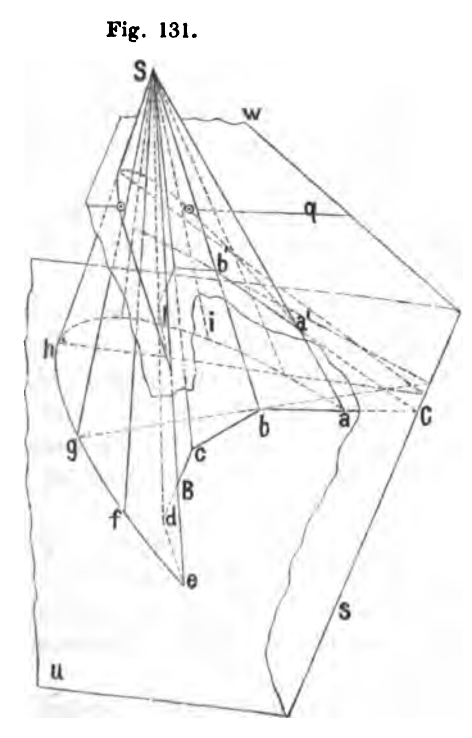
1064. Aus diesen Erklärungen geht hervor, dass man die Begriffe von Tangentenebenen und Tangenten auch auf die ebenflächig begrenzten Räume ausdehnen kann, und dass man demzufolge auch jede unbegrenzte Gerade (die durch Ma Fig. 129), die man in einer Polygonsebene u durch einen Eckpunkt a so

ziehen kann, dass sie nicht in den von den Polygonseiten gebildeten Winkel, welcher kleiner als $2R$ ist, eindringt, auch als eine Tangente an das ebene Polygon bezeichnen muss.

1065. Welche specielle Methode gibt es bei den Stralenflächen, um an sie Tangentenebenen zu legen?

Wenn irgend eine Tangentenebene an eine Stralenfläche gelegt werden soll, so ermittelt man den Stral der Fläche, längs welchem die Berührung erfolgen wird. Dieser Stral trifft die Basisebene in einem Punkte; durch diesen zieht man eine Tangente an die Basislinie und legt durch sie und den Berührungsstral eine Ebene, so ist diese die gesuchte Tangentenebene.

Fig. 131.



1066. Soll die Tangentenebene durch einen gegebenen Punkt L gehen, welcher ausserhalb der Stralenfläche liegt, so muss die durch L zum Scheitel S gezogene Gerade in der Tangentenebene liegen. Sucht man ihren Schnitt mit der Basisebene und zieht durch ihn Tangenten an die Basislinie, so geht durch jede dieser Tangenten und durch LS eine Tangentenebene.

1067. Liegt der Punkt L im Unendlichen, so ist L durch die Richtung einer Ge-raden l gegeben:

a) Bei Central-Stralenflächen zieht man durch den Scheitel S eine Parallele l' zu l und legt durch l' eine Tangentenebene wie in (1066).

b) Bei Parallel-Stralenflächen wählt man sich in der Basisebene u einen Punkt Q, zieht durch Q eine Gerade l' parallel zu l und durch irgend einen Punkt R' der Geraden l' eine Paralle zu den Stralen der Fläche. Diese Parallele erzeugt einen

Schnittpunkt R in der Ebene u, mithin ist QR der Schnitt einer Hilfsebene w mit der Basisebene u. Zieht man an die Basis der Parallel-Stralenfläche Tangenten parallel zu QR, so wird jede Ebene, die durch eine solche Tangente an die Stralenfläche tangierend gelegt wird, auch zur gegebenen Richtung parallel sein.

1068. Welche Beziehung besteht zwischen den Figuren, welche durch die Schnitte zweier beliebigen Schnittebenen u und w auf einer Stralenfläche entstehen?

Werden die Schnittpunkte (aa' Fig. 131) eines Flächenstrales mit den beiden Ebenen u und w als verwandte Punkte bezeichnet, so sieht man ein, dass von je zwei verwandten Punkten der ebenen Schnitte u und w jeder eine Projection des andern ist.

Ist s die Durchschnittsgerade der Ebenen u und w, und denkt man sich durch den Scheitel der Stralenfläche irgend eine mit der Stralenfläche in Verbindung stehende Ebene (Sab), so sieht man ein, dass die Durchschnitte dieser Ebene mit u und w (ab und $a'b'$) zwei verwandte Gerade sein müssen, die sich in s begegnen. Aus diesen Wahrnehmungen zieht man den Schluss:

Wird eine Stralenfläche von zwei Ebenen u und w geschnitten, so liegen beide Schnitte perspectivisch-collinear; der Scheitel der Stralenfläche ist das Centrum und die Durchschnittslinie s der Schnittebenen u und w die Begegnungsgerade der perspectivischen Lage.

1069. Bei Cylinder- und Prismenflächen liegen die ebenen Schnitte perspectivisch affin, weil das Centrum S im Unendlichen liegt.

1070. Sind die Schnittebenen u und w parallel, so werden die Schnitte bei Kegel- und Pyramidenflächen perspectivisch ähnlich, bei Cylinder- und Prismenflächen perspectivisch-congruent.

1071. Wenn man zwei ebene Schnitte u und w einer Stralenfläche abbildet, in welcher Beziehung müssen in jeder Bildebene die Projectionen der Schnittfiguren zu einander stehen?

Sie liegen im Allgemeinen perspectivisch - collinear (§. 12). Das Bild des Scheitels der Stralenfläche ist das Centrum, und das Bild der Durchschnittsgeraden s der Schnittebenen u und w die Begegnungsgerade der perspectivischen Lage.

Um dies einzusehen, denken wir uns (Fig. 131) zwei Seiten ab und $a'b'$ der Schnitte, welche von den Ebenen u und w auf der Stralenfläche, deren Scheitel S ist, erzeugt werden, so ist jede der beiden Geraden ab und $a'b'$ eine directe Projection der andern (1068) aus dem Scheitel S und ihr Schnittpunkt C liegt in der Schnittgeraden s der Ebenen u und w. Wird nun die Stralenfläche S sammt den ebenen Schnitten u und w, z. B. orthogonal auf der Bildebene I abgebildet, so werden von S, s, ab und $a'b'$ die Bilder S_1, s_1, $a_1 b_1$, $a'_1 b'_1$ entstehen, und nun ist klar, dass die drei Bilder S_1, a_1, a'_1 in einer geraden Linie liegen müssen, weil im Raume die drei Punkte S, a und a' ja auch in einer geraden Linie liegen. Es liegen also die Bilder von je zwei verwandten Schnittpunkten aa' mit dem Bilde vom Scheitel S perspectivisch.

Die Bilder $a_1 b_1$, $a'_1 b'_1$ verlängert, schneiden sich in einem Punkte C_1 der Geraden s_1, weil im Raume die Geraden ab und $a'b'$ sich im Punkte C der Geraden s begegnen; mithin ist das Bild der Schnittgeraden s der Ebenen u und w die Begegnungsgerade für die Bilder der Schnitte, welche die Ebenen u und w auf der Stralenfläche S erzeugen.

(Die Fig. 131, welche selbst eine Projection der gedachten Stralenfläche und ihrer ebenen Schnitte u und w ist, bestätigt gleichfalls die ausgesprochene Behauptung der perspectivischen Lage der Schnittbilder.)

1072. Fällt das Bild von S in unendliche Entfernung, so liegen die Bilder der ebenen Schnitte u und w perspectivisch-affin (Fig. 17); fällt nur das Bild der Durchschnittsgeraden u und w in's Unendliche, so werden die Bilder der Schnitte u und w perspectivisch ähnlich (Fig. 10); und fallen sowol vom Scheitel S als auch von der Schnittgeraden s die Bilder ins Unendliche, so liegen die Bilder der ebenen Schnitte u und w perspectivisch congruent (Fig. 9).

1073. Wie entsteht eine senkrechte Kreiskegelfläche?

Ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte O (Fig. 130), die Leitlinie einer Stralenfläche mit dem Scheitel S und steht SO auf der Kreisebene senkrecht (94), so ist die Stralenfläche eine senkrechte Kreiskegelfläche und SO die Axe derselben; ist aber SO zur Kreisebene geneigt, so wird die Kreiskegelfläche eine schiefe genannt (SO ist dann keine Axe).

1074. Eine senkrechte Kreiskegelfläche entsteht auch durch die Drehung eines Winkelschenkels um den zweiten Schenkel (802). Alle zur Kegelaxe senkrechten Ebenen durchschneiden die senkrechte Kreiskegelfläche in Parallelkreisen. Wird eine derartige Kegelfläche durch die Spitze und einen Parallelkreis begrenzt, so entsteht ein begrenzter Raum, der senkrechte Kreiskegel.

1075. Wird ein Kreis zur Leitlinie einer Parallel-Stralenfläche gewählt, so entsteht ein Kreis - Cylinder. Jenachdem die Stralen zur Kreisebene schief oder senkrecht stehen, ist er ein schiefer oder senkrechter Kreis-Cylinder.

1076. Welches sind die wichtigsten Constructions-Eigenschaften eines senkrechten Kreiskegels?

1. Alle Flächenstralen haben einerlei Neigung zur Kegelaxe ($\sphericalangle aSO = \sphericalangle eSO = \ldots$) (Fig. 130).

2. Alle Flächenstralen haben gegen sämmtliche Kreisebenen des Kegels gleiche Neigung ($\sphericalangle SaO = \sphericalangle SeO = \ldots$), welche die Neigung der Flächenstralen zu einem rechten Winkel ergänzt. ($\sphericalangle SeO + \sphericalangle OSe = R$).

3. Alle Tangentenebenen haben zur Kegelaxe dieselbe Neigung, wie die Flächenstralen ($\sphericalangle [w, SO] = \sphericalangle [eSO]$).

4. Alle Tangentenebenen haben zu den Kreisebenen des Kegels ebenfalls dieselbe Neigung wie die Flächenstralen ($\sphericalangle [w, u] = \sphericalangle [SeO]$).

5. Alle Periferiepunkte desselben Parallelkreises der senkrechten Kegelfläche besitzen einerlei Entfernung vom Scheitel derselben ($Sa = Sb = Se = \ldots$)

6. Jede Gerade, welche in irgend einem Punkte eine Normale (1043) zur Kegelfläche ist, schneidet die Kegelaxe.

7. Zieht man durch alle Punkte eines Parallelkreises Normalen zur Kegelfläche, so schneiden sich diese in demselben Punkte der Kegelaxe und bilden einen neuen senkrechten Kreiskegel. Jeder dieser beiden Kegel ist ein Normalenkegel des andern.

8. Jede Kugel, deren Centrum irgendwo in der Axe eines senkrechten Kreiskegels liegt, schneidet letzteren in zwei Kreisen. Wird der Kugelradius zu klein, so schneidet die Kugel den Kegel nicht (man sagt, die Kreisschnitte seien imaginär). Fallen aber die beiden Kreise unendlich nahe aneinander, dann ist die zwischen beiden Kreisen liegende unendlich schmale Zone

der Kugelfläche und der Kegelfläche gemeinsam, d. h. Kugel- und Kegelfläche berühren sich in einem Kreise.

9. Dreht sich ein Kreis mit einer Tangente um einen Durchmesser, so erzeugt der Kreis eine Kugel, die Tangente eine sie umhüllende (berührende) senkrechte Kreiskegelfläche.

10. Ist die Tangente zum Durchmesser (Drehungsaxe) parallel, so entsteht ein die Kugel umhüllender senkrechter Kreis-Cylinder.

Abbildung von Stralenflächen und ihrer ebenen Schnitte. Construction von Decklinien. Schnitte von Linien mit Stralenflächen abzubilden.

§. 53.

1077. Um eine Stralenfläche abzubilden (1001) wird man gewöhnlich von einem ebenen Schnitte ($adef$) und vom Scheitel S der Stralenfläche (Fig. 130), oder von zwei ebenen Schnitten der Stralenfläche (Fig. 9) die Bilder suchen, und mehrere Punkte des Schnittbildes mit dem Bilde des Scheitels S durch gerade Linien verbinden, welche offenbar die Projectionen von einigen Stralen der Stralenfläche sein müssen.

1078. Zieht man die Bilder dieser Stralen nur vom Bilde S des Scheitels S bis an die Projection des ebenen Schnittes, oder wenn zwei ebene Schnitte der Stralenfläche abgebildet sind, vom Bilde des einen Schnittes bis zum verwandten Punkte im Bilde des zweiten Schnittes (Fig. 9), so erhält man eine Abbildung von einem begrenzten Stücke der Stralenfläche, also eine Abbildung von einem Kegel, einer Pyramide, einem Cylinder oder einem Prisma.

In Fig. 129 ist eine Pyramidenfläche so dargestellt, dass wir uns dieselbe nach beiden Seiten in's Unendliche verlängert denken sollen; die Zeichnung stellt daher das Bild einer unbegrenzten Stralenfläche vor.

1079. Welches ist der Weg, den man bei der Abbildung einer begrenzten Stralenfläche einschlagen wird?

1. Man wird eine Ebene u annehmen (Fig. 131), in welcher die Basislinie der Stralenfläche liegen soll;

2. die Basislinie abbilden ($abc..hia$);

3. das Bild (oder wenn man mehrere Bilder der Stralenfläche zeichnet, die Bilder) des Scheitels S aufsuchen;

4. beurteilen, ob der begrenzte Teil der Basisebene dem projicierenden Auge sichtbar oder unsichtbar ist; endlich

5. die Bilder der Projections-Contour (1031) und einiger sichtbarer, sowie unsichtbarer Stralen der Fläche darstellen.

1080. Welche Bestimmungsstücke einer Basisebene wird man abbilden, um die Basislinie orthogonal möglichst leicht construieren zu können?

Es ist zwar recht bequem zu arbeiten, wenn man von der Basisebene *u* beide Spuren zur Verfügung haben kann, aber gewöhnlich noch besser ist es, von der Ebene *u* eine Spur (z. B. u_1) und eine mit ihr gleichlaufende Spurparallele *p* abzubilden (Fig. 66).

Sind beide Spuren gegeben, so kann man trotzdem noch eine Spurparallele abbilden (Fig. 68); sind aber keine Spuren der Ebene *u* gegeben, so sucht man entweder eine Spur und eine ihr gleichlaufende Spurparallele, oder wenn es zu umständlich wird, die Spur zu construieren, so ermittelt man zwei gleichlaufende Spurparallele.

1081. Wie verfährt man, um die Basislinie abzubilden?

Man zeichnet in einer Bildebene die Basislinie in wahrer Gestalt (Fig. 91) und projiciert sie congruent auf die Basisebene *u* (739).

1082. Wie findet man den Scheitel *S* der Stralenfläche?

Wenn die Stralenfläche eine willkürliche ist, so kann man *S* ganz beliebig annehmen, nur darf *S* nicht in der Basisebene *u* liegen.

Wenn man daher bei orthogonalen Projectionen von *S* zwei zugeordnete Bilder beliebig annimmt, so muss man noch vor der Abbildung der Flächenstralen untersuchen, ob auch der Punkt *S* ausserhalb der Basisebene *u* liegt (680, 682).

Ist aber *S* nicht beliebig, so muss *S* den gegebenen Bedingungen gemäss abgebildet werden.

1083. Wie wird man beurteilen, ob der begrenzte Teil der Basisebene dem projicierenden Auge sichtbar oder unsichtbar ist?

Wenn das projicierende Auge und der Scheitel der begrenzten Stralenfläche auf einerlei Seite der Basisebene liegen, so kann das projicierende Auge die begrenzte Basisebene nicht

sehen, weil sie von der Stralenfläche verdeckt wird; wenn hingegen der Scheitel und das projicierende Auge auf verschiedenen Seiten der begrenzten Basisebene liegen, so sieht das Auge die begrenzte Basisebene.

Bei der Abbildung in Fig. 131 liegen das projicierende Auge und der Raumpunkt S auf derselben Seite der Basisebene u, folglich ist von der begrenzten Basisebene die Fläche nicht zu sehen, mithin muss die Linie von h über i bis a, so wie von B über d bis e gestrichelt werden.

Bei der in Fig. 130 abgebildeten Kegelfläche liegen das projicierende Auge und der Scheitel S auf entgegengesetzten Seiten der Basisebene. Der begrenzte Teil der letzteren ist daher dem projicierenden Auge sichtbar, also muss auch das Bild dem entsprechend gezeichnet werden. Denkt man sich die Basisebene durchsichtig, so werden die Stralen der dem Auge abgewendeten Fläche dennoch teilweise sichtbar, wie dies an dem Strale Se bemerkbar gemacht wurde.

1084. Jeder Raum, der von einem ausser ihm liegenden Auge projiciert wird, zeigt diesem Auge nur einen Teil seiner Oberfläche (1031), die Grenze dieses sichtbaren Teiles wird nun Projections-Contour genannt, wenn dasselbe Auge diese Grenzen des Raumes auf die Bildebene projiciert. Bei den orthogonalen Projectionen müssen wir demnach an jedem der Abbildung unterzogenen Gegenstande ebensoviele Projections-Contouren unterscheiden, als Projections-Centra vorhanden sind. Desshalb können wir von einer ersten, zweiten, dritten Projections-Contour (kurzweg ersten, zweiten, dritten Contour, . . .) sprechen, jenachdem sie sich auf das projicierende Auge I, II, III, ... bezieht.

1085. Die Projections-Contour auf die Bildebene aus jenem Auge projiciert, für welches sie Contour ist, gibt die Bild-Contour, d. i. den Umriss des Bildes vom abgebildeten Objecte. In Fig. 131 ist $SabcBefghSB$ das Bild der Projections-Contour einer nur teilweise gekrümmten Stralenfläche, denn alle die Teile der genannten Linie sind Bilder von solchen Linienstücken der Stralenfläche, welche dem auf die Bildebene projicierenden Auge die sichtbare Fläche von der unsichtbaren trennen.

Unter dem Umriss eines Bildes ist demnach nicht bloss der äusserste Umfang zu verstehen, wie z. B. $SdefS$ in Fig. 130, sondern überhaupt das Bild aller Linien eines Gebildes,

welche die dem Auge sichtbaren Teile von den unsichtbaren trennen. Also gehört in Fig. 131 die Strecke *SB* auch zum Umriss des dargestellten Stralengebildes.

1086. Wie erhält man die Contour des Bildes einer begrenzten Stralenfläche?

Zieht man (Fig. 130) vom Bilde *S* des Scheitels *S* Tangenten *Sd*, *Sf*) an das Bild der Basislinie, so sind diese Tangenten die geradlinige Contour des Bildes der Stralenfläche. Die krummlinige Contour (*def*) ist ein Teil vom Bilde der Basislinie, und reicht von der einen geradlinigen Contour bis zur anderen.

In Fig. 131 ist das Bild der Basislinie zum Teil eine Curve zum Teil ein Polygon. Nach dem erweiterten Begriffe einer Tangente (1064), kann man von *S* aus vier Tangenten an die Basislinie ziehen, von welchen *Sh* die Curve berührt, während *Sa*, *Sd*, *Se*, die Basislinie blos in Ecken *a*, *d* und *e* tangiren. Von diesen vier Tangenten hat *Sd* eine besondere Bedeutung, sie ist nämlich das Bild eines unsichtbaren Umrisses der Stralenfläche. Denn denken wir uns im Raume den Teil *Sef* der Stralenfläche weg, so wird augenblicklich die Ebene *Sed* sichtbar und bildet *Sd* im Raume sofort einen sichtbaren Umriss. Da sonach *Sd* ein wirklicher Umriss der Stralenfläche ist, welcher nur in Folge der weiteren Gestaltung der Fläche dem Auge entzogen wird, so liegt in der Bezeichnung unsichtbarer Umriss kein Widerspruch.

1087. Liegt das Bild des Scheitels einer Stralenfläche im Innern des Bildes einer geschlossenen ebenen Basislinie einer Stralenfläche oder auch im Bilde der Basislinie selbst, dann ist blos das Bild der Basislinie der Umriss vom Bilde der Stralenfläche.

1088. Wenn eine Seitenebene einer Stralenfläche bei ihrer Erweiterung durch das projicierende Auge gehen würde, dann ist das Bild dieser Seitenebene eine gerade Linie (Nullseite), die dem Umrisse vom Bilde der Stralenfläche angehört.

1089. Wie wird man den Schnitt einer Ebene *w* mit einer Stralenfläche abbilden?

a) Geht die Ebene *w* durch den Scheitel *S*, wie in Fig. 129, so muss man ihre Schnittlinie *hi* mit der Basisebene *u* suchen (§. 38). Diese Schnittlinie trifft die Basislinie entweder gar nicht oder in einigen Punkten, z. B. in *a* und *k*, folglich sind *Sa*, *Sk* die Schnitte von *w* mit der Stralenfläche.

b) Ist die Ebene *w* keine Scheitelebene (Fig. 131), so sucht man die Bilder der Schnitte von hinreichend vielen Stralen (*Sa*, *Sb*, *Sc*, ... *Si*, ...) der Fläche mit der Ebene *w*, und verbindet sie nach ihrer natürlichen Reihenfolge. Dabei ist stets zu beachten, dass das Bild des ebenen Schnittes *w* mit dem Bilde der Basislinie *u* perspectivisch liegt (1068). Kann man daher das Bild *s* der Schnittgeraden von *u* mit *w* auf der Zeichnung noch erhalten, so wird man viele Punkte des Schnittes von *w* mit der Stralenfläche mit Hilfe der perspectivischen Collineation abbilden können, wodurch oft eine bedeutende Vereinfachung der Construction entstehen wird.

Der Lernende zeichne sich zugeordnete Abbildungen von Stralenflächen und eine schneidende Ebene *w* durch ihre Spuren, oder sonstwie gegeben auf, und construiere die Schnittbilder, wobei (692) zur Anwendung kommen wird.

1090. Wie construiert man den Schnitt einer Geraden *q* mit einer Stralenfläche.

Man legt durch die Gerade *q* (Fig. 131) eine Ebene *w* und sucht deren Schnittlinie mit der Stralenfläche. In den Punkten, in welchen diese Schnittlinie von der Gerade *q* getroffen wird, durchschneidet die Gerade *q* die Stralenfläche.

1091. Am einfachsten ist es in vielen Fällen, die Ebene *w* durch die Gerade *q* und den Scheitel *S* der Stralenfläche zu legen (Fig. 129), weil die Schnitte von *w* mit der Stralenfläche Flächenstralen werden.

1092. Bei orthogonalen Abbildungen, wenn zwei zugeordnete Bilder der Stralenfläche und der Geraden *q* gegeben sind, betrachte man das Bild von *q* als Nullseite von *w* (609); alsdann ist die Schnittlinie von *w* mit der Stralenfläche ebenfalls sehr leicht zu construieren (Fig. 82).

1093. Es ist von einem Punkte einer Stralenfläche sein Bild (*E* Fig. 130) gegeben. Es soll der Stral abgebildet werden, auf welchem *E* liegt.

Verbindet man das Bild *E* des Raumpunktes *E* mit dem Bilde *S* des Scheitels *S*, so wird *SE* das Bild der Basislinie in einem Punkte *e* schneiden, mithin ist *Se* jener Stral, auf welchem der gegebene Punkt *E* liegt.

Schneidet *SE* die Basislinie noch in einem Punkte, z. B. *g*, so kann *E* auch auf dem Strale *Sg* liegen. Setzt man bei der Annahme des Punktes *E* die Bedingung hinzu, *E* soll auf der

dem Auge abgewendeten Seite der Stralenfläche liegen, dann gibt es keinen Zweifel mehr, dass E auf dem Strale Se liegt.

1094. Was verstehen wir unter Deckstralen einer Stralenfläche?

Jene Stralen der Stralenfläche, welche mit dem projicierenden Auge in einer und derselben Ebene liegen. In Fig. 130 sind Se und Sg zwei Deckstralen (Sg wurde nicht gezeichnet, weil sonst die Strecke Sg auch voll zu ziehen gewesen wäre). In Fig. 131 liegen in der durch Se gehenden Sehebene drei Deckstralen, nämlich Se, SB (in der Ebene Scd) und noch ein Stral Sl auf der gekrümmten Fläche.

1095. Wenn man eine Stralenfläche auf mehreren zugeordneten Bildebenen abbildet, dann werden die Deckstralen noch mit der Nummer des projicierenden Auges näher bezeichnet. Es ist eine selbstverständliche Sache, dass Flächenstralen, welche für ein projicierendes Auge Deckstralen sind, für das zugeordnete Auge nicht mehr Deckstralen sein können. Wenn daher die Zeichnung der Fig. 131, z. B. die zweite Projection einer Stralenfläche wäre, und man würde eine Bildebene III der Bildebene II zuordnen, so könnten die dritten Bilder von Se, SB und Sl nicht mehr in einer geraden Linie liegen (den Fall ausgenommen, wenn die Ebene der Deckstralen eine Ordinatenebene wird). Ebenso würden die zu Se und Sg zugeordneten Bilder in Fig. 130 zwei getrennte Linien sein und würde das zugeordnete Bild zu E in dem zugeordneten Bilde zu Se liegen.

1096. Was verstehen wir unter Deckpunkten einer Stralenfläche?

Jene Punkte der Stralenfläche, welche ein gemeinsames Bild besitzen. Wenn z. B. in Fig. 130 E ein Punkt im Flächenstrale Se und G ein Punkt im Flächenstrale Sg ist, so sind die Raumpunkte E und G Deckpunkte der Stralenfläche, weil ihre Bilder E und G in einem Punkte vereinigt sind. Construiert man zu Fig. 130 das zugeordnete Bild, so werden die zugeordneten Bilder zu E und G offenbar getrennt liegen, weil die Raumpunkte E und G für das neue projicierende Auge nicht mehr in einerlei Sehstral liegen.

Man kann nun auch untersuchen, ob ein gegebener Punkt auf einer Stralenfläche liegt, indem man jenen Flächenpunkt construiert, welcher zu dem gegebenen Punkte ein Deckpunkt ist. Fallen in der zugeordneten Bildebene die Bilder des Deck-

und des gegebenen Punktes **nicht** zusammen, so liegt auch der gegebene Punkt nicht auf der Stralenfläche.

1097. **Wie wird man den Schnitt einer gegebenen krummen Linie L mit einer Stralenfläche $Sabca$ ermitteln?**

Man kann zwei Methoden zur Anwendung bringen.

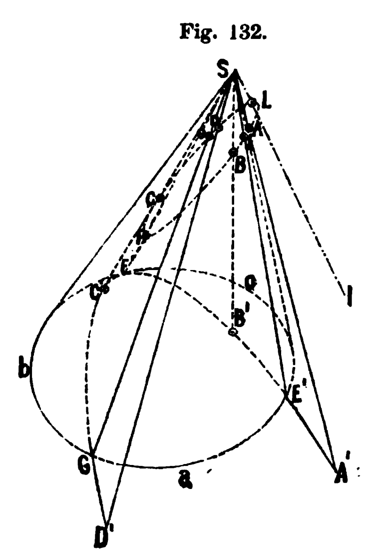


Fig. 132.

a) Man wählt sich in der Linie L, Fig. 132, eine hinreichende Anzahl von Punkten $ABCD$ ... (die übrigen Punkte, die in Fig. 132 noch gewählt wurden, blieben der Deutlichkeit der Zeichnung wegen weg) und projiciert sie aus dem Scheitel S der Stralenfläche auf die Basisebene u nach $A'B'C'D'$ ... Verbindet man alle Projectionen in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge zu einer stetigen Linie, so kann man diese als den Schnitt einer durch die gegebene Linie L und den Scheitel S gelegten **Hilfsstralenfläche** mit der Basisebene u ansehen. (Wie dieser Schnitt construiert werden kann, wird später gelehrt.) Beide Basislinien schneiden sich in E', F' und G', folglich sind SE', SF' und SG' die Schnittstralen beider Stralenflächen, woraus folgt, dass E, F und G die Schnitte der gegebenen Linie L mit der gegebenen Stralenfläche $Sabca$ sind.

Es zeigt sich in Fig. 132 die weitere Eigentümlichkeit, dass die Basislinie $abcd$ von der centralen Projection $A'B'C'D'$ der gegebenen Linie L im Punkte F' berührt wird, woraus folgt, dass sich beide Stralenflächen $Sabca$ und $SA'B'C'G'D'$ längs des Strales SF' berühren. Da die Linie L auf der Stralenfläche $SA'B'C'G'D'$, liegt, so muss auch L die Stralenfläche $Sabca$ in F berühren.

Von der Linie L liegt ein Teil $EALDG$ auf der convexen Seite der Stralenfläche dem projicierenden Auge zugewendet und ist demnach voll zu ziehen, während $EBFCG$ zu stricheln ist.

Anmerkung. Bei dem Entwurfe der Zeichnung Fig. 132 wurde die Basislinie $abca$ beliebig angenommen, ebenso auch S beliebig gewählt. Die Linie L wurde als das Bild einer **ebenen**

Curve vorausgesetzt. In L wurden dann drei Punkte A, B und C beliebig gewählt, die Stralen SA, SB, SC gezogen und in ihnen die Punkte A', B', C' wieder beliebig angenommen. Setzt man voraus, dass $A' B' C'$ die centralen Projectionen der Punkte A, B, C auf der Basisebene $u = abca$ sind, so kann man ABC und $A'B'C'$ als zwei perspectivisch-colliniear liegende Dreiecke ansehen und die Begegnungsgerade β suchen (sie wurde in der Zeichnung weggelassen). Ist β gefunden, dann kann man nach den Gesetzen der perspectivischen Collineation noch eine beliebige Menge von Punkten der Curve $A'B'C'D'$ suchen und diese zeichnen. Das Uebrige versteht sich nun von selbst.

Bei der Construction zeigte sich ferner, dass die Linie L von der ihrem Systeme angehörenden Verschwindungsgeraden (328) im Punkte L berührt wurde, woraus wir schliessen, dass die Curve $A'B'C'D'$ einen unendlich fernen Punkt besitzt, sich also nicht schliessen kann.

Wenn ferner die Linie L nicht ganz beliebig, sondern als eine Ellipse angenommen wird, so ergibt sich hieraus, dass die Curve $A'B'C'D'$ eine Parabel sein muss, deren Axe mit SL parallel läuft.

Denkt man sich die Ellipse L sei das Bild eines im Raume liegenden Kreises, welcher aus dem Scheitel S auf die Basisebene u projiciert wird, so sieht man ein, dass sich der Kreis als Parabel projiciert, dass daher die durch den Scheitel S zur Basisebene u parallel gelegte Ebene den Kreis in einem Punkte tangiert, dessen Bild im Punkte L liegt.

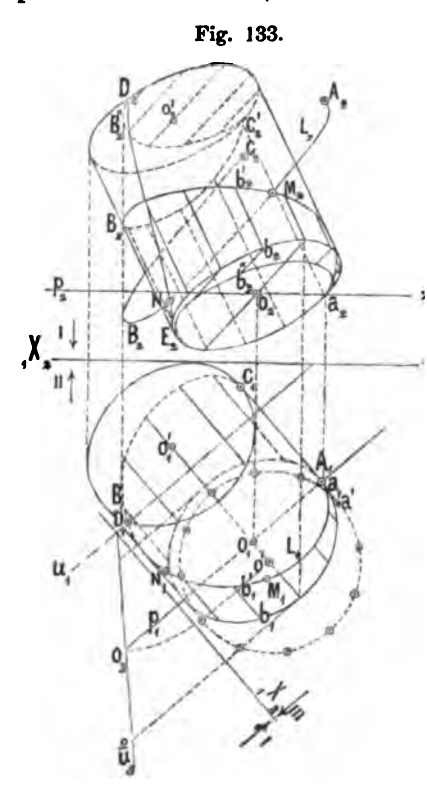
b) Die zweite Methode, den Schnitt einer Linie L mit einer Stralenfläche zu bestimmen, besteht darin, zu einem Bilde der Linie alle Deckpunkte auf der Stralenfläche aufzusuchen und diese in ihrer natürlichen Reihenfolge zu einem Bilde der Decklinie zu verbinden. Die Schnitte der Decklinie mit der gegebenen Linie, sind gleichzeitig auch die Schnitte der gegebenen Linie mit der Stralenfläche.

In Fig. 133 sind $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ die zugeordneten Bilder einer beliebigen Linie L. Ein Cylinder ist ebenfalls durch zwei zugeordnete Projectionen gegeben. Man soll die Schnittpunkte M, N, ... der Linie L mit der Cylinderfläche abbilden.

Des Verständnisses der Zeichnung wegen soll ihr allmäliges Zustandekommen gleichzeitig mitbeschrieben werden. Es wurde u_1 und $p_1 p_2$ als eine mit u_1 gleichlaufende Spurparallele der

Ebene u angenommen. In $p_1 p_2$ wurde $o_1 o_2$ als Kreismittelpunkt o gewählt und das Verlangen gestellt, einen senkrechten Kreiscylinder abzubilden, dessen eine Basis in der Ebene u liegt und dessen zweite Basis zur ersten in einem gegebenen Abstande oo' parallel sein soll. Aus diesem Verlangen geht hervor, dass die Stralen der Cylinderfläche mit einer dritten Bildebene III werden parallel sein müssen, die man senkrecht auf $\bar{u}_1$ stellt. Es wurden daher ${}_1X_3$ senkrecht zu $\bar{u}_1$ gezogen und die Sehpfeile I und III gezeichnet.

Fig. 133.



Da $o_1 o_2$ gegeben, so konnte man o_3 suchen, die Nullseite $\overset{\circ}{\bar{u}}_3$ darstellen, von o_3 rechts und links die wahre Länge des Kreishalbmessers r auftragen und hiedurch die kleine Axe vom ersten Kreisbilde darstellen, wie dies die zu ${}_1X_3$ gezogenen Ordinalen angeben. Der mit $\bar{u}_1$ parallele Durchmesser projiciert sich im ersten Bilde in unveränderter Länge, d. i. in $2 . o_1 a_1 = 2r$, womit man von der in der Bildebene I entstehenden Ellipse die beiden Axen besitzt, und daher auch die Ellipse als erstes Bild der unteren Basis zeichnen kann.

Mit Hilfe der dritten Bilder findet man die den ersten Bildern der besprochenen zwei aufeinander senkrechten Durchmesser zugeordneten zweiten Bilder, welche zwei conjugierte Durchmesser des zweiten Bildes der unteren Kreisbasis geben, wie dies die Figur zeigt. (Will der Construierende seine Zeichnung nicht mit zu vielen Bleilinien überladen, so zeichnet er auf einem Nebenblatte die conjugierten Durchmesser in ihrer genauen gegenseitigen Lage auf, construiert mit aller Sorgfalt die Ellipsen nach den bekannten Methoden der Figuren 37, 38, schneidet sie mit einer scharfen Schere genau aus dem steifen Papiere heraus, legt die so erhaltenen Modelle

mit den conjugierten Durchmessern auf die conjugierten Durchmesser der Zeichnung und umfährt mit einem gut gespitzten Bleistifte die Schablone).

Nachdem die untere Kreisbasis abgebildet, zieht man in der zweiten und dritten Bildebene die Bilder der Cylinderaxe (705) und trägt (707) in der Bildebene III die gegebene Länge der Axe $o\,o'$ von o_3 nach o'_3 auf (o'_3 wurde in Fig. 133 wegen Raumersparnis wieder weggelassen), bestimmt o'_1 aus o'_3 durch eine Ordinale zu ${}_1X_3$ und ermittelt auch o'_2 (562).

Bedenkt man, dass in jeder Bildebene die Bilder der beiden Basislinien perspectivisch congruent liegen müssen (1070), (indem sowol vom Scheitel der Stralenfläche als auch von der Durchschnittsgeraden der beiden Basisebenen die Bilder in's Unendliche fallen), so kann man durch o'_1 und o'_2 conjugierte Durchmesser parallel zu den durch $o_1\,o_2$ gehenden ziehen, die Schablone anlegen und die Bilder der oberen Basis durch reine Bleilinien darstellen; oder man verfährt nach (195).

Bei einer Probe müssen die Ordinalen, welche das erste Bild der Basislinie berühren, auch das zweite Bild tangieren. Diese Probe wolle der Lernende niemals unterlassen, weil, wenn sie nicht zutrifft, bei den folgenden Constructionen die Zeichnung sicher verdorben wird.

Nun wurde die Linie $L_1\,L_2$ angenommen. Man hätte L_1 allerdings ganz beliebig zeichnen können; indessen wurde L_1 so angenommen, dass es in einem Punkte a_1 im Bilde der unteren Basislinie beginnt, die Contour des Cylindergebildes links berührt, und in einem Punkte des Bildes der oberen Basislinie bei C_1 schliesst. Das zweite Bild L_2 wurde ganz willkürlich gewählt, nur mussten die Ordinaltangenten sowie auch berücksichtigt werden, dass $A_1\,A_2$, $C_1\,C_2$ in Ordinalen liegen.

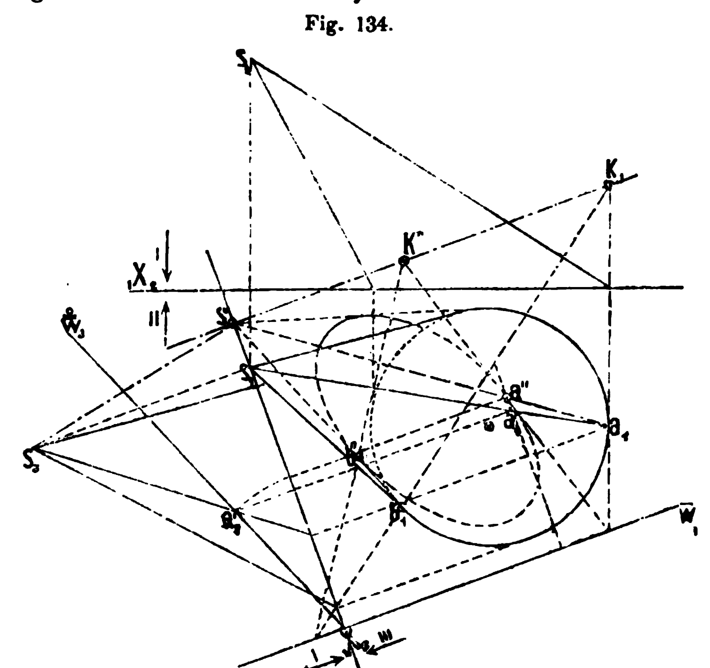
Um jetzt zu dem ersten Bilde L_1 auf der Cylinderfläche die Decklinien zu erhalten, wähle man in L_1 einen beliebigen Punkt b'_1, den man als das Bild eines Punktes der Cylinderfläche betrachtet und bildet nach (1093) den durch sie gehenden Flächenstral, welcher die untere Basislinie in $b_1\,b_2$ schneidet, in beiden Bildebenen ab, so ergibt sich in einer Ordinale durch b'_1 der Punkt b'_2.

Das Bild b'_1 liegt noch innerhalb des ersten Bildes der unteren Basis, mithin muss auch zu b'_1 ein Deckpunkt in der unteren Basisebene liegen, wesshalb durch b_2 das zweite Bild

einer Deckgeraden gezeichnet wird, deren erstes Bild in dem durch b'_1 gehenden Bilde eines Cylinderstrales liegt; in jenem Bilde befindet sich vom zweiten Deckpunkt b'' das Bild b''_2.

Um eine Ordnung in das Aufsuchen der Deckpunkte zu bringen, wurde die (punktierte) erste Congruenz - Projection der unteren Basis gezeichnet, von a' aus die Periferie in zwölf gleiche Teile geteilt und die Bilder der Cylinderstralen durch diese Punkte

Fig. 134.



soweit gezogen, bis sie L_1 trafen. Gleichzeitig wurden auch in der oberen Basisebene Deckgerade (im ersten Bilde voll, im zweiten Bilde gestrichelt) gezogen und in ihnen die Deckpunkte bestimmt.

Nach ganz genauer Beachtung aller möglichen Deckpunkte wurde zu L_1 folgende Decklinie gefunden:

1. Von $a_1 a_2$ aus über die obere Seite der Mantelfläche fort, um die Projections - Contouren herum bis zur oberen Basislinie ($a_1 b'_1 \ldots C_1$, $a_2 b'_2 B_2 C'_2$);

2. von $C_1 C'_2$ in der oberen Basisebene über $B_1 B''_2$ bis $D_1 D_2$;

3. von $D_1 D_2$ an der Mantelfläche des Cylinders herab bis zur unteren Basislinie nach $E_1 E_2$ (E_1 wurde wegen Mangel an Raum weggelassen); und

4. von $E_1 E_2$ in der unteren Basisebene bis zum Ausgangspunkte $a_1 a_2$ zurück.

Verfolgt man die Linie L_2 und die zugehörigen Decklinienbilder, so findet man, dass die Raumlinie L ihre Decklinie, also auch die Cylinderfläche nur in zwei Punkten M und N schneidet, deren Bilder $M_2 N_2$ sich in der Bildebene II ergeben. Obwol das zweite Bild L_2 die zweiten Bilder der Decklinien viermal schneidet, so sind doch nur M_2 und N_2 die richtigen Punkte, weil sie durch die Schnitte der einander entsprechenden Teile der Linien entstehen.

Der Lernende versinnliche sich die gegebene Linie L und die gefundenen Decklinien.

1098. **Man soll die wahre Gestalt eines ebenen Schnittes einer Stralenfläche aufsuchen.**

Um den Schnitt einer Ebene w mit einer Stralenfläche (1089, *b*) in orthogonalen Abbildungen zu construieren, wird es vorteilhaft sein, eine Bildebene III senkrecht zu einer Spur der Ebene w einzuführen, das dritte Bild der Basislinie, sowie des Scheitels S zu suchen und mittels der Nullseite $\overset{\circ}{\overline{w}}_3$ nach (701) die Schnitte der Flächenstralen mit der Ebene w zu bestimmen. Der so gefundene Schnitt wird nun congruent auf eine Bildebene (auf jene, zu welcher Bildebene III senkrecht geführt wurde) projiciert.

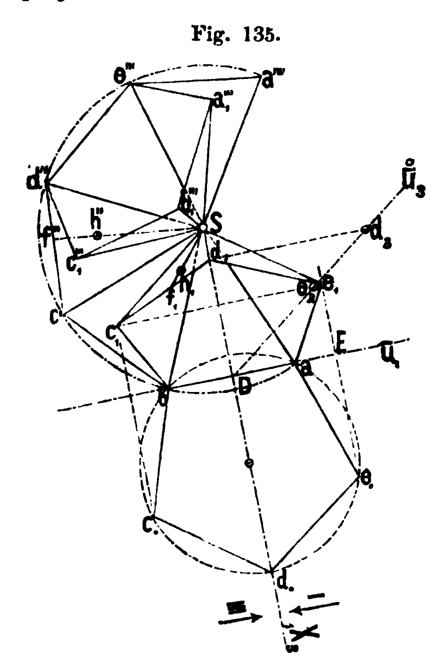
In Fig. 134 liegt die Basisebene u in der Bildebene I; die Basislinie ist ein Kreis; die Ebene w ist durch $\overline{w}_1$ und ihre erste Neigung (671) gegeben. Legt man die Bildebene III durch S_1 senkrecht auf $\overline{w}_1$, so ist der gegebene erste Neigungswinkel nur an die Axe ${}_1X_3$ anzusetzen, um $\overset{\circ}{\overline{w}}_3$ zu erhalten.

Der Schnitt der Stralenfläche mit der Ebene w lässt sich einfach construieren; indessen kann man im vorliegenden Falle seine wahre Gestalt direct aus der Basislinie ableiten. Denken wir uns nämlich den Stral Sa_1 im Raume, bezeichnen den Schnitt von Sa_1 mit w durch a' und projicieren parallel mit der ersten Congruenz-Richtung der Ebene w (733) die ganze Stralenfläche sammt dem ebenen Schnitt w auf die Bildebene I, so ist ersichtlich, dass die Congruenz-Projection von a' in der Geraden $a_1 S''$ wird liegen müssen, wenn S'' die Projection vom Scheitelpunkte S ist. (Die Gerade $S_1 S''$ muss mit ${}_1X_3$ und $\overset{\circ}{\overline{w}}_3$ ein gleichschenkliges Dreieck bilden.)

Dieselbe Wahrnehmung macht man auch bei anderen Schnittpunkten von Stralen mit der Ebene w und man erkennt sofort, dass die erste Congruenz-Projection des ebenen Schnittes mit der Basislinie perspectivisch-collinear liegt, wobei S'' das Centrum und $\overline{w}_1$ die Begegnungsgerade ist.

Um die wahre Gestalt der Schnittcurve nun zu erhalten, projiciert man entweder hinreichend viele Punkte des Schnittes genau so wie $a'_1 a'_2$ nach a''; oder man projiciert nur einen Punkt $a'_1 a'_2$ nach a'' und ermittelt nach den Lehren der perspectivischen Collineation alle übrigen Punkte, wie dies Fig. 134 zeigt. Daselbst wurde durch S'' eine Centrale (253) gezogen und zwei verwandte Punkte $k_1 k''$ aus $a_1 a''$ abgeleitet, welche Punkte $k_1 k''$ zur weiteren Construction verwendet wurden, da sie sehr verwendbar liegen.

Fig. 135.



Die Punkte $b_1 b''$ zeigen, in welcher Weise sie mit $k_1 k_2$ in Verbindung stehen.

1099. Der Lernende bemühe sich nun auch die Stralenflächen mit Ebenen von besonderer Lage zu schneiden. Sind die Schnittebenen zu einigen Stralen der Fläche parallel, so besitzt die Schnittcurve unendlich ferne Punkte. Um zu untersuchen, ob eine Ebene w zu Flächenstralen parallel läuft, legt man durch den Scheitel S der Stralenfläche zu w eine parallele Ebene w' (772) und sucht ihre Schnitte mit der Stralenfläche (1089, a). Sind solche vorhanden, so sind sie zugleich die mit der Ebene w parallelen Flächenstralen.

Es ist der senkrechte Kreiskegel nach Hyperbeln oder Parabeln zu schneiden und sind die wahren Gestalten dieser Schnitte zu ermitteln.

Auch sollen in gegebenen Punkten eines ebenen Schnittes Tangenten an die Schnittcurve construiert werden (1038).

Das Wälzen oder Rollen der Stralenflächen. Construction ihrer Netze. Rollflächen.

§. 54.

1100. Was versteht man unter dem Wälzen oder Rollen einer Stralenfläche auf einer Ebene?

Legt man eine Stralenfläche (*Sabcde*, Fig. 135) mit einer Seitenebene (oder wenn sie gekrümmt ist, mit einem Seitenelemente, d. i. mit einer unendlich schmalen Seitenebene) *Sab* auf eine ebene Tafel, so kann man die Stralenfläche durch mehrere Drehungen um die in die Tafel gekommenen Seitenkanten so weiter bewegen, dass nach und nach alle Seitenflächen der Stralenfläche mit der Tafelebene zusammengefallen sind. Der Inbegriff aller dieser Drehungen, bei welchen der Scheitel *S* seinen Ort unverändert beibehält, wird eine Wälzung oder ein Rollen der Stralenfläche genannt.

In Fig. 135 wurde die Zeichnungsebene I als Tafel angenommen und eine senkrechte Pyramide mit regelmässigem Fünfeck als Basis und (weil sie senkrecht ist) mit gleich langen Seitenkanten *Sa*, *Sb*, *Sc*, *Sd*, *Se* mit der Seitenebene *Sab* in die Tafel gelegt. Um die orthogonale Projection der Pyramide in dieser Stellung zeichnen zu können, bezeichne man die Seite *ab* als $\bar{u}_1$ der Fünfecksebene *u*. Um sodann zu der Fünfecksseite *ab* das Fünfeck in wahrer Gestalt *abc.d.e.* ermitteln zu können, construiere man seitwärts ein reguläres Fünfeck (*n*-eck) in irgend einen Kreis, dessen Radius *r* sein soll. Ist die gefundene Fünfecksseite nicht gleich *ab*, so darf man nur den Radius *r* in demselben Verhältnisse verändern, in welchem die gefundene Fünfecksseite zur gegebenen *ab* steht, dann ist der veränderte Radius jener, welcher der Fünfecksseite *ab* entspricht. Nun kann *c.d.e.* ermittelt werden.

Durch *S* legt man eine Ebene III senkrecht auf $\bar{u}_1$ und sucht d_3. Denkt man sich den Punkt *d* im Raume, so liegt er in der Ebene III derart, dass $Sd = Sa$ und $Dd = Dd.$ ist. Mit diesen Radien *Sa* und *Dd.* ergibt sich d_3, somit auch $\mathring{\bar{u}}_3$. Eine Ordinale durch d_3 gibt d_1.

Wird *Ee.* nach De_3 aufgetragen und durch e_3 eine Ordinale gezogen, bis die zu $\bar{u}_1$ senkrechte Gerade *e.E* getroffen wird, so ergibt sich e_1 und symmetrisch zu ${}_1X_3$ liegend c_1, wor-

aus das erste Bild $abc_1d_1e_1$ der Basis und schliesslich der Pyramide $Sabcde$ gefunden wird.

Bei dieser Stellung der Pyramide nehme man Sb zur Drehungsaxe und drehe die Pyramide so lange, bis die Kante Sc in die Tafel nach Sc' kommt (dabei wird $bc' = bc$.), wodurch die Pyramide in die erste Zwischenstellung gelangt ist. Bei dieser Stellung wird Sc' Drehungsaxe und wird die Drehung fortgesetzt, bis Sd in der Tafel in Sd'' eingetroffen ist ($c'd'' = c.d.$). Die Pyramide hat die zweite Zwischenstellung eingenommen und ist nun Sd'' zur Drehungsaxe zu nehmen. Die Drehung wird fortgesetzt, bis Se in die Tafel nach Se''' gelangt ($d''e''' = d.e.$). In dieser dritten Zwischenstellung wurde die Pyramide (Fig. 135) wieder in orthogonaler Projection dargestellt und die Ecken der Basis entsprechend bezeichnet.

1101. Wird endlich die Pyramide noch einmal um die Kante Se''' gedreht, wodurch Sa nach Sa''' kommt, so sind der Reihe nach sämmtliche Seitenebenen der Pyramide mit der Tafel zusammengefallen, wobei die Pyramide eine volle Wälzung erlitt.

1102. Was versteht man unter dem Netze einer Stralenfläche?

Wenn eine Stralenfläche eine volle Wälzung (1101) auf einer Ebene durchmacht und dabei auf der Ebene den Raum bezeichnet, den die Seitenflächen (oder bei gekrümmten Stralenflächen die Seitenelemente) bei dem Rollen berührt haben, so ist der ganze in der Tafel liegende Berührungsraum das Netz der Stralenfläche.

1103. Was verstehen wir unter Netzlinien?

Liegt auf der Oberfläche einer Stralenfläche irgend eine Linie L, so wird diese Linie bei dem Rollen der Stralenfläche auf einer Tafel, in der Tafel ebenfalls eine Linie L' bezeichnen, welche die Netzlinie der gegebenen Linie L genannt werden soll. Die gegebene Linie ist die der Netzlinie verwandte Flächenlinie.

1104. In welcher Beziehung steht eine jede Linie einer Stralenfläche mit ihrer Netzlinie?

Sie ist ihrer Netzlinie an Länge gleich, weil jedes Element der Flächenlinie ein gleich langes Element im Netze gibt.

1105. Ist die Form der Netzlinie der Form ihrer verwandten Flächenlinie gleich?

Nur dann, wenn die Flächenlinie in ihrer ganzen Ausdehnung in derselben Seitenebene liegt. Erstreckt sich aber eine Linie über mehrere Seitenebenen (oder Seitenelemente), so ändert sich ihre Form im Netze. So hat sich in Fig. 135 das geschlossene Polygon *abcde* der Pyramide in den offenen Linienzug $a\,b\,c'd''e'''a''''$ verwandelt.

1106. Man soll zu einem gegebenen Flächenstrale (Sf_1 in Fig. 135 sei sein erstes Bild) seinen Netzstral construieren.

Die Netzlinie der Seite *cd*, in welcher *f* liegt, ist $c'd''$. Wird nun die Netzlinie $c'd''$ von c' aus in dem Verhältnisse von $c_1f_1 : c_1\,d_1$ geteilt, so ist f'' der mit *f* verwandte Netzpunkt, mithin ist Sf'' die Netzlinie von *Sf*.

1107. In welcher Lage befindet sich jeder Flächenstral zu seinem Netzstral?

Beide Stralen liegen perspectivisch, weil alle geraden Linien, welche verschiedene Punkte des Flächenstrales mit ihren Netzpunkten verbinden, untereinander parallel sind.

1108. Weil der Punkt *S* der Netzlinie und dem Flächenstrale gemeinsam ist, so liegt das orthogonale Bild des Flächenstrales auch perspectivisch mit der Netzlinie desselben Strales.

Ist nun h_1 das Bild irgend eines Punktes *h* im Strale *Sf*, so liegt der Netzpunkt h'' in der durch h_1 zu f_1f'' parallel gezogenen Geraden in der Netzlinie Sf''. Man kann sonach jeden Punkt eines Flächenstrales leicht in seine Netzlinie, sowie umgekehrt, jeden Punkt des Netzstrales in seinen Flächenstral übertragen, wenn beide Stralen schon gezeichnet sind.

1109. Vermöge (1106 und 1108) kann man zu jeder auf der Stralenfläche liegenden beliebigen Linie die Netzlinie construieren.

1110. Welche Linien einer Stralenfläche verwandeln sich im Netze in Kreislinien mit dem Centrum *S*?

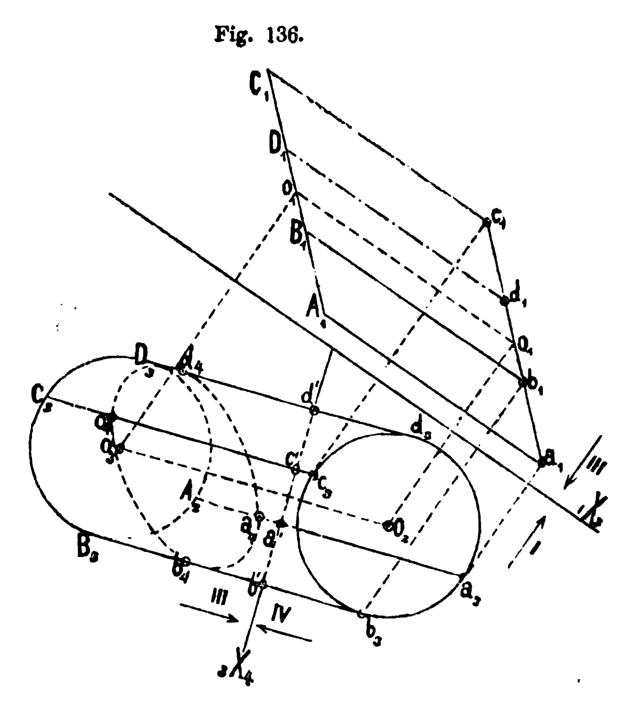
Jene Linien, deren Punkte vom Scheitel der Stralenfläche einerlei Entfernung besitzen. In Fig. 135 ist die Entfernung aller Basisecken von *S* dieselbe, mithin liegen ihre Netzpunkte in einem aus *S* als Centrum beschriebenen Kreise.

1111. In was für eine Figur verwandelt sich im Netze die Mantelfläche eines senkrechten Kreiskegels?

Nach (1110) wird die Netzlinie der Basislinie ein Kreisbogen, dessen Radius gleich der Entfernung des Scheitels der Kegelfläche von irgend einem Periferiepunkte der Basis ist. Die Länge dieses Kreisbogens ist gleich der Länge der Basislinie; also ist die Netzfigur der Mantelfläche ein Kreissector.

1112. **Aendern sich die Winkel, welche ein Linienelement einer Stralenfläche mit den Flächenstralen einschliesst, zwischen welchen es liegt, im Netze der Stralenfläche?**

Fig. 136.



Diese Winkel bleiben unverändert, weil bei der Wälzung das Linienelement und die beiden Flächenstralen gleichzeitig in die Tafel zu liegen kommen.

1113. Was folgt hieraus?

Zieht man durch irgend einen Punkt P einer Curve, welche auf einer gekrümmten Stralenfläche liegt, eine Tangente an die Curve und einen Flächenstral, sowie auch durch den Netzpunkt P' eine Tangente an die Netzcurve und einen Netzstral, so ist in beiden Fällen der von der Tangente mit dem Strale gebildete Winkel derselbe.

1114. Gibt es auf Parallel-Stralenflächen Linien, von welchen im Vorhinein ihre Netzliniengestalt bekannt ist?

Wenn der Winkel von allen Linienelementen der Flächenlinien mit den zugehörigen Flächenstralen dieselbe Grösse besitzt, so muss die Netzlinie der zugegebenen Flächenlinie eine Gerade werden, weil alle Netzstralen unter sich parallel sind. Hieraus folgt, dass alle Schnittlinien von Parallel-Stralenflächen mit Ebenen, welche zu ihren Stralen senkrecht geführt werden, sich im Netze in gerade Linien verwandeln.

1115. Es soll das Netz einer gegebenen Cylinderfläche bestimmt werden.

Ist die Cylinderfläche durch zwei zugeordnete Bilder gegeben und zeigt sie in keiner Bildebene eine Nullseite (d. h. steht sie auf keiner Bildebene senkrecht), so muss ihre Nullseite construiert werden, weil sich diese nach (1114) im Netze in eine Gerade verwandelt.

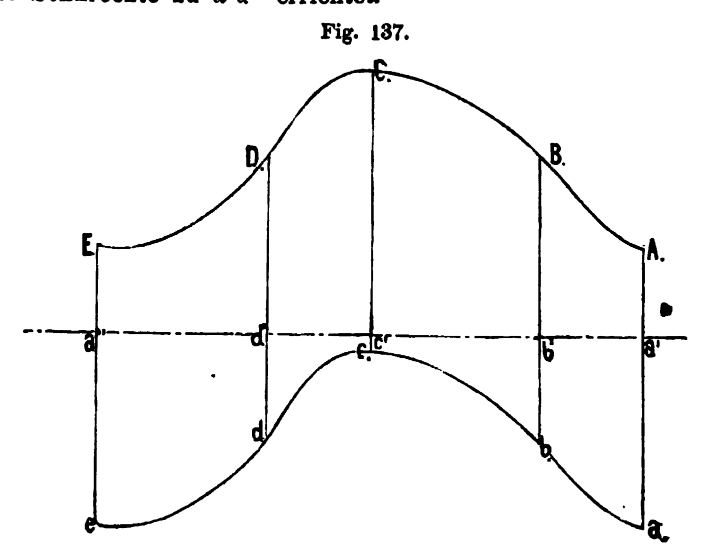
In Fig. 136 war das erste und zweite Bild eines Cylinders gegeben, dessen Stralen gegen beide Bildebenen I und II geneigt sind, deren Basisebenen jedoch auf I senkrecht stehen. Legt man eine Bildebene III parallel zu $O_1\ o_1$, so kann man aus dem ersten und zweiten Bilde jeder Basislinie ihr drittes Bild und hiedurch auch das dritte Bild des Cylinders finden. (In Fig. 136 wurde das zweite Bild weggelassen, sobald das dritte dargestellt war.)

Wird nun eine Bildebene IV senkrecht auf die dritten Bilder der Cylinderstralen eingeführt, so liegt in der Bildaxe ${}_3X_4$ schon das dritte Bild des Schnittes der Ebene IV mit der Cylinderfläche; das vierte Bild dieses Schnittes ist zugleich eine Nullseite des Cylinders, folglich wird man nur zu mehreren Punkten $a_1\ a_3$, $b_1\ b_3$, $c_1\ c_3$, ... die vierten Bilder $a_4\ b_4\ c_4$ ... nach (562) construieren, und sie durch eine stetige Linie der Reihenfolge entsprechend verbinden. Weil das vierte Bild in die Zeichnung III fällt, so wurde es um Verirrungen zu vermeiden, gestrichelt.

Um das Netz des Cylinders aus Fig. 136 zu erhalten, denke man sich denselben in Fig. 137 so in die Tafel gelegt, dass der Stral aA die Lage $a.A.$ einnimmt. Dabei ist $a.A. = a_3\ A_3$ (weil die ersten Bilder der Cylinderstralen zur Bildaxe ${}_1X_3$ parallel sind), folglich kommt $a_3\ a'$ nach $a.a'$ aufzutragen. Die Netzlinie des Schnittes von der Bildebene IV mit dem Cylinder verwan-

delt sich in die zu $a.A.$ senkrechte Gerade $a'a''$. Nun wird ein kleines Stückchen des Bogens $a_4 b_4$, welches noch als geradlinig angesehen werden kann, mit dem Handzirkel (nicht mit dem Kniezirkel) erfasst und möglichst genau untersucht, wie oft es sich auf dem Bogen $a_4 b_4$ auftragen lässt; der Rest, welcher bei diesem Auftragen wahrscheinlich übrig bleiben wird, lässt sich durch den letzten Teilpunkt bemerkbar machen. Mit der grössten Sorgfalt wird das im Zirkel gefasste Bogenstückchen von a' aus auf $a'a''$ ebenso oft aufgetragen, als es im Bogen $a_4 b_4$ enthalten war und der auf dem Bogen $a_4 b_4$ gebliebene Rest hinzugefügt, wodurch b' als jener Punkt gefunden wird, durch welchen bei der Wälzung der Stral bB hindurch gehen muss. Durch b' wird eine Senkrechte zu $a'a''$ errichtet.

Fig. 137.



In gleicher Weise, wie die Strecke $a'b'$ dem Bogen $a_4 b_4$ an Länge gleich gemacht wurde, werden auch die Bogen $b_4 c_4$ $c_4 d_4$, $d_4 a_4$ in die Gerade $a'a''$ nach $c'd'a''$ übertragen.

Die Ebene IV teilt den Cylinderstral aA in zwei Teile, von welchen der eine die Länge $a_3 a'$, der andere die Länge $a' A_3$ besitzt, welche Längen nach $a'a.$, $a'A.$ und $a''e.$, $a''E.$, übertragen werden; ebenso wird $b_3 b'$ nach $b'b.$, $b'B_3$ nach $b'B.$, ... übertragen. Die Bemerkung, dass $a.A. = b.B. = c.C. = \dots$ gleich der wahren Länge der Cylinderstralen sein muss, vereinfacht die Construction der oberen Netzlinie, sobald man die untere kennt. (Wie ?)

Werden von einer hinreichenden Menge von Stralen (jedenfalls mehr als in Fig. 137), die Netzstralen gesucht und ihre Endpunkte in entsprechender Reihenfolge verbunden, so ergibt sich das Netz des Cylinders, wie es Fig. 137 zeigt.

Schneidet man dieses Netz aus steifem Papier (wobei man wegen des Zusammenklebens das Netz etwas grösser werden lässt) und legt dasselbe so zusammen, dass die Curve *a.b.c.d.* eine geschlossene ebene Curve wird, so gibt uns die papierne Stralenfläche die Gestalt jener Stralenfläche, die in Fig. 136 dargestellt ist.

Es gibt in Fig. 136 in jeder Basislinie zwei Punkte a, c, A, C von der Lage, dass die Winkel, welche die durch sie gehenden Flächenstralen mit den durch sie gehenden Tangenten der Basislinie einschliessen, im dritten Bilde in wahrer Grösse erscheinen. Mithin kann man nach (1113) sehr einfach in den Netzpunkten, welche den erwähnten Basispunkten entsprechen, die Tangenten an die Netzlinien der beiden Basislinien construieren.

1116. Wie wird das Netz einer durch zwei orthogonale Abbildungen gegebenen ungleichseitigen Pyramide dargestellt?

Man sucht nach (738) die wahre Gestalt der einzelnen Seitendreiecke und reihet diese Dreiecke in ihrer gegebenen Aufeinanderfolge so aneinander an, dass sie stets den angenommenen Netzpunkt S' gemeinsam haben.

1117. Ist das Netz einer abgestutzten Pyramide zu zeichnen, deren Spitze sich nicht finden lässt, so sind die einzelnen Seitenflächen Trapeze, deren wahre Gestalt man aus der wahren Länge der vier Seiten (581) und einer Diagonale findet.

1118. Das Netz einer beliebigen Kegelfläche findet man nach dem bei der Netzbestimmung einer Pyramide anzuwendenden Verfahren (1116), weil man sich eine Kegelfläche nahezu als eine Pyramide mit kleinen Seitenflächen darstellen kann. Die Genauigkeit leidet hiedurch jedenfalls, aber umsoweniger, je sorgfältiger die wahren Gestalten der Dreiecke construiert werden, die man annäherungsweise den krummen Flächenteilen substituieren kann.

1119. Bei begrenzten Stralenflächen wird noch häufig zum Netze der Mantelfläche die Basisfigur hinzugefügt. Bei dem Netze in Fig. 137 wäre daher noch die wahre Gestalt der Cylinderbasis (Fig. 136), d. i. eine Ellipse, deren grosse Axe $= a_1 c_1$

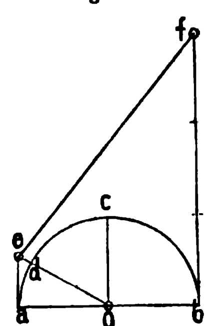
und deren kleine Axe $= 2 \, . \, O_3 a_3$ ist, auf beiden Seiten an die in $a.$ und $A.$ oder in $c.$ und $C.$ construierten Netztangenten so anzusetzen, auf dass bei der Zusammenwickelung des Netzes zur Stralenfläche, diese Figuren als Basisebenen den Cylinder begrenzen.

1120. Wie wird die wahre Länge einer durch zugeordnete Projectionen gegebenen unebenen Curve bestimmt?

Man denkt sich durch die Curve eine Cylinderfläche gelegt, deren Basis eine Projection der Curve ist. Sucht man das Netz der Cylinderfläche und überträgt eine hinreichende Menge von Curvenpunkten in das Netz, so erhält man die Netzlinie der unebenen Curve. Die wahre Länge der Netzlinie wird aus kleinen Bogenteilchen gemessen, die man als geradlinig ansieht und auf einer Geraden der Reihenfolge entsprechend genau aneinander reiht; die so gefundene Strecke gibt die wahre Länge der unebenen Curve an.

1121. Wie kann man auf einer gegebenen Stralenfläche zwischen zwei gegebenen Punkten die kürzeste Linie ziehen?

Fig. 138.



Man zeichnet das Netz der Stralenfläche und die Netzpunkte $M'N'$ der gegebenen Flächenpunkte M und N. Jedes Linienelement der Stralenfläche geht in unveränderter Länge in das Netz über, also muss die kürzeste Linie zwischen M und N im Netze eine gerade Linie sein. Zieht man demnach die Gerade $M'N'$, so sind nur hinreichend viele Punkte derselben in die Fläche zurückzuversetzen (1108) und durch eine Linie in ihrer natürlichen Reihenfolge entsprechend zu verbinden.

1122. Die kürzeste Linie zwischen zwei beliebigen Punkten einer senkrechten Kreiscylinderfläche wird eine Schraubenlinie genannt.

Befinden sich zwei Punkte M und N in demselben Stral einer senkrechten Kreiscylinderfläche, so ist die kürzeste Linie von M zu N allerdings die Gerade MN. Wenn man aber die Bedingung hinzufügt, die kürzeste Linie soll einmal (n-mal) um den Cylinder herumgehen, dann wird sie eine Schraubenlinie, deren Länge von M bis N eine Windung oder ein Gang und die geradlinige Entfernung $MN = h$ die Ganghöhe genannt wird.

1123. **Wie wird eine Schraubenlinie construiert, ohne das Netz der Kreiscylinderfläche darzustellen?**

Man teilt die Basis des Cylinders (Fig. 133) in n-gleiche Teile (z. B. in 12; in Fig. 133 wurde diese Teilung in der punktierten Congruenz-Projection des Kreises ausgeführt), zieht durch alle Teilpunkte Flächenstralen, teilt die Ganghöhe h in n-gleiche Teile und trägt auf den Flächenstralen von der Basis aus gemessen beziehungsweise 1, 2, 3, ... Teile von h auf, so bestimmen diese Punkte der Cylinderfläche eine Schraubenlinie. Selbstverständlich muss man bei der Construction der Teile die Stralen ihrer Ordnung entsprechend nehmen und auf jeden folgenden Stral $\frac{h}{n}$ mehr als auf den vorhergehenden (oder bei umgekehrter Reihenfolge weniger) auftragen.

In Fig. 133, woselbst der senkrechte Kreiscylinder eine geneigte Lage gegen beide Bildebenen besitzt, projiciert sich ein Schraubengang in der Bildebene I als die Linie $a_1 b'_1 N_1 B_1 C_1$, in der Bildebene II als $a_2 M_2 B_2 C'_2$. Dabei ist $a_1 C_1$ die erste $a_2 C'_2$ die zweite Projection der Ganghöhe h. Ist b der vierte Teilpunkt in der Basis, so wird $b_1 b'_1 = 4 . \frac{a_1 C_1}{12}$, und $b_2 b'_2 = 4 . \frac{a_2 C'_2}{12}$ zu setzen sein.

1124. Für die Verwandlung einer halben Kreisperiferie in eine gerade Linie gibt es eine sehr brauchbare und genaue Construction. In Fig. 138 werden in den Punkten aob eines Kreisdurchmessers Senkrechte darauf errichtet, vom Punkte c aus der Radius als Sehne nach cd aufgetragen, od gezogen bis die erste Senkrechte durch a in e getroffen wird, bf gleich drei Radien gemacht, so ist ef constructiv genau genug gleich der Länge des Halbkreises acb. Denn berechnet man ef, so findet man $ef = 3{\cdot}14153.ao$, während der Halbkreis $acb = 3{\cdot}14159.ao$ ist. Die Differenz $acb - ef = 0{\cdot}00006.ao$ ist für alle geometrischen Constructionen, bei welchen der Kreisradius 1 Fuss nicht überschreitet, eine unmessbar kleine Grösse.

1125. **Was versteht man unter einer Roll- oder Wälzungsfläche?**

Wird eine Stralenfläche auf einer Ebene oder auf einer anderen Stralenfläche gerollt, so durchläuft jeder Stral der rollenden Stralenfläche einen Flächenraum, der wieder eine Stralenfläche ist, und mit Bezug auf seine Entstehung eine Wälzungs-

fläche oder Rollfläche genannt wird. Bei dem Rollen oder Wälzen von Central-Stralenflächen entstehen Kegelflächen als Rollflächen, bei dem Rollen von Parallel-Stralenflächen aber Cylinderflächen.

1126. Rollt eine Pyramide auf einer Ebene, so erzeugt der die Rollfläche beschreibende Stral senkrechte Kreiskegelflächen, deren Axe die jeweilige Drehungskante ist. So oft beim Rollen eine Seitenebene in die Tafel fällt, begrenzt der beschreibende Stral einen Teil einer senkrechten Kreiskegelfläche und beginnt eine neue Kreiskegelfläche zu beschreiben. Also ist die Rollfläche eine Zusammensetzung aus einzelnen senkrechten Kreiskegelflächen, die unstetig gekrümmt (1041) in einander übergehen.

1127. Rollt aber eine Kegelfläche auf der Tafel fort, so sind die einzelnen senkrechten Kreiskegelflächen, aus welchen die Rollfläche zusammengesetzt wird, unendlich klein und bilden in ihrer Gesammtheit eine stetig gekrümmte Kegelfläche, die sich in eine Cylinderfläche verwandelt, sobald der Scheitel der rollenden Kegelfläche im Unendlichen liegt.

1128. Soll eine Stralenfläche auf einer anderen Stralenfläche (Grundfläche) rollen, so kann dies nur dann möglich werden, wenn von der rollenden Stralenfläche und von der Grundfläche stets die Scheitelpunkte zusammenfallen.

1129. Wenn zwei Stralenflächen mit gemeinsamem Scheitel aufeinander rollen, dabei aber sich jede Stralenfläche um eine eigene Axe dreht, dann wollen wir diese Art Wälzung als stehendes Rollen bezeichnen (z. B. bei Frictionsrollen, konischen und cylindrischen Zahnrädern mit festen Axen).

Ueber die Construction der Rollflächen soll erst nach der Kenntnis der Evoluten- und Evolventenflächen gehandelt werden.

Cylindrische Evoluten- und Evolventenflächen. Krümmungskreise und Krümmungscylinder. Kreisevolvente.

§. 55.

1130. Denken wir uns es seien $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n\; a_{n+1}$ aufeinanderfolgende Flächenstralen einer gekrümmten, oder aufeinanderfolgende Kanten einer ungekrümmten Stralenfläche, dann liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stralen a_n und a_{n+1} nur ein unendlich schmales ebenes Seitenelement der Stralen-

fläche (wie dies bei Kegel- und Cylinderflächen der Fall ist); sind aber a_n und a_{n+1} zwei aufeinanderfolgende Kanten einer ungekrümmten Stralenfläche, (Pyramiden- oder Prismenfläche), dann liegt zwischen a_n und a_{n+1} eine Seitenebene dieser Fläche.

Nun kann man sich die gegebene Stralenfläche feststehend denken und den Flächenstral a_1 um a_2 so lange drehen, bis er in die Ebene zu liegen kommt, in welcher sich a_2 und a_3 befinden. Dabei denkt man sich aber die Drehung so ausgeführt, dass von der zwischen a_1 und a_2 liegenden begrenzten Ebene, nichts auf die von a_2 und a_3 begrenzte Ebene zu liegen kommt.

Durch die Drehung ändert sich die Neigung der Geraden a_1 gegen a_2 nicht, denn a_1 beschreibt ein Stück einer senkrechten Kreiskegelfläche, oder wenn a_1 mit a_2 parallel läuft, ein Stück einer senkrechten Kreiscylinderfläche, deren Axe a_2 ist.

Diese Kegel- oder Cylinderfläche, welche a_1 beschreibt, ist nun ein Teil einer Evolventenfläche.

Sobald a_1 in die Ebene $a_2 a_3$ gelangt ist, dreht man a_1 und a_2 um den Stral a_3 in die Ebene $a_3 a_4$. Dabei beschreibt a_1 den nächsten Teil der Evolventenfläche, nämlich eine senkrechte Kreiskegelfläche mit der Axe a_3, wenn die gegebene Stralenfläche eine Pyramiden- oder Kegelfläche ist; oder eine senkrechte Cylinderfläche, wenn die Stralen der gegebenen Stralenfläche unter sich parallel sind.

Ist nun a_1 mit a_2 und a_3 in die Ebene $a_3 a_4$ gelangt, so wird a_1 mit a_2, a_3 und a_4 in die nächste Ebene $a_4 a_5$ gedreht, wodurch a_1 wieder einen neuen Teil der Evolventenfläche beschreibt.

Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, als es der Zweck erheischt, oder so lange, bis alle Seitenebenen der gegebenen Stralenfläche in die letzte Seitenebene, oder in die Ebene des letzten Seitenelementes gelangt sind.

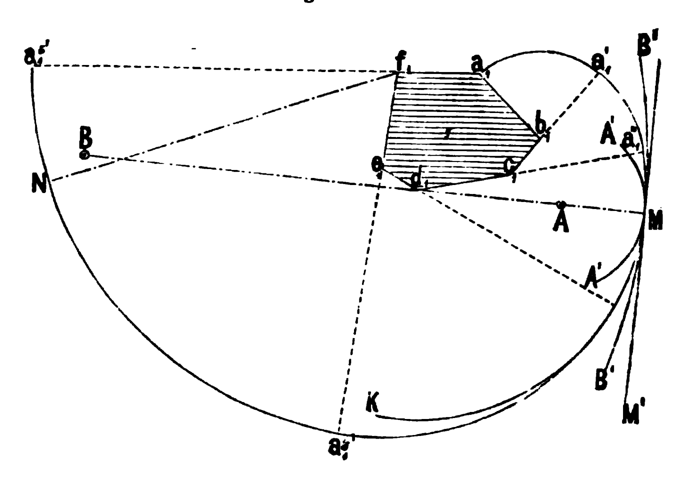
1131. Die Stralenfläche, welche zu Grunde gelegt wird, um aus ihr eine Evolventenfläche abzuleiten, bezeichnet man als die Evolutenfläche der Evolventenfläche. Es besitzt sonach jede Stralen - Evolutenfläche eine Stralen - Evolventenfläche, und umgekehrt.

1132. Man soll zu einer Prismenfläche die Evolventenfläche construieren.

In Fig. 139 ist $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ das orthogonale Bild eines zur Bildebene I senkrechten Prismas, also wird auch dessen Evolventenfläche eine zur Bildebene I senkrechte Stralenfläche werden.

Die Vertical-Projection auf II wurde weggelassen, da sie der Lernende leicht selbst entwerfen kann.

Fig. 139.



Nehmen wir nun an, a_1 sei der die Evolventenfläche beschreibende Stral, oder für das Bild in der Bildebene I der beschreibende Punkt, so beschreibt a_1 eine senkrechte Kreiscylinderfläche, deren Basis der Kreisbogen $a_1 a'_1$ mit dem Centrum b_1 sein muss.

Die bewegliche Ebene $b_1 a_1$ steht während ihrer ganzen Drehung auf der Evolentenfläche $a_1 a'_1$ senkrecht.

Sowie der bewegliche Stral a_1 in die Ebene $b_1 c_1$ gekommen, ist $c_1 a'_1$ die neue bewegliche Ebene, die um c_1 sich drehend, mit a'_1 einen neuen Teil $a'_1 a''_1$ der Evolventenfläche beschreibt, deren Basis der aus c_1 als Centrum beschriebene Kreisbogen $a'_1 a''_1$ ist.

Auch hier, sowie jederzeit, steht die bewegliche Ebene, welche den beschreibenden Stral der Evolventenfläche enthält, auf der Evolventenfläche normal.

In Fig. 139 wird $a_1 a'_1 a''_1 a'''_1 a^{4\prime}_1 a^{5\prime}_1$ die Basis jener Evolventenfläche, deren Evolutenfläche das Prisma $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ ist.

1133. Dreht man alle Zwischenstralen $b_1 c_1 \ldots$ in die letzte Ebene $a_1 f_1$ mit, so erhält man in ihr das Netz der Prismenfläche. (Wurde in Fig. 139 nicht gezeichnet.)

1134. Wodurch unterscheidet sich eine durch ein Prisma erzeugte Rollfläche, von einer aus einem Prisma abgeleiteten Evolventenfläche?

Die Rollfläche besteht aus einzelnen cylindrischen Teilen, welche im gemeinsamen Strale, wo die eine endigt, die andere beginnt, keine gemeinsame Tangentenebene besitzen. Dieser Umstand ist aber bei der Evolventenfläche nicht vorhanden, mithin erscheint die letztere als eine stetig gekrümmte Stralenfläche.

1135. Schneidet man eine aus parallelen Stralen gebildete Evolventenfläche und Evolutenfläche mit einer zu den Stralen senkrechten Ebene, so ist der erstere Schnitt die Evolvente des zweiten Schnittes; dieser daher die Evolute zur Evolvente.

1136. Da man aus den Beziehungen einer Evolvente zu ihrer Evolute auch auf die Beziehungen der ihnen entsprechenden Parallel-Stralenflächen schliessen kann, so genügt es, die Evoluten und Evolventen der Betrachtung zu unterziehen.

1137. Die Construction einer Evolvente $a_1 a'_1 a''_1 \ldots$ aus einer Evolute $a_1 b_1 c_1 \ldots$ führt Fig. 139 vor Augen.

Eine Evolvente ist aus einzelnen Kreisbogen zusammengesetzt, deren Mittelpunkte $b_1 c_1 d_1 \ldots$ durchwegs in der Evolute liegen.

1138. Zieht man durch alle Punkte einer Evolvente Normalen zu ihr, so ist der Schnittpunkt von je zwei aufeinanderfolgenden Normalen der Mittelpunkt des zwischen diesen Normalen liegenden Kreisbogens der Evolvente.

1139. Die Schnittpunkte, welche durch je zwei nächstliegende Normalen einer Evolvente entstehen, bilden die Mittelpunkte für die zwischen den Normalen liegenden Kreisbogen, oder die sogenannten Krümmungsmittelpunkte der Evolvente.

Die Radien der einzelnen Kreisbogen einer Evolute werden Krümmungsradien oder Krümmungshalbmesser genannt.

1140. Wie gross ist für irgend einen Punkt M einer Evolvente der Krümmungshalbmesser?

Die Länge des Krümmungshalbmessers für irgend einen Punkt M der Evolvente ist gleich der Länge der Evolute vom

Anfangspunkt der Evolvente bis zum Krümmungsmittelpunkt des Punktes M.

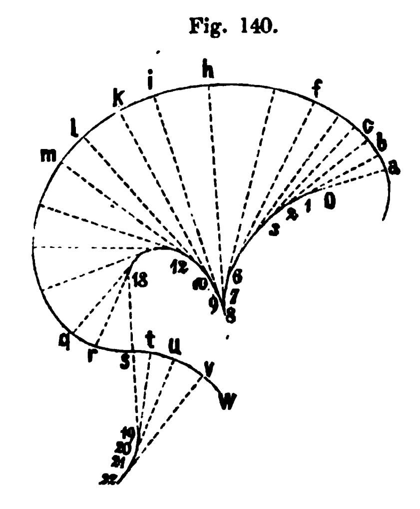
Fig. 139 überzeugt uns hievon. Es is a_1 der Anfangspunkt der Evolvente; $b_1 a'_1 = b_1 a_1$; $c_1 a''_1 = c_1 b_1 + b_1 a'_1 = c_1 b_1 + b_1 a_1$, und $d_1 M = d_1 c_1 + c_1 a''_1 = d_1 c_1 + c_1 b_1 + b_1 a_1$, oder $d_1 M = a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 d_1$, wie es behauptet wurde.

1141. Wie gross ist der Unterschied der Krümmungsradien für irgend zwei Punkte M und N einer Evolvente?

Er ist gleich der Länge der Evolute zwischen den Krümmungs-Mittelpunkten der Punkte M und N.

In Fig. 139 ist $f_1 N = a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 d_1 + d_1 e_1 + e_1 f_1$ (1140) und $d_1 M = a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 d_1$, folglich $f_1 N - d_1 M = d_1 e_1 + e_1 f_1$, wie behauptet wurde.

Fig. 140.



1142. Gibt es ausser den Krümmungsmittelpunkten einer Evolvente noch andere Mittelpunkte, von wo aus Kreise beschrieben werden können, deren Bögen zum Teil in der Evolvente liegen?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir an, es soll durch einen Punkt M der Evolvente (Fig. 139) noch ein anderer Kreisbogen $A'M$ gehen, welcher sich in M an die Evolvente anschmiegt; es ist dann klar, dass die Tangente MM' an die Evolvente, auch Tangente an den neuen Kreis sein muss, mithin wird das Centrum A des neuen Kreises in der Normale des Punktes M liegen.

Wählen wir in der Normale Md_1 zwei beliebige Mittelpunkte A und B und beschreiben aus ihnen zwei durch M gehende Kreise MA' und MB', so schmiegen sich diese Kreise in M an die Evolvente an, und es ist einleuchtend, dass sich keiner dieser Kreise der Evolvente so genau anschliessen kann, wie der Krümmungskreis MK des Punktes M, weil letzterer Kreis selbst einen Teil zur Entstehung der Evolvente liefert.

1143. Man erkennt nun auch, dass es bei Cylinderflächen nur einen senkrechten Kreiscylinder geben kann, welcher sich der gegebenen Cylinderfläche längs eines gegebenen Flächenstrales am innigsten anschmiegt; er wird der Krümmungscylinder für jenen Flächenstral genannt.

1144. Aus den Kreisen $A'A'$ und $B'B'$ findet man ferner heraus, dass $B'B'$ sich dem Krümmungskreise inniger anschliesst, als $A'A'$, folglich kann man sagen:

Liegen die Mittelpunkte A und B zweier die Evolvente berührenden Kreise in einem Krümmungsradius der Evolvente gleichweit vom Krümmungsmittelpunkt d_1 entfernt, so schmiegt sich der Kreis mit dem grösseren Radius inniger an die Evolvente an, als jener mit dem kleineren Halbmesser.

1145. Wie wird eine Evolvente beschaffen sein, wenn die Evolute ein Polygon mit unendlich kurzen Seiten, also eine Curve ist?

Die einzelnen Kreisbogen (Fig. 140), aus welchen die Evolvente zusammengesetzt ist, werden unendlich kurz; in Folge hievon wird die Evolvente ($abcd\ldots rs\ldots w$) die Gestalt einer beliebigen Curve annehmen.

1146. Fig. 140 belehrt uns auch, dass die Evolute 0 1 2 3... einer beliebigen ebenen Curve $abcd\ldots rs\ldots w$ im allgemeinen ebenfalls eine Curve ist.

1147. Wieviele Evolventen kann man zu einer gegebenen ebenen Evolute construieren?

Unendlich viele. Denken wir uns in Fig. 140 sei 0,1,2 ... 8, ... 17, 18, ... eine Curve mit einer Spitze in 8. Die Gerade oa sei eine Tangente an diese Curve, welche als eine Evolute angesehen werden soll, und a sei ein beliebiger Punkt in der erwähnten Tangente. Soll nun durch a eine der Evolute entsprechende Evolvente $abc\ldots w$ construiert werden, so denke man sich in a treffe ein sehr kurzer Kreisbogen ein, dessen Mittelpunkt o ist. In a schliesst sich der folgende unendlich kurze Kreisbogen ab an, dessen Mittelpunkt ebenfalls in der Tangente ao aber am anderen Ende des Linienelementes 0, 1 liegt. Dieser Kreisbogen ab reicht bis an die Verlängerung des nächsten Linienelementes 1, 2 der Evolute. Der nächste Kreisbogen bc erhält sein Centrum an dem auf 1 folgenden Ende 2 des Linienelementes 1, 2 und reicht bis an die Verlängerung des Linienelementes 2, 3 der Evolute.

Aus diesem Vorgange sieht man ein, dass zu der gegebenen Evolute stets eine andere Evolvente gefunden wird, wenn man in der Tangente des Punktes *o* den Punkt *a* in anderer Entfernung von *o* wählt.

1148. Die Entstehung einer Evolvente in Fig. 139 lehrt, dass die Evolvente eine stetig gekrümmte Linie, selbst in dem Falle ist, wenn die Evolute die Gestalt eines Polygons besitzt. In Fig. 140 wird demnach die Evolvente ebenfalls stetig gekrümmt sein, wiewol die Evolute in 8 ein Eck besitzt.

1149. Wie wird man zu einer gegebenen ebenen Curve *abc ... m ... w* eine Evolute construieren?

Man wird die Curve in kleine Bogen *ab*, *bc*, ... *ik*, *kl*, .. zerlegen, jeden derselben als einen Kreisbogen betrachten, in allen Punkten *abc ... hik ... rs ... w* Senkrechte auf die Bogenelemente errichten, alsdann müssen diese Senkrechten Tangenten an die zu suchende Evolute sein. (Der Beweis folgt aus der Evolventen-Construction zu gegebener Evolute (1147.)

Zieht man an alle Tangenten eine sie berührende Curve, so ist die Evolute gefunden.

1150. Wie pflegt man die Krümmung für irgend einen Punkt *m* einer ebenen Curve auszudrücken?

Durch einen Bruch. Der Zähler ist die Einheit, der Nenner aber der Krümmungshalbmesser (*m*, 12 Fig. 140) des Curvenpunktes *m*. Wäre nun beispielsweise in *ab* der Radius 1, *a* als Einheit angenommen worden, so wäre auch die Krümmung des Bogenelementes *ab* als Einheit für die Krümmungsmasse anzusehen. Fände sich etwa, dass der Radius in *m* gleich 1·8. (*a*, 1) ist, so ist die Krümmung in $m = \frac{1}{1 \cdot 8} = 0{\cdot}55$ der Krümmung in *a*. Wird ein Krümmungshalbmesser unendlich gross, so ist die Kreisperiferie geradlinig, folglich die Krümmung $= \frac{1}{\infty} =$ Null, wie es sein soll.

1151. Was geschieht mit der Evolute, wenn die Krümmung der Evolvente bis zu einem Punkte *h* (Fig. 140) ab- und von da an wieder zunimmt?

Die Evolute erhält ein Eck, wie dies Fig. 140 in 8 zeigt.

Sind die in einem Ecke 8 der Evolute zusammentreffenden Teile mit ihren convexen Seiten der concaven Seite der Evolvente zugewendet, so hat die Evolvente in dem Elemente *hi*,

welches dem Evoluteneck 8 entspricht ein Minimum der Krümmung erreicht, indem beiderseits von hi die Grösse der Krümmung wieder zunimmt. Sind aber die in einem Evoluteneck zusammentreffenden Teile mit ihren concaven Seiten der concaven Evolventenseite zugewendet, so hat die Evolvente in der der Evolutenecke entsprechenden Periferiestelle ein Maximum der Krümmung erreicht. (Dieser Fall kommt in Fig. 140 nicht vor.)

1152. Geht aber die concave Seite einer Evolvente in die convexe Seite über (Fig. 140 in s), so besteht die Evolute aus getrennten Stücken (8, 9, 10, ... 18 und 19, 20, ...) mit einer gemeinschaftlichen Tangente, welche die Evolvente im Wendepunkt s durchschneidet.

1153. Wie kann auf eine mechanische Art zu einer Evolute eine Evolvente gezeichnet werden?

Man denkt sich über die Curve 0, 1, 2, ... 7, 8 in Fig. 140 einen feinen biegsamen aber undehnbaren Faden gespannt, welcher bis a reicht. Befindet sich in a ein zeichnender Stift, den man mit dem Faden in der Curvenebene so weiter bewegt, dass der Faden stets Tangente an die Evolute bleibt, so beschreibt a die Evolvente $abcd$ ... Gelangt a nach hi, so wird von da an, sich der Faden auf der Curve 8, 9, 10, so lange aufwickeln, bis a nach s gelangt. Soll von hier an der Stift a die Curve bis w weiter beschreiben, so muss der Faden von der Curve 8, 9, ... 18 losgelassen, über 19, 20, 21 ... gespannt, und von da abgewickelt werden.

Es bietet uns somit die Curve 0, 1, ... bis 22 das Beispiel einer unstetigen Curve.

1154. Denken wir uns in Fig. 140 seien die Evolvente und die Evolute die Basislinien von senkrechten Cylinderflächen, so sehen wir ein, dass eine jede Tangentenebene der Evolutenfläche die Evolventenfläche senkrecht durchschneidet; auch sehen wir ein, dass eine Cylinderfläche in einem gegebenen Strale f nur von einer einzigen Kreiscylinderfläche am innigsten berührt werden kann, und dass der Radius von der Basis dieses Kreiscylinders gleich dem Krümmungshalbmesser $f6$ der Evolvente $abcd$ ...) für den Punkt f ist. Der erwähnte senkrechte Kreiscylinder ist dessbalb auch als ein Krümmungscylinder der gegebenen Cylinderfläche zu bezeichnen.

1155. Wird ein Kreis als Evolute gewählt, so entsteht eine Kreisevolvente, welche der Lernende mit Zuhilfenahme von (1124) construieren wolle.

1156. Die Evolute eines Kreises ist ein Punkt. Die Evolute einer Ellipse besitzt vier Spitzen und zeigt an, dass in den Endpunkten der grossen Axe Maxima, in den Endpunkten der kleinen Axe Minima der Krümmung der Ellipse vorhanden sind.

1157. Kann man eine cylindrische Evolventenfläche aus der Evolutenfläche durch Rollen ableiten?

Denken wir uns in Fig. 139 eine unbegrenzte Ebene E an die Seitenebene $a_1 b_1$ angelegt; betrachten wir die Gerade a_1 als beschreibenden Stral und lassen wir die Ebene E an dem Prisma $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ rollen, so beschreibt der Stral a_1 genau dieselbe Rollfläche, welche a_1 vorhin als Evolventenfläche beschrieb.

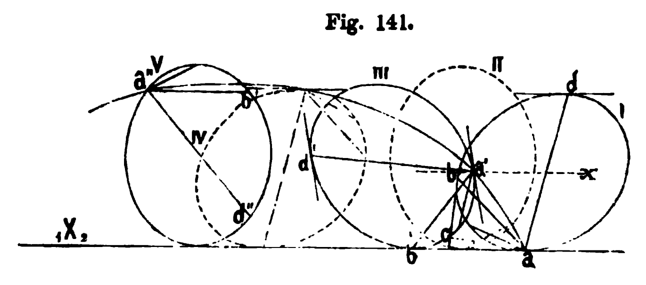
Es ist sonach eine Kreisevolventenfläche eine Stralenfläche, welche bei dem Rollen einer Ebene um einen senkrechten Kreiscylinder durch eine zu den Cylinderstralen parallele Gerade beschrieben wird. (Wie lautet dieser Satz allgemein?)

Construction der Rollflächen, welche durch Rollen eines Cylinders auf einer Ebene entstehen. Gemeine und sfärische Kreis-Cykloide.

§. 56.

1158. Wie construiert man die von einem Strale einer auf einer Ebene rollenden Cylinderfläche beschriebene Rollfläche?

Fig. 141.



In Fig. 141 liege die Tafel, auf welcher der Cylinder rollt, horizontal. Eine Bildebene II werde senkrecht zu den Cylinderstralen gestellt, folglich zeigt der rollende Cylinder und sonach auch die Rollfläche im zweiten Bilde die Nullseite, wesshalb es

genügend ist, blos die zweiten Bilder beider Stralenflächen zu zeichnen. Der Einfachheit wegen sollen auch die Projections-Indices 2 weggelassen werden.

In Fig. 141 sei der im Rollen von rechts gegen links begriffene Cylinder zuerst in jener Stellung I gezeichnet, bei welcher eben der beschreibende Stral a in der Tafel I liegt. Voraussichtlich wird beim Weiterrollen der von der Tafel I entfernte Stral b in die Ebene I zu liegen kommen und wird es sich nun darum handeln zu bestimmen, welche Lage dann der Stral a einnehmen wird, wenn der rollende Cylinder mit b in die Tafel I gelangt.

Um diese Lage auszumitteln, denken wir uns den beschreibenden Stral a mit b durch eine Ebene ab verbunden, und denken uns auch die Tangentenebene bc längs des Strales b gelegt, so ist klar, dass, sobald der Stral b in die Ebene I kommen wird, auch die Tangentenebene bc mit der Tafel I zusammenfallen muss. Nun ändert sich aber während des Rollens die Entfernung des Strales a von der Tangentenebene bc nicht, woraus sofort folgt, dass der Stral a in einer zur Tafel I parallelen Ebene liegen muss, die von der Tafel I ebensoweit entfernt ist, wie der Stral a von der Tangentenebene bc. Zieht man sonach im Abstande $= ac$ eine Parallele x zu ${}_1X_2$, so muss der Stral a in seiner Neulage a' in der durch x gehenden Horizontalebene liegen.

Wird nun ein kleines Bogenstück der Curve I, welches man als eine gerade Strecke ansehen kann, von b aus auf der Curve bis zu a hin so oft als möglich aufgetragen, so bleibt ein kleiner Rest vor a übrig, den man als in ${}_1X_2$ liegend ansehen darf; an diesen Rest reiht man das erwähnte Bogenstückchen längs der Geraden ${}_1X_2$ ebenso oft aneinander, als es im Bogen von b bis a enthalten war, wodurch sich die Strecke ab' ergibt, welche dem Bogen ab grafisch genau an Länge gleich ist; mithin kann man auch b' als den Ort ansehen, wohin beim Rollen des Cylinders der Stral b gelangen wird.

Wenn nun mit der Sehne ba von b' aus, die zu ${}_1X_2$ parallele Gerade x durchschnitten und von den beiden Schnittpunkten der richtige benützt wurde, so ist auch die Lage a' des beschreibenden Strales a gefunden.

In Fig. 141 wurden mehrere Stellungen des beschreibenden Strales a gezeichnet, woraus sich als Nullseite der Rollfläche die

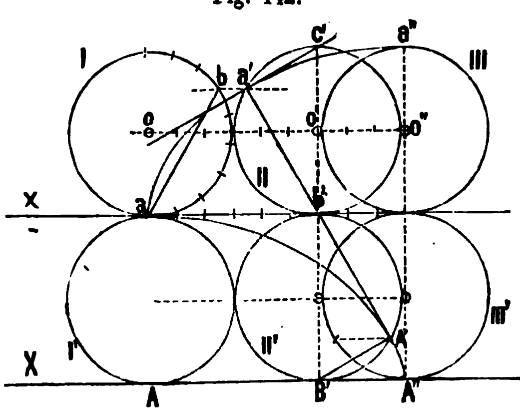
Linie $a a' a''$ ergab. Auch wurde gleichzeitig der rollende Cylinder selbst in mehreren Stellungen gezeichnet, die er während seines Rollens einnahm.

1159. Um sich eine derartige Zeichnung ohne grossen Zeitverlust anzufertigen, wird man die Form der Curve I aus steifem Papiere sehr genau ausschneiden, mehrere Punkte in der Nullseite der Rollfläche auf die Art construieren, wie es für den Punkt a' gelehrt wurde, sodann die Schablone mit den auf ihr bestimmten Punkten a und b an die Punkte a' und b' entsprechend anlegen und dieselbe mit einem feingespitzten Bleistifte umfahren.

1160. **Was versteht man unter einer gemeinen Cykloide oder Rollcurve?**

Wird eine durch Rollen eines Cylinders auf einer Ebene von einem Cylinderstrale beschriebene Roll- oder Cykloidenfläche

Fig. 142.



mit einer Ebene senkrecht zu den Cylinderstralen durchschnitten, so wird dieser Schnitt als eine gemeine Rollcurve oder gemeine Cykloide bezeichnet, weil man sich vorstellen kann, dass sie durch das Rollen des senkrechten Rollcylinderschnittes auf einer Geraden (wie dies Fig. 141 zeigt) von einem Punkte a der rollenden Curve beschrieben wird. Die Construction derselben wurde in Fig. 141 durchgeführt.

1161. **Wovon ist die Gestalt einer gemeinen Cykloide abhängig?**

Von der Gestalt der rollenden Curve.

Gewöhnlich wird nur die von **einem** Punkte eines rollenden **Kreises** beschriebene Cykloide betrachtet, weil sie bei der Con-

struction der Zähne für Zahnstangen Anwendung findet. Es sollen demnach im Folgenden ebenfalls nur Kreis-Cykloiden untersucht werden.

1162. Wie construiert man eine gemeine Kreis-Cykloide?

In Fig. 142 sei I die erste Lage des rollenden Kreises, a der beschreibende Punkt, o der Mittelpunkt, welcher sich in einer zu x parallelen Geraden oo' bewegt. Man trägt kleine gleiche Bogenteilchen auf dem Kreise I von a aus und ebenso auch die Teilchen von derselben Länge auf der Geraden x auf. Ist b irgend ein solcher Teilpunkt im Kreise I und b' der ihm correspondierende Teilstrich in x, so ist klar, dass der Punkt a von der durch b gehenden Tangente ebensoweit entfernt sein muss, wie b von der durch a gehenden Tangente x; also muss, wenn der Kreis in die Lage II gelangt, der Punkt a' von der Geraden x ebensoweit entfernt sein, wie vor dem Rollen der Punkt b von x entfernt war, also liegt a' in der durch b zu x parallel gezogenen Geraden.

Durchschneidet man mit der Sehne ab aus b', oder mit dem Kreisradius aus o' jene Parallele, so ergibt sich die Lage a', in welche a gekommen, sobald b in b' oder o in o' eintrifft.

Bestimmt man nach diesem Verfahren mehrere Zwischenpunkte und setzt auch die Punktbestimmung über a' hinaus fort, so erhält man in $aa'a''$ die Hälfte einer gemeinen Kreis-Cykloide.

1163. Wie construiert man in einem gegebenen Punkte a' (Fig. 141 und 142) einer gemeinen Cykloide eine Normale und eine Tangente?

Wie aus dem Begriffe des Rollens einer Stralenfläche auf einer Ebene (1100), und dem daraus leicht abzuleitenden Begriffe des Rollens einer Curve auf einer Geraden hervorgeht, muss eine Cykloide aus unendlich vielen, dafür aber unendlich kurzen Kreisbogen zusammengesetzt sein. Betrachten wir z. B. die Stellung III der rollenden Curve in Fig. 141, so ist eben der Punkt b' der Mittelpunkt eines sehr kleinen Kreisbogens, der durch den beschreibenden Punkt a' geht und der Cykloide angehört.

Die Normale irgend eines Kreisperiferiepunktes geht bekanntlich durch das Kreiscentrum, folglich ist $a'b'$ eine Normale im Punkte a' an die Cykloide, also ist die Tangente an die Cykloide im Punkte a' senkrecht auf $a'b'$.

1164. Wie leicht einzusehen, lässt sich allgemein der Satz aussprechen:

Rollt in einer Ebene eine Curve auf einer beliebigen Linie, so ist jederzeit die Gerade, welche den Berührungspunkt der rollenden Curve mit der zugehörigen Lage des beschreibenden Punktes verbindet, eine Normale an die Cykloide.

Ist a' eine Lage des beschreibenden Punktes einer gemeinen Kreis-Cykloide, b' der zugehörige Berührungspunkt des rollenden Kreises und c' der ihm diametral gegenüberliegende Punkt, so ist $a'c'$ die Tangente an die Cykloide im Punkte a', weil sie auf der Normale $a'b'$ (1163) senkrecht steht (350).

1165. Die Evolute einer gemeinen Kreis-Cykloide ist eine ihr congruente Curve.

Beweis. Lassen wir in einer Ebene zwei congruente Kreise I und I' (Fig. 142) auf zwei Geraden x und X, deren Abstand dem Kreisdurchmesser gleich ist, in demselben Sinne rollen und den anfänglich gemeinsamen Punkt a zwei Cykloiden $a\,a'a''$ und $a\,A'A''$ beschreiben, so stehen beide Cykloiden in dem Verhältnisse wie Evolvente und Evolute zueinander. Denn sind II und II' zwei correspondierende Lagen der rollenden Kreise, a' und A' die correspondierenden Lagen der beschreibenden Punkte, so fällt die Tangente im Punkte A' der unteren Cykloide in die Verlängerung der Normale des Punktes a' der oberen Cykloide, was auf folgende Art bewiesen werden kann:

Verbindet man in der oberen Cykloide den Punkt a' mit dem Berührungspunkte b' des rollenden Kreises II, so ist nach (1163) $a'b'$ eine Normale im Punkte a' an die Cykloide $aa'a''$; und verbindet man A' mit demselben Punkte b', so ist $A'b'$ nach (1164) eine Tangente im Punkte A' an die Cykloide $a'A'A''$.

Berechnet man den von $a'b'$ mit x gebildeten Winkel $a'b'x$, so sieht man ein, dass nach (349) $\measuredangle\, a'b'x$ den halben Bogen $a'b'$, der von der Stellung I bis zur Stellung II mit x in Berührung kam, zum Masse haben muss. Der vom Kreise I' auf X durchlaufene Weg AB' bis zur Stellung II' ist ebenso gross, also ist auch der Bogen von b' bis A' der Länge des abgerollten Bogens gleich, woraus nun folgt, dass $b'A'$ und $b'a'$ gleichlange Sehnen sein werden und demnach auch gleiche Winkel mit der gemeinsamen Tangente x einschliessen müssen, w. z. b. w. Da also die Tangente $b'A'$ wirklich in die Verlängerung der

Normale $a'b'$ fällt, so ist ersichtlich, dass nach (1149) die untere Cykloide die Evolute der oberen ist.

1166. Aus (1165) folgt der Satz:

Verlängert man bei einer gemeinen Kreis-Cykloide die Normale $a'b'$ irgend eines Punktes a' über den Berührungspunkt b' des rollenden Kreises um die Länge $a'b'$ hinaus nach $b'A'$, so ist A' ein Punkt der Evolute der gegebenen Cykloide.

1167. Ferner folgt ebenso einfach:

Verlängert man eine Tangente $A'b'$ (Fig. 142) einer gemeinen Kreis-Cykloide um die Sehne $A'b'$, die in dem zu A' gehörenden rollenden Kreise liegt, über b' hinaus nach $b'a'$, so ist a' ein Punkt jener Evolvente der Cykloide $A''A'a$, welche durch den höchsten Punkt a der Cykloide $A''A'a$ geht.

1168. Da nach (1137) eine Evolvente aus Kreisbogen zusammengesetzt werden kann, deren Centra in der Evolute liegen, so bietet der Satz (1166) das Mittel, für jedes Bogenstück einer gemeinen Kreis-Cykloide, den Mittelpunkt des Krümmungskreises zu finden, und somit die Cykloide durch Kreisbögen auszuziehen.

1169. Aus (1140) erkennt man, dass die Länge des Cykloidenbogens von a bis A' (Fig. 142) gleich der Geraden $A'a'$ oder $= 2 \,.\, A'b'$ ist. Bezeichnet man den höchsten Punkt a der Cykloide $A''A'a$ als Scheitel der Cykloide, so lautet die Gleichung $\widehat{aA'} = 2 \,.\, \overline{A'b'}$ in Worte übersetzt:

Die Länge einer gemeinen Kreis-Cykloide zwischen dem Scheitel a und einem anderen Punkte A' ist gleich der doppelten Länge jener Sehne die in der Tangente zu A' in dem zu A' gehörigen rollenden Kreise liegt.

Demzufolge ist der halbe Cykloidenbogen $aA'A''$ gleich dem doppelten Durchmesser des rollenden Kreises, oder jeder volle Bogen einer gemeinen Kreis-Cykloide ist dem achtfachen Radius des rollenden Kreises an Länge gleich.

Der Lernende wolle den Satz in (1168) auf die Flächeninhalte der rollenden senkrechten Kreiscylinderflächen und auf die von einem Strale derselben erzeugten gemeinen Kreis-Cykloidenflächen übertragen.

1170. Was versteht man unter Epicykloiden- und Hypocykloidenflächen?

Rollt eine Stralenfläche auf einer anderen Stralenfläche (1128), so beschreibt jeder Stral der rollenden Fläche eine Rollfläche. Diese wird zur **Epicykloidenfläche**, wenn das Rollen auf der **convexen** Seite der festen Stralenfläche geschieht; hingegen entsteht eine **Hypocykloidenfläche**, wenn die Stralenfläche auf der **concaven** Seite der Grund-Stralenfläche rollt.

1171. Die einfachsten Flächen dieser Art sind wieder jene, wenn ein senkrechter Kreiscylinder auf einem anderen Cylinder dieser Art rollt. Schneidet man die hier erwähnten Stralenflächen mit einer Ebene senkrecht zu den Cylinderstralen, so entstehen als Schnitte die **Kreis-Epicykloiden** und **Kreis-Hypocykloiden**.

Die Construction dieser Linien wird der Lernende leicht selbst erfinden, sobald er bedenkt, dass die Construction ganz dieselbe ist, wie jene der Cykloide $aa'a''$ in Fig. 142, wenn nur statt der unendlich grossen Kreise x und $oo'o''$ (unendlich grosse Kreise sind bekanntlich gerade Linien), Kreise mit endlich gelegenem gemeinschaftlichen Centrum gewählt werden. Ein Unterschied wird sich in den auf den Bögen liegenden gleichen Teilchen dadurch bemerkbar machen, dass die auf der Linie $oo'o''$ liegenden Teile nicht mehr jenen des Bogens x und des Bogens auf dem rollenden Kreise gleich sein werden.

Fig. 143.

Statt der durch b zu x parallelen Geraden $b\,a'$ wird ein durch b gehender mit x concentrischer Bogen entstehen.

1172. Auch bei den Kreis-Epicykloiden und Hypocykloiden bestehen nicht besonders schwer ableitbare Gesetze, die Evoluten zu construieren, nur sind die Formeln, welche man für den Krümmungsradius findet, compliciert, weil in ihnen mehrere Radien vorkommen. Die Evoluten sind gleichfalls Epi- oder Hypocykloiden.

1173. **Was versteht man unter verlängerten oder verkürzten Hypocykloidenflächen?**

Verbindet man mit einer rollenden Stralenfläche f einen durch ihren Scheitel s gehenden Stral m, so erzeugt derselbe beim Rollen von f auf einer anderen Stralenfläche F (also auch bei

dem Rollen auf einer Ebene), eine verlängerte Cykloidenfläche, wenn er auf der convexen Seite der rollenden Fläche liegt; hingegen eine verkürzte Cykloidenfläche, wenn er (m) auf der concaven Seite von f liegt.

Demgemäss unterscheidet man auch verlängerte und verkürzte Kreis- (gemeine, Epi- und Hypo-) Cykloiden.

1174. Wie construiert man eine verlängerte oder verkürzte Cykloide?

In Fig. 143 sei x eine beliebige Linie (speciell z. B. eine Gerade), auf welcher eine Curve I rollt, mit der ein beschreibender Punkt a fest verbunden ist. Bei dem Rollen wird einmal der Punkt c in die Grundlinie x nach c' gelangen, (dabei ist die Länge von b bis c, in kleinen Bogenteilchen gemessen, gleich der Länge der Linie x von b bis c'), und nun frägt es sich, welchen Ort a' nimmt dann der beschreibende Punkt a ein?

Wenn c nach c' kommt, muss die Tangente cd mit der durch c' an die Linie x gezogenen Tangente zusammenfallen. Zieht man nun im Abstande $= ad$ zu der durch c' gehenden Tangente an x eine Parallele x', und durchschneidet mit der Distanz ca von c' aus diese Parallele x', so ergibt sich hiedurch die Lage von a'. Bestimmt man genügend viele Punkte auf diese Art, so kann man schliesslich die Cykloide zeichnen. In Fig. 143 würde eine gemeine verlängerte Cykloide entstehen.

1175. Die Tangente in a' an die Cykloide ist wieder auf der Geraden $a'c'$ senkrecht, welche a' mit dem Berührungspunkte c' der zugehörigen Lage der rollenden Curve und der Linie x, verbindet (1164).

1176. Wie entsteht die gemeine sfärische Kreis-Cykloide?

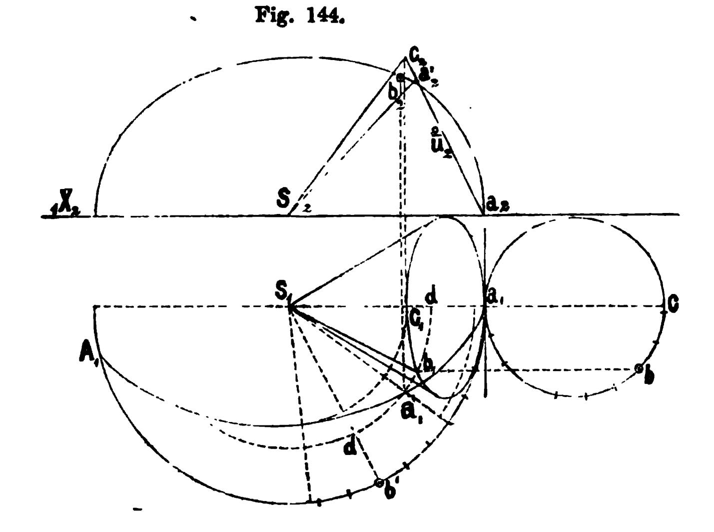
Wenn ein senkrechter Kreiskegel auf einer Ebene rollt, so beschreibt jeder Flächenstral eine konische Cykloidenfläche. Betrachtet man aber den Weg, welchen irgend ein Punkt eines solchen Strales während des Rollens zurücklegt, so gewinnt man eine richtige Vorstellung einer Cykloide, die ihrer ganzen Ausdehnung nach auf einer und derselben Kugelfläche liegt, deren Centrum im Scheitel S der Stralenfläche sich befindet.

1177. Die Construction derselben ist sehr einfach. In Fig. 144 wurde $S_1 S_2$ und die Länge $S_1 a_1$ der Stralen des begrenzten Kegels angenommen. Um die Lage der Nullseite $\mathring{u}_2$ der Basisebene u in der Bildebene II zu finden, durchschneidet man mit

dem Durchmesser ca_1 aus a_2 den Kreis, welcher aus S_2 mit dem Radius $S_2 a_2$ ($S_1 a_1$ ist || ${}_1X_2$) beschrieben wird, wodurch sich c_2 ergibt. Ermittelt man c_1, so ist $a_1\, c_1$ die halbe grosse Axe jener Ellipse, welche das erste Bild der Kreisbasis des Kegels ist.

In der Umlegung des Basis-Kreises werden von a_1 aus beliebige aber gleich lange und kleine Bogenteilchen, ebenso auch auf dem mit dem Radius $S_1\, a_1$ beschriebenen Kreise aufgetragen. Ist z. B. b der siebente Teilstrich, und rollte der Kegel solange, bis der Stral $S_1\, b_1$, $S_2\, b_2$ nach Sb' kommt, so ist leicht einzu-

Fig. 144.



sehen, dass bei dieser Stellung des rollenden Kegels der Stral Sa links (von S_1 aus gesehen) von der durch $S\,b'$ gelegten Verticalebene dieselbe Lage einnehmen muss, wie sie der Stral $S\,b$ in der ersten Stellung des Kegels gegen die durch Sa_1 gelegten Verticalebene, auf der rechten Seite einnahm. Wenn man demnach im Grundrisse durch b_1 einen Kreis dd' aus S_1 zwischen $S_1\, a_1$, $S_1\, b'$ beschreibt und die Sehne $d\,b_1$ nach $d'\, a'_1$ überträgt, so ist a'_1 ein Punkt im ersten Bilde der gemeinen sfärischen Kreis-Cykloide. a' muss in derselben Höhe über der Bildebene I liegen, wie b in der ersten Stellung des Kegels, also liegt a'_2 in einer durch b_2 zu ${}_1X_2$ parallel gezogenen Geraden.

Auf diese Art von genügend vielen Punkten der Cykloide die Bilder bestimmt, erhält man schliesslich das Bild der Cykloide selbst. (Wäre der Radius des Basiskreises die Hälfte vom Ra-

dius des Kreises $a_1 A_1$, so hätte die Gerade $a_1 A_1$ durch S_1 gehen müssen.)

1178. Steht ein senkrechter Kreiskegel mit seiner Basis auf irgend einer Ebene, z. B. der Bildebene I und rollt ein anderer senkrechter Kreiskegel auf der convexen Seite des ersteren, so beschreibt jeder Flächenstral eine konische Epicykloidenfläche und jeder Punkt eines Strales eine sfärische Kreis-Epicykloide. Die Construction ihrer Bilder ist fast ganz genau dieselbe wie jene der gemeinen sfärischen Kreis-Cykloide, weil die Ebene des rollenden Kreises ebenfalls eine unveränderliche Neigung gegen die Bildebene I beibehält.

Die sfärischen Kreis-Epicykloiden finden ihre Anwendung bei der Construction der Zähne für Kegelräder.

Die dreiseitige Körperecke.

§. 57.

1179. An die Netze der Pyramidenflächen knüpfen sich noch andere Untersuchungen an, nämlich darüber, wie und unter welchen Bedingungen es möglich ist, aus dem Netze die Pyramide selbst wieder herzustellen.

Bei einer geschlossenen einfachen Pyramidenfläche, welche häufig auch ein Körpereck oder ein n-Kant genannt wird, wenn n-Kanten im Scheitelpunkte O zusammentreffen, müssen wir die Seitenwinkel, das sind jene ebenen Winkel, welche in den Seitenebenen liegen und von den Kanten eingeschlossen werden, von den Kantenwinkeln unterscheiden, welche nichts anderes als die Neigungswinkel von zwei Seitenebenen der Pyramidenfläche sind, welche sich in einer Kante derselben schneiden.

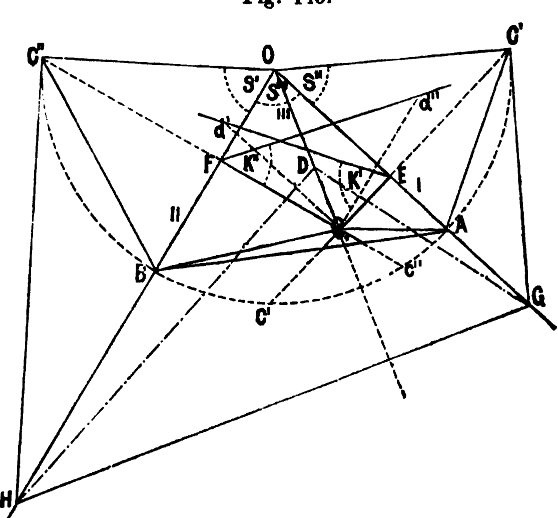
1180. In der Kristallografie werden nur die Kantenwinkel eines Körperecks in Betracht gezogen; in der sfärischen Trigonometrie, in welcher der Scheitel O einer Körperecke der Mittelpunkt einer Kugel ist, auf deren Oberfläche die Seitenebenen der Körperecke ein sfärisches Polygon erzeugen, kommen beide Arten von Winkel in Betracht. Die als Seitenwinkel bezeichneten Winkel der Körperecke sind die Maße der Seiten des sfärischen Polygones, während die Kantenwinkel mit den eigentlichen sfärischen Winkeln, denen sie entsprechen, von gleicher Grösse sind.

1181. In einem Dreikante bezeichnen wir die drei Kanten mit I, II und III; jeden Seitenwinkel mit s und zwar den von

I mit II gebildeten mit s''', den von I mit III eingeschlossenen durch s'' und endlich jenen, der zwischen II und III liegt, mit s'. Von den Kantenwinkeln, werde jener, dessen Scheitel in der Kante I sich befindet, mit k', der zweite, dessen Scheitel in II liegt, mit k'' und der dritte endlich mit k''' bezeichnet.

1182. Ist das Netz einer mehrseitigen Pyramide in der Art gegeben, wie es bei der Wälzung einer Pyramidenfläche auf einer Ebene entsteht, und man will aus dem Netze wieder die Pyramide herstellen, so ist es erforderlich, die Kantenwinkel der Pyramidenfläche oder Körperecke zu kennen. Denn man kann dann mit der ersten Seitenebene des Netzes eine Drehung

Fig. 145.



um die mit der nächsten Seitenebene gemeinsame Kante entsprechend dem Kantenwinkel beginnen, alsdann die gedrehte Seitenebene sammt der nächsten Seitenebene des Netzes wieder um den entsprechenden Kantenwinkel zurückrollen und so fortfahren, bis aus dem Netze die rollende Pyramide dargestellt ist.

In die dabei durchzuführenden allgemeinen Constructionen kann hier nicht eingegangen werden und müssen sich die Untersuchungen lediglich auf das Wesentliche des Dreikantes beschränken.

1183. Es sind drei Seitenwinkel $s's''s'''$ eines Dreikantes gegeben; man soll das Dreikant herstellen,

d. h. man soll die Lage der drei Kanten gegeneinander bestimmen.

Denken wir uns in Fig. 145 aus O als Centrum mit irgend einem Radius eine Kugel beschrieben, so wird diese auf den Kanten des Körpereckes gleiche Längen begrenzen, welche in Fig. 145 im Netze mit OC', OA, OB, OC'' angegeben sind.

Dreht man die Gerade OC' um OA, so bewegt sich C' in einem zu OA senkrechten Kreise, und dreht man OC'' um OB, so beschreibt wieder C'' einen auf OB senkrechten Kreis.

Beide Kreise liegen aber nothwendigerweise auf der vorerwähnten Kugel, folglich können sie sich schneiden. Ob sie aber wirklich sich schneiden, ist eine andere Frage; denn man kann auf einer Kugel ganz gut zwei Kreise ziehen, die sich nicht schneiden.

Um diese Umstände in der Fig. 145 zu untersuchen, bemerke man, dass jeder der beiden Kreise auf der Bildebene I, in welcher AOB liegt, senkrecht steht; dass sich beide als Sehnen $C'c'$, $C''c''$ in dem aus O durch AB beschriebenen Kreise projicieren. Schneiden sich die Kreise auf der Kugel, so schneiden sich auch ihre orthogonalen Projectionen $C'c'$, $C''c''$ in einem Punkte C_1, welcher sofort die orthogonale erste Projection der beiden Kreisschnittpunkte C ist, die in einer zur Ebene OAB senkrechten Kugelsehne liegen. Verbindet man C_1 mit S, so ist die dritte Kante OC abgebildet. Wählt man C über der Bildebene I, so wird OC_1 gezogen, im anderen Falle punktiert.

1184. Würden sich $C'c'$ und $C''c''$ nicht schneiden, so können sich die von C' und C'' beschriebenen Kreise auch nicht schneiden, und man erkennt ohneweiters, dass dieser Fall dann eintritt, wenn die Winkel AOc' und BOc'' sich nicht übergreifen, folglich kann man sagen, weil $\measuredangle AOc' = \measuredangle AOC'$, und $\measuredangle BOc'' = \measuredangle BOC''$ ist:

In jedem Dreikant ist die Summe von je zwei Seitenwinkeln grösser als der dritte Seitenwinkel. Dieser Satz ist gleichbedeutend mit dem aus der sfärischen Trigonometrie: In jedem sfärischen Dreiecke ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite.

Ist die Summe zweier Seitenwinkel gleich dem dritten, so fallen alle drei Seitenebenen in eine einzige Ebene zusammen, d. h. das Dreikant verwandelt sich in einen ebenen Dreistral.

1185. Sucht man die Projectionen der den Winkeln s' und s'' entsprechenden Seiten des sfärischen Dreiecks, so ist auch dieses orthogonal abgebildet.

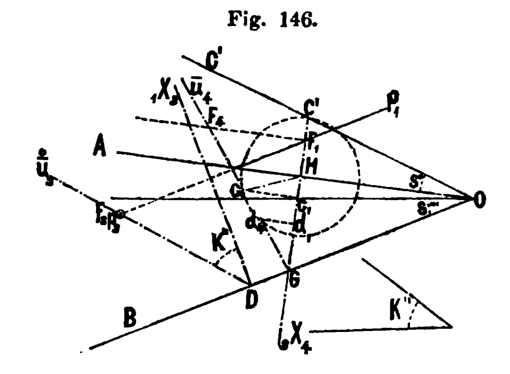
Um den Bogen AC_1 zu construieren, ist nur zu bemerken, dass $\triangle\ OAC'$ mit $\triangle\ OAC_1$ perspectivisch affin liegt, für welche Lage OA die Begegnungsgerade ist. C' ist mit C_1 verwandt.

Ebenso ist auch $\triangle\ OBC''$ mit OBC_1 perspectivisch affin.

1186. **Wie construiert man die Kantenwinkel der aus drei Seitenwinkeln construierten dreiseitigen Körperecke?**

Wir wählen in Fig. 145 in der Kante OC den Punkt C und führen durch C drei Ebenen. Die erste Ebene senkrecht zu OA geht durch C_1, schneidet OA in E, und OC' in C'. Legt man diese Ebene um ihre Spur $C_1 C'$ in die Bildebene I um, so muss C in die zu $C_1 C'$ senkrechte durch C_1 gehende Gerade dorthin kommen, wo der aus E mit dem Radius EC' beschriebene Kreis sie durchschneidet, nämlich nach d', folglich ist Ed' die Spur der Seitenebene CAO in der durch C_1 zu OA senkrecht geführten Ebene, daher ist $\measuredangle\ d'EC_1 = k'$ das Mass der Neigung der Ebene CAO gegen BAO.

Fig. 146.



Auf gleiche Weise construiert man den Winkel $d''FC_1 = k''$.

1187. Führt man aber durch C eine Ebene senkrecht auf OC_1, so werden die Schnitte mit den Seitenebenen COA und COB gerade Linien $C'G$, $C''H$ sein, die im Netze beziehungsweise auf OC' und OC'' senkrecht stehen. Verbindet man dann G mit H, so muss zur Probe GH auf OC_1 senkrecht sein (705). Construiert man mit den Seiten GC' und HC'' über GH ein Dreieck GDH, so fällt D in die Gerade OC_1 und $\measuredangle\ GDH$ ist das Mass des Kantenwinkels k'''.

1188. **Man soll eine dreiseitige Körperecke darstellen, wenn zwei Seitenwinkel $s''s'''$ und der eingeschlossene Kantenwinkel k' gegeben sind.**

Nehmen wir an, in Fig. 145 seien $AOC' = s''$, $AOB = s'''$ die beiden Seitenwinkel, deren Ebenen so gegeneinander geneigt werden sollen, dass sie einen gegebenen Winkel k' zum Maße haben. Zu diesem Behufe legt man eine Bildebene III senkrecht auf die gemeinsame Kante OA, dann müssen die Ebenen AOC' und AOB, sobald sie in die richtige Lage gelangen, im dritten Bilde die Nullseiten zeigen, welche offenbar miteinander den Neigungswinkel k' einschliessen. In der Fig. 145 ist $\measuredangle c'Ed' = k'$, also sind Ed' und EC_1 die Nullseiten der Ebenen AOC und AOB, von welchen letztere in der Bildebene I liegt.

Um den Punkt C_1 (erstes Bild des in die richtige Lage C gedrehten Punktes C') zu finden, wird nur $C'E$ nach Ed' aufgetragen und durch d' eine Ordinale zu $C'c'$ gezogen, welche $C'c'$ in C_1 schneidet. Durch OA, OB, OC_1 ist das Bild des Dreikantes hergestellt.

Wird $C_1 C''$ senkrecht auf BO soweit gezogen, bis der durch C' gezogene Kreis $C'AB$ in C'' getroffen wird, so ist BOC'' der dritte Seitenwinkel s'.

Die Kantenwinkel k'' und k''' werden nun wie in (1186) construiert.

1189. Man soll aus zwei Seitenwinkeln $s''s'''$ und einem nicht eingeschlossenen Kantenwinkel k'' die dreiseitige Pyramidenfläche construieren.

In Fig. 146 sind $AOC' = s''$, $AOB = s'''$ die gegebenen Seitenwinkel, K'' der gegebene Kantenwinkel und ist OB die dem Seitenwinkel s'' gegenüberstehende Kante im zu suchenden Dreikante, mithin muss der Scheitel des Winkels k'' in die Gerade OB zu liegen kommen.

Man lege eine Bildebene III senkrecht auf OB und zeichne an ${}_1X_3$ in D den Winkel k'' an, so erhält man die Nullseite $\mathring{u}_3$ der Ebene u, in welcher der unbekannte dritte Seitenwinkel s' liegen wird. Um die Ebene u durch zwei parallele Gerade in der Bildebene I abzubilden, zieht man noch das erste Bild p_1 einer ersten Spurparallelen p, deren drittes Bild p_3 ein Punkt in $\mathring{u}_3$ sein muss.

Nun dreht man den Stral OC' um OA so lange, bis er in die Ebene u gelangt. Um die Drehung auszuführen, lege man durch den beliebig in OC' gewählten Punkt c' des zu drehenden Strales eine Bildebene IV senkrecht auf die Drehungsaxe OA, in welcher der mit dem Radius Hc' beschriebene Drehungskreis des Punktes c' in wahrer Gestalt erscheint.

Der Schnitt der Bildebene IV mit der ersten Spurparallelen p gibt den Punkt F, dessen viertes Bild F_4 aus $F_1 F_3$ bestimmt werden kann, und G ist der Schnitt von IV mit $\bar{u}_1$, mithin ist GF_4 die vierte Spur der Ebene u.

Die $\bar{u}_4$ wird vom Drehungskreise c' in zwei Punkten c_4 und d_4 getroffen. Verbindet man c, dessen zugeordnete Projectionen $c_4 c_1$ sind, mit O, so ist Oc_1 ein Bild des Strales Oc von der Beschaffenheit, dass er mit OA und OB die gesuchte Körperecke liefert. Verbindet man H mit c_4, so ist das Dreieck GHC_4 die wahre Gestalt des Schnittes der Bildebene IV mit dem Dreikante und $\sphericalangle\ GHc_4$ ist das Mass des dem unbekannten Winkel s' gegenüberliegenden Kantenwinkels k'. Die übrigen Stücke des Dreieckes sind leicht zu bestimmen.

Fig. 147.

1190. Nun haben wir noch den zweiten Punkt d, dessen viertes Bild d_4 gefunden wurde, in Betracht zu ziehen.

Denken wir uns durch den Punkt $d_1 d_4$ die Kante dO gezogen, so bestimmen die drei Kanten AO, BO, dO abermals ein Dreikant von der gegebenen Eigenschaft, dass der dem $\sphericalangle\ s''$ gegenüberliegende Kantenwinkel k_1' eine gegebene Grösse besitzt, folglich lässt die Aufgabe zwei Auflösungen zu.

Würde der Radius Hc' so gross geworden sein, dass der Punkt d_4 unter die Ebene I gekommen wäre, dann würde der dem $\sphericalangle\ s''$ gegenüberliegende Kantenwinkel nicht $= k''$, sondern $= 180° - k''$ sein; die Aufgabe liesse sonach nur eine Auflösung zu.

Tangiert der Kreis die $\bar{u}_4$ so ist ebenfalls nur eine Auflösung vorhanden.

Schneidet der Kreis mit dem Radius Hc' die $\bar{u}_4$ nicht, so lässt sich aus den gegebenen Stücken kein Dreikant construieren.

1191. Denken wir uns in Fig. 146 den Winkel s'' gleich dem Winkel s''', so sehen wir ein, dass der Punkt d_4 mit G zusammenfallen muss, dass daher in diesem Falle auch nur eine Auflösung vorhanden ist; wird aber der Winkel s''' grösser als

der Winkel s'', dann muss d_4 zwischen G und c_4 fallen, folglich kann man sagen:

Sind von einem Dreikante zwei Seitenwinkel und der dem kleineren gegenüberliegende Kantenwinkel gegeben, so kann man aus diesen Bedingungen zwei Dreikante construieren.

Liegt aber der Kantenwinkel dem grösseren Seitenwinkel gegenüber, so gibt es nur ein der Aufgabe genügendes Dreikant.

1192. Bisher waren die Fälle gegeben, in welchen mindestens zwei Seitenwinkel als bekannt vorkamen; nun sollen jene drei Fälle besprochen werden, in welchen wenigstens zwei Kantenwinkel vorkommen.

Man soll ein Dreikant construieren, wenn ein Seitenwinkel und die ihm anliegenden zwei Kantenwinkel gegeben sind.

Der Lernende wolle sich selbst eine Figur hiezu entwerfen. Ist $AOB = s'''$ der gegebene Seitenwinkel, OA die Kante I für den Winkel k', $OB =$ II für den Winkel k'', so lege man eine Bildebene III senkrecht auf OA, eine Bildebene IV senkrecht auf OB, betrachte OA als die erste Spur einer Ebene u, OB als die erste Spur einer Ebene v, welche Ebenen mit AOB respective die Winkel k', k'' einschliessen, suche von jeder dieser Ebenen die Nullseite, also $\mathring{\bar{u}}_3$, $\mathring{\bar{v}}_4$, und schneide beide Ebenen mit einer zur Bildebene AOB parallelen Ebene w, so muss durch den Schnittpunkt der beiden entstehenden ersten Spurparallelen die gesuchte dritte Kante gehen.

1193. Man soll aus einem Seitenwinkel s', einem anliegenden k'' und einem gegenüberliegenden Kantenwinkel k' ein Dreikant construieren.

Man setze voraus, dass eine Seitenebene des Dreikantes in die Bildebene I zu liegen kommen soll, und dass Bildebene I jene Seitenebene sei, mit welcher die beiden anderen Seitenebenen die gegebenen Kantenwinkel k' und k'' einschliessen.

Zieht man in Fig. 147 durch den Scheitel O eine Gerade $\bar{u}_1$, durch welche die Ebene u des gegebenen Seitenwinkels s' gehen soll, so muss diese Ebene unter dem Winkel k'' zur Bildebene I geneigt sein. Legt man jetzt eine Bildebene III senkrecht zur Geraden $\bar{u}_1$, so erhält man durch Ansetzen des Winkels k'' an die Axe ${}_1X_3$ im Punkte D, die Nullseite $\mathring{\bar{u}}_3$ von u.

Wird der gegebene Seitenwinkel s' in der Bildebene I an $\bar{u}_1$ in BOC' angesetzt und irgend ein Punkt C' seines zweiten Schenkels in die Ebene u nach $C_2 C_1$ gedreht, so sind OB und OC schon zwei Kanten des gesuchten Dreikantes.

Nun denke man sich die zur Bildebene I senkrechte Gerade CC_1 als Axe eines senkrechten Kreiskegels, ziehe $C_3 E_1$ unter dem Kantenwinkel k' zur Axe ${}_1X_3$, beschreibe aus C_1 mit $C_1 E_1$ als Radius in der Ebene I die Basislinie des Kegels und ziehe von O die Tangenten an den Kreis, so ist OA die Spur einer Ebene, welche mit der Bildebene I den gegebenen Kantenwinkel k' einschliesst (1076, 4), mithin ist OA die dritte Kante des gesuchten Dreikantes.

1194. Die zweite Tangente, welche man in Fig. 147 noch von O an den Kreis ziehen könnte, gibt keine Auflösung der Aufgabe, weil die durch sie und die Kante OC gelegte Ebene mit der Bildebene I wol den Winkel k'' einschliesst, dieser aber nicht im Innern des Dreikantes liegt, wie es stets stillschweigend vorausgesetzt wird.

Bei Berücksichtigung dieses letzteren Umstandes ergibt sich nicht selten, dass aus gegebenen Daten ein Dreikant nicht constuiert werden kann.

Wird k' von einer solchen Grösse gewählt, dass der Punkt O innerhalb des Kreises E_1 zu liegen kommt, dann lässt die Aufgabe keine Lösung zu.

1195. Man soll ein Dreikant aus den drei gegebenen Kantenwinkeln $k' k'' k'''$ construieren.

Um eine Einsicht in die wesentlichen Beziehungen zwischen den Seiten- und Kantenwinkeln eines Dreikantes zu gewinnen, construiere sich der Lernende etwa aus steifem Papiere ein Dreikant mit den Seitenwinkeln $s' s'' s'''$, welchen die Kanten I, II, III gegenüberliegen. Nun wähle er am einfachsten im Innern des Eckes einen Punkt P und fälle von P auf jede Seitenebene ein Perpendikel, welches mit $p_1 p_2$ oder p_3 bezeichnet werden soll, je nachdem es auf s', s'' oder auf der Ebene s''' senkrecht steht. Diese Lothe bilden ein neues Dreikant P von folgenden Eigenschaften:

1. In jeder Seitenebene desselben liegt ein Viereck. Zwei Seiten desselben sind Lothe die von P auf die Ebenen von O gefällt wurden, und zwei Seiten entstehen durch den Schnitt der

Seitenebene von P mit jenen zwei Seitenebenen von O, auf welchen die zwei Lothe senkrecht stehen.

2. Jedes dieser Vierecke besitzt zwei rechte Winkel, folglich ist die Summe der übrigen zwei Winkel gleich zwei Rechten. Von diesen beiden Winkeln ist aber der eine ein Seitenwinkel des Dreikantes P, der andere ein Kantenwinkel des Dreikantes O, daher kann man sagen:

Jeder Seitenwinkel eines Dreikantes P vermehrt um jenen Kantenwinkel von O, auf dessen Kante die Ebene des Seitenwinkels von P senkrecht steht, gibt 180°.

1196. Wenn die Kanten des Dreikantes von P auf den Ebenen von O senkrecht stehen, so stehen auch die Kanten von O auf den Ebenen von P senkrecht (136); folglich kann man in gleicher Art den Satz erweisen:

Jeder Seitenwinkel des Dreikantes O vermehrt um jenen Kantenwinkel von P, auf dessen Kante die Ebene des Seitenwinkels von O senkrecht steht, gibt 180°.

1197. Zwei Dreikante von der Beschaffenheit, dass ein jeder Seitenwinkel des einen den entsprechenden Kantenwinkel des anderen zu 180° ergänzt, nennt man Supplementar - Dreikante.

1198. Sind nun $k' k'' k'''$ die gegebenen Kantenwinkel des Dreikantes O und bezeichnet man die entsprechenden Seitenwinkel des Supplementar-Dreikantes P mit S', S'', S''', so ist nach (1195, 2): $S' = 180^0 - k'$, $S'' = 180^0 - k''$, $S''' = 180^0 - k'''$, folglich kennt man die Seitenwinkel des Supplementareckes P, welches nun construiert werden kann (1183). Fällt man dann von irgend einem Punkte O_1 auf die Ebenen des Supplementar-Dreikantes P senkrechte Gerade, so geben diese die Kanten des gesuchten Dreikantes O.

1199. Bezeichnet man die Kantenwinkel des Dreikantes P mit $K' K'' K'''$, so ist $s' = 180^0 - K'$, $s'' = 180^0 - K''$, $s''' = 180^0 - K'''$; also erhält man auch aus dem Supplementar - Dreikante P die Seitenwinkel des gesuchten Dreikantes O, folglich kann man mittels der gefundenen Seitenwinkel jetzt auf eine directe Art das Dreikant O construieren.

1200. **Innerhalb welcher Grenzen muss die Summe der drei Seitenwinkel, oder der drei Kantenwinkel eines beliebigen Dreikantes liegen?**

Die Summe der drei Seitenwinkel $s' s'' s'''$ kann $4R$ nicht erreichen. Construiert man eine beliebige dreiseitige einfache Pyramidenfläche aus $s' s'' s'''$, so erkennt man die Nothwendigkeit dieser Bedingung.

Die untere Grenze der Summe der drei Seitenwinkel, welche nicht erreicht werden kann, ist Null.

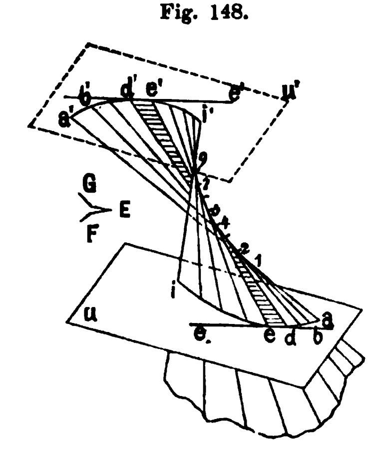
1201. Um die Grenzen für die Summe der drei Kantenwinkel $k' k'' k'''$ zu finden, denke man sich ein Supplementar-Dreikant construiert; aldann ist:

$$S' + k' = 180^0,\ S'' + k'' = 180^0,\ S''' + k''' = 180^0$$

folglich auch:

$$(k' + k'' + k''') + (S' + S'' + S''') = 540^0 = 6R.$$

Fig. 148.



Da man nun zu $(k' + k'' + k''')$ noch $(S' + S'' + S''')$ hinzufügen muss, um sechs Rechte zu erhalten, und weil andererseits die Summe $S' + S'' + S'''$ kleiner als $4R$ sein muss (1200), so schliesst man:

Die Summe der drei Kantenwinkel eines Dreikantes ist kleiner als $6R$, aber grösser als zwei rechte Winkel.

1202. Nach (1184) ist $S' + S'' > S'''$, daher ist auch $(180^0 - k') + (180^0 - k'') > 180^0 - k'''$ oder $180^0 - (k' + k'') > - k'''$, also ist $k''' > (k' + k'') - 180^0$, d. h.:

Jeder Kantenwinkel eines Dreikantes ist grösser als der Ueberschuss der Summe der beiden anderen Kantenwinkel über 180^0.

Wenn daher die drei Kantenwinkel eines Dreikantes zur Construction desselben angegeben werden, so müssen sie die eben aufgestellten Bedingungen erfüllen, wenn das Dreikant nicht unmöglich werden soll.

b) Entwickelbare Flächen.

§. 58.

1203. **Kann eine unbegrenzte Gerade stetig so weiter bewegt werden, dass jede Lage nur ihre unmittelbar vorhergehende, also auch die darauffolgende schneidet?**

Denken wir uns eine unebene Curve und verlängern wir jedes ihrer Linienelemente zu einer unbegrenzten Tangente, so findet diese Eigenschaft statt und liegt zwischen je zwei benachbarten Tangenten ein unendlich schmaler, aber unendlich langer ebener Streifen, ein ebenes Seitenelement (1054); der Inbegriff aller dieser Seitenelemente macht eine krumme Fläche aus, die zu den allgemeinen entwickelbaren Flächen gehört.

1204. In Fig. 148 wurde ein Stück 1, 2, ... 7, 8, 9 einer als uneben vorausgesetzten Curve abgebildet. Zieht man die Tangenten $1, 2 = aa'$; $2, 3 = bb'$; u. s. w. und setzt voraus, dass $a, b, c, d, \ldots$ die Schnitte dieser Stralen mit einer Ebene u sind, so lässt sich auch oben diese von den Tangenten gebildete entwickelbare Fläche sehr leicht durch einen zur Ebene u parallelen Schnitt begrenzen. Denn wenn die Fläche aus ebenen Seitenelementen besteht (ein solches wurde in der Figur schraffiert), so sind die Schnitte eines jeden mit den parallelen Ebenen u und u' parallele Linienelemente. Wird der Punkt a' als Bild des Schnittes der Ebene u' mit dem Strale aa' vorausgesetzt, so ist das Linienelement $a'b'$ parallel zu ab zu ziehen, bis bb' getroffen wird; durch b' wird $b'c' \parallel bc$ gezogen, u. s. w., womit schliesslich das Bild $a'b' \ldots i'$ des oberen Schnittes gefunden ist.

1205. **Wodurch unterscheiden sich diese entwickelbaren Flächen von den gleichfalls aus ebenen Seitenelementen gebildeten Stralenflächen?**

Bei den Stralenflächen liegt der Scheitelpunkt eines jeden Seitenelementes (1054) in einem und demselben Punkte, nämlich im Scheitel der Stralenfläche; bei den entwickelbaren Flächen hingegen liegen die Scheitelpunkte 1, 2, 3, 4 ... aller Seitenelemente in einer Curve, welche nun folgerichtig als die Scheitellinie der entwickelbaren Fläche zu bezeichnen ist. Sonst wird sie gewöhnlich die Rückkehrkante der entwickelbaren Fläche genannt.

1206. **Welche besondere Eigenschaften haben die Berührungsebenen entwickelbarer Flächen?**

a) Alle Berührungsebenen einer entwickelbaren Fläche berühren dieselbe nach der ganzen Länge eines Seitenelementes. (Die Ursache ist ganz dieselbe wie jene in (1057) angegebene.)

b) Jede Berührungsebene einer entwickelbaren Fläche enthält **zwei** unmittelbar aufeinanderfolgende Linienelemente der Scheitellinie, weil sie durch zwei benachbarte Tangenten der Scheitellinie geht.

1207. Jede Ebene, welche durch **drei aufeinanderfolgende** Punkte einer unebenen Curve gelegt wird, wurde als **Osculationsebene** der Curve bezeichnet; also sind alle Berührungsebenen einer entwickelbaren Fläche Osculationsebenen an die Scheitellinie der Fläche.

1208. **In wieviele Teile zerfällt naturgemäss eine jede entwickelbare Fläche?**

In zwei Teile oder Mäntel, welche die Scheitellinie ebenso zur gemeinsamen Grenze besitzen, wie die beiden Mäntel einer vollständigen Stralenfläche den Scheitelpunkt zur gemeinschaftlichen Grenze haben.

In Fig. 148 unterscheiden wir demnach einen unteren und einen oberen Mantel der entwickelbaren Fläche; die Curve 1, 2, 3... ist die gemeinsame Grenze beider.

1209. Wie leicht einzusehen, sind beide Mäntel einer entwickelbaren Fläche, (insoferne man sich beide ohne Ende fortgesetzt denkt), **gleich gross**, weil ja jedes Seitenelement aus zwei gleichen Teilen besteht; aber **congruent sind die Mäntel nicht**, weil keine Lage denkbar ist, in welcher der eine Mantel ganz auf den anderen gelegt werden könnte.

1210. **Ist eine entwickelbare Fläche durchaus stetig gekrümmt?**

Längs der Scheitellinie ist sie unstetig gekrümmt, weil die Scheitellinie eine scharfe Kante bildet.

Denken wir uns bei der in Fig. 148 abgebildeten entwickelbaren Fläche seien u und u' zwei parallele beliebige schneidende Ebenen, so ist klar, dass es zu jedem Elemente des einen Schnittes $ab \ldots i$ ein paralleles Linienelement im anderen Schnitte $a'b' \ldots i'$ gibt.

Legen wir jetzt durch den Punkt 4 der Scheitellinie eine Ebene u'' parallel zu u (wurde nicht in der Figur gezeichnet), so ist klar, dass die Schnittlinie von 4 aus auf dem unteren und

auch auf den oberen Mantel fortgehen muss. Die Schnittlinie auf dem oberen Mantel müsste in Fig. 148 gestrichelt sein, und hätte beiläufig die Form EF; die Schnittlinie auf dem unteren Mantel wäre sichtbar und beiläufig von der Form EG. Die Tangente in E an beide Curventeile ist parallel zu $e.$, mithin bildet E eine Spitze der beiden Curven, also entsteht auch in der Ebene u'' eine Schnittcurve mit einer Spitze in 4, woraus nun folgt, dass die Scheitellinie einer entwickelbaren Fläche eine Kante ist (1041).

1211. W a r u m w e r d e n d i e v o n d e n T a n g e n t e n u n e b e n e r C u r v e n g e b i l d e t e n F l ä c h e n e n t w i c k e l b a r e F l ä c h e g e n a n n t ?

Weil sich von jeder Mantelfläche ein Netz auf dieselbe Art entfalten oder entwickeln lässt, wie bei den Stralenflächen. Denn man kann (wenn der zweite Mantel weggenommen wird) einen Mantel auf einer Ebene genau so rollen, wie in (1100) eine Stralenfläche gerollt wurde und hiedurch das Netz (1102) bestimmen.

1212. Man sieht jetzt ein, dass die Stralenflächen nur eine specielle Form der entwickelbaren Flächen sind, indem die Ausdehnung der Scheitellinie zu einem Punkte geworden ist. Desshalb werden auch die Stralenflächen zu den entwickelbaren gezählt.

1213. Jeder beliebigen auf einer entwickelbaren Fläche liegenden Linie entspricht wieder eine Netzlinie; dabei ist so wie bei den Stralenflächen der Winkel, den ein Linienelement mit einem Strale der Fläche bildet von gleicher Grösse, wie der entsprechende Winkel im Netze (1112).

1214. Die allgemeinen entwickelbaren Flächen sind ebenso wie die Stralenflächen geeignet, Roll- und Evolventenflächen zu erzeugen. Man lese beispielsweise hierüber (1130) und setze überall dort statt Stralenfläche „entwickelbare Fläche“, so erhält man den Begriff von der Entstehung der den allgemeinen entwickelbaren Flächen entsprechenden Evolventenflächen.

1215. W i e e n t s t e h t d i e e n t w i c k e l b a r e S c h r a u b e n f l ä c h e (Helikoid) ?

Verlängert man alle Linienelemente einer Schraubenlinie, die auf einem senkrechten Kreiscylinder gezeichnet wurde (1123), zu Tangenten, so entsteht das Helikoid.

Wenn man sich vorstellt, dass in Fig. 148 die Linie 1, 2, 3, . . . 9 das Bild eines Stückes Schraubenlinie sei, dann

stellt auch die abgebildete Fläche ein Stück einer entwickelbaren Schraubenfläche vor.

1216. Der Lernende zeichne in zwei orthogonalen Abbildungen einen senkrechten Kreiscylinder, dessen Basis etwa in der Bildebene I liegt. Der Kreisradius sei ungefähr einen halben Zoll, die Ganghöhe der Schraubenlinie gleich zwei Radien, die Windung nach aufwärts links gegen rechts. Jeder Schraubengang werde wenigstens durch zwölf Punkte (Kreisbasis und Ganghöhe je in zwölf gleiche Teile geteilt) bestimmt.

Man ermittle nach (1124) die halbe Länge $\frac{l}{2}$ der Kreisbasis, errichte am Ende von $\frac{l}{2}$ eine Senkrechte von der Länge $\frac{h}{2}$ der Ganghöhe h und ziehe die Hypothenuse, so stellt diese die Netzlinie der Schraubenlinie vor. Da die Netzlinie gerade ist, so folgt, dass die Schraubenlinie in allen ihren Linienelementen gegen die Cylinderstralen gleich geneigt ist, woraus sich weiter ergibt, dass alle Tangenten der Schraubenlinie gegen die Basisebene des Cylinders dieselbe Neigung besitzen, wie die Hypothenuse des construierten Dreieckes gegen $\frac{l}{2}$.

Sind nun $m_1\, m_2$ die zugeordneten Bilder eines Punktes der Schraubenlinie, so liegt m_1 in der Kreisbasis des Cylinders Z. Zieht man durch m_1 eine Tangente t_1 an den Kreis, so ist t_1 das erste Bild der durch m gehenden Schraubenlinientangente t. Denken wir uns alle Tangenten sowol auf- als abwärts gezogen, und vom Berührungspunkt m aus beiderseits eine gleiche Länge λ aufgetragen und die Endpunkte der Tangente mit n und p bezeichnet, so handelt es sich jetzt darum anzugeben, wie lang $n_1 m_1 = m_1 p_1$ werde, und wie tief die durch n_2 gehende Horizontale unter m_2 liegt.

Trägt man im Netze die Länge λ auf die Hypothenuse des erwähnten Dreieckes auf, so entspricht dem λ auf der Kathete $\frac{l}{2}$ ein Stück λ', welches sich zu λ genau so verhält, wie $\frac{l}{2}$ zur halben Ganglänge der Schraubenlinie (nämlich zur Hypothenuse), und dem λ entspricht auf $\frac{h}{2}$ ein Stück λ'', so dass aus $\lambda\lambda'\lambda''$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse λ gezeichnet werden könnte.

Wird nun λ' auf t_1 beiderseits von m_1 aus aufgetragen, so ergeben sich n_1 und p_1. Trägt man von m_2 im Bilde des Cylinderstrales λ'' abwärts und zieht parallel zu ${}_1X_2$ eine Gerade, so muss n_2 in ihr dort liegen, wo sie von der durch n_1 gehenden Ordinale getroffen wird. Verbindet man m_2 mit n_2 und macht $m_2 p_2 = m_2 n_2$, so ist $n_2 p_2$ das zweite Bild der durch $m_1 m_2$ gehenden Schraubentangente.

Construiert man alle Tangenten von dieser Länge λ, so findet man, dass die Endpunkte n und p zwei congruente Schraubenlinien beschreiben, die einerlei Ganghöhe mit der ersten Schraubenlinie besitzen, aber auf einem Cylinder von grösserer Basis liegen. In verticaler Richtung gemessen, haben die congruenten Schraubenlinien die Entfernung λ'' von einander.

Sowie in Fig. 148 die beiden Mäntel einer entwickelbaren Fläche ersichtlich gemacht sind, so werden auch im vorliegenden Falle die beiden Mäntel der entwickelbaren Schraubenfläche hervortreten, nur mit dem Unterschiede, dass die Begrenzungen nicht ebene Linien, sondern Schraubenlinien sind.

1217. Wenn eine aus mehreren Gängen einer Schraubenlinie abgeleitete entwickelbare Fläche ins Unbegrenzte erweitert würde, so müsste jeder untere Mantel eines Schraubenganges alle oberen Mäntel der darunter liegenden Schraubengänge schneiden. Erweitert man aber jeden unteren Mantel nur soweit, bis er von dem nächsten darunter liegenden oberen Mantel geschnitten wird, und begrenzt den erwähnten oberen Mantel ebenfalls durch diese Schnittlinie, welche gleichfalls eine Schraubenlinie ist, so entsteht eine scharfgängige entwickelbare Schraubenfläche.

1218. Anstatt den unteren und den darunterliegenden oberen Mantel bis zum Durchschnitt zu erweitern, schneidet man die entwickelbare Fläche mit einem concentrischen Cylinder, von dem nur jener Teil zur Raumbegrenzung verwendet wird, welcher zwischen einem unteren und dem nächsten darunter liegenden oberen Mantel liegt. Hiedurch gewinnt die entwickelbare Schraubenfläche mehr das Aussehen einer flachgängigen Schraube.

1219. Wird eine entwickelbare Schraubenfläche mit einer zu den Cylinderstralen senkrecht geführten Ebene u zum Durchschnitt gebracht, so entsteht als Schnitt die Kreisevolvente (1155).

1220. In was für eine Netzlinie muss sich jede auf einem Helikoide liegende Schraubenlinie verwandeln?

Jede Schraubenlinie einer entwickelbaren Schraubenfläche durchschneidet alle Flächenstralen unter **gleichen** Winkeln, die bekanntlich unverändert ins Netz übergehen. Da ferner alle Punkte einer jeden Schraubenlinie dieser Fläche einen unveränderlichen Abstand von der Scheitellinie beibehalten, so folgt, dass alle Linienelemente der Schraubenlinien, die zwischen zwei benachbarten Stralen liegen, einerlei Längen besitzen; da endlich der Winkel zwischen je zwei benachbarten Linienelementen der Schraubenlinie auch im Netze constant bleibt, so ergibt sich hieraus, dass die in Rede stehenden Netzlinien **concentrische Kreise** werden müssen.

1221. **Wie construiert man den Radius jenes Kreises, in welchen sich die Scheitellinie des Helikoides verwandelt?**

Setzen wir voraus, es seien $m_1 m_2$ die zugeordneten Bilder eines Punktes m der Scheitellinie; $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ (1216) die Bilder einer Tangente an die Scheitellinie, und es sei durch m die Schraubenlinie gezeichnet, welche der Punkt m beschreibt, so kann auch die Tangente t' im Punkte n an die zweite Schraubenlinie construiert werden, da von letzterer der Radius der Cylinderbasis und die Ganghöhe bekannt ist.

Fig. 149.

Legt man eine Ebene w, welche das Helikoid längs der Geraden mn berührt, so müssen beide Tangenten mn und t' in derselben liegen. Sucht man demnach in der Bildebene I die $\overline{w}_1$ (indem w durch die beiden Tangenten mn und t' vollständig gegeben ist), und ermittelt die erste Congruenz-Projection beider Tangenten und ihrer Berührungspunkte mit den Schraubenlinien, so sind diese Umlegungen als Tangenten an die Netzlinien anzusehen (wenn man sich nämlich vorstellt, dass das Helikoid auf der Ebene w gerollt wird).

Errichtet man in den Umlegungen der Berührungspunkte Normalen auf die Kreistangenten in der Ebene der Umlegung, so gibt ihr Durchschnittspunkt o den Mittelpunkt der concentrischen Kreislinien, welche nun die Netzlinien der Schraubenlinien sind. Die von o auf die Netztangente $m'n'$ gefällte Senkrechte ist ein Radius r von der Netzlinie der Scheitellinie des Helikoides.

1222. Aus (1221) geht folgendes hervor: Zieht man an einen Kreis vom Radius r (1221) in mehreren Punkten 1, 2, 3,...

Fig. 149, Tangenten im selben Sinne und von gleicher Länge, wodurch die anderen Endpunkte ebenfalls in einen Kreis $ab \ldots h$ zu liegen kommen, so ist die so entstandene Figur $1, 2 \ldots 8, h, \ldots e \ldots a, 1$ das Netz von einem Teile eines Helikoid-Mantels. Wird diese Figur aus Papier geschnitten, und die Linien $1, 2, \ldots 8$ in die Gestalt einer Schraubenlinie gebracht, so krümmt sich das Papier in die Form einer entwickelbaren Schraubenfläche, auf welcher die Linie $ab \ldots h$ ebenfalls eine Schraubenlinie ist.

1223. Der Lernende kann längs des Kreises $1, 2, \ldots$ einen Papierstreifen übrig lassen, um mit ihm, nachdem er an mehreren Stellen aufgeschnitten wurde, die entwickelbare Fläche an einem Holzcylinder längs der darauf gezeichneten Schraubenlinie (Scheitellinie) zu befestigen. Wird auch noch das Netz des zweiten Mantels gezeichnet und entsprechend am Holzcylinder befestigt, so entsteht ein vom Lernenden selbst angefertigtes Modell der entwickelbaren Schraubenfläche.

Selbstverständlich muss der Holzcylinder jenem Cylinder entsprechen, auf welchem bei der Abbildung der Fläche (1216) die Scheitellinie angenommen wurde.

1224. Bei den Constructionen von Tangentenebenen, ebenen Schnitten, Durchschnitten von geraden und krummen Linien und gekrümmten Flächen mit irgend einer allgemeinen entwickelbaren Fläche, beachtet man die Lehren des §. 51 und berücksichtiget (1206).

c) Windschiefe Flächen.

Ihre Entstehung. Ebene des Parallelismus. Untersuchung des windschiefen Flächenelementes. Berührungsebenen. Nulltangenten.

§. 59.

1225. Wie entstehen windschiefe Flächen und worin besteht ihr Charakter?

Wenn eine gerade Linie p sich stetig so weiter bewegt, dass keine Lage die unmittelbar vorhergehende, also auch nicht die unmittelbar nachfolgende schneidet, so beschreibt p eine windschiefe Fläche; ihr Charakter besteht demnach darin, dass keine zwei aufeinanderfolgende Stralen der Fläche in einer Ebene liegen können.

1226. Um sich einen Fall zu vergegenwärtigen, in welchem eine Gerade p eine windschiefe Fläche beschreibt, denke man sich etwa einen auf einer Ebene rollenden Cylinder, mit welchem die Gerade p fest aber so verbunden ist, dass sie weder mit den Cylinderstralen parallel, noch in einer zu den Cylinderstralen senkrechten Ebene liegt. Versinnlicht man sich das Rollen des Cylinders und die Weiterbewegung von p, so erkennt man ohneweiters, dass p eine windschiefe Fläche (1225) beschreibt.

1227. Oder: Bewegt sich eine Gerade p derart weiter, dass sie stets zu einer Ebene parallel bleibt, ohne aber jemals mit der ihr unmittelbar vorhergehenden Lage parallel zu sein, (welchen Fall sich der Lernende sehr bequem versinnlichen kann), so entsteht ebenfalls durch p eine windschiefe Fläche. Von windschiefen Flächen dieser Art sagt man, sie besitzen eine Ebene des Parallelismus.

1228. Man soll untersuchen, wie viele Elementar-Dreiecke ein windschiefes Flächenelement besitzt?

Ein windschiefes Flächenelement ist jener unendlich schmale Flächenraum, welcher von zwei unendlich nahen sich nicht schneidenden Geraden begrenzt wird. Nehmen wir an, p und q seien zwei solche unendlich nahe Gerade, so kann man sich vorstellen, jeder Punkt von p steht mit zwei Punkten von q und ebenso jeder Punkt von q mit zwei Punkten von p in Berührung. Je drei derartige Punkte bilden ein Elementar-Dreieck (1014), und weil eine unbegrenzte Gerade unendlich viele Punkte besitzt, so besteht ein windschiefes Flächenelement aus unendlich vielen Elementar-Dreiecken.

1229. Wenn man eine Ebene T durch eine Gerade p eines windschiefen Flächenelementes legt, und die Ebene T um die Gerade p herum eine volle Umdrehung beschreiben lässt, so muss die Ebene T in jeder Stellung mit dem windschiefen Flächenelemente pq ein Elementar-Dreieck gemein haben. Denn weil die Gerade q die Gerade p nicht schneidet (also auch nicht zu ihr parallel ist), so muss die Ebene T in jeder Stellung die Gerade q in einem veränderlich liegenden Punkte Q schneiden, welcher dem Elementar-Dreiecke angehört, dessen zweiter und dritter Punkt in der Geraden p liegt (1228). Dieses Elementar-Dreieck gehört dem windschiefen Flächenelemente und der Ebene T an, somit ist der Satz (1229) bewiesen.

1230. Jede Ebene, welche durch eine Gerade p oder q eines windschiefen Flächenelementes gelegt wird, ist eine Berührungsebene an dieses Element; das der Ebene und dem Elemente pq gemeinsame Elementar-Dreieck, ist die Berührungsstelle (1229).

1231. Legt man durch die Gerade p eines windschiefen Flächenelementes zwei Ebenen T und U, so sind ihre Berührungs-Dreiecke nur dann unendlich nahe, wenn der von T mit U gebildete Winkel unendlich klein ist. Erreicht aber der von T mit U erzeugte Flächenwinkel eine messbare Grösse, so liegen auch die Berührungs-Dreiecke in einer messbaren gegenseitigen Entfernung.

1232. Wenn eine Ebene T ein windschiefes Flächenelement pq berührt, so muss diese Ebene durch eine der beiden Geraden p oder q gehen, die andere q oder p aber schneiden; denn das elementare Berührungsdreieck liegt mit zwei Ecken auf der einen, mit dem dritten Ecke auf der anderen Geraden.

1233. Wenn eine Ebene T die beiden Geraden eines windschiefen Flächenelementes schneidet, so kann diese Ebene das windschiefe Flächenelement nirgends berühren, d. h. kein Elementar-Dreieck mit demselben gemein haben (1232).

1234. Wenn die Ebene T durch eine Gerade p einer windschiefen Fläche F gelegt wird (1230), wie construiert man ihren Berührungspunkt mit der windschiefen Fläche?

Die Gerade p gehört zwei windschiefen Flächenelementen an, von welchen das eine durch p und die dem p vorhergehende Gerade o, das andere durch p und die dem p nachfolgende Gerade q gebildet wird. Die Ebene T wird sowol o als auch q in den Punkten O und Q schneiden, also wird die Ebene T die beiden windschiefen Flächenelemente op und pq berühren.

Die übrigen windschiefen Flächenelemente werden von der Ebene T nicht berührt (1233). Wenn man demnach alle der Geraden p vorhergehenden Stralen mit der Ebene T zum Durchschnitt bringt und durch eine Curve verbindet, so endet diese Curve in der Geraden o in einem Punkte O, welcher dem elementaren Berührungsdreiecke der Ebene T und dem Elemente op angehört.

Werden auch alle dem p nachfolgenden Stralen mit der Ebene T zum Schnitt gebracht und durch eine Curve verbunden, so endigt diese in der Geraden q in einem Punkte Q, welcher dem elementaren Berührungsdreieck der Ebene T und der Elemente pq angehört.

Es sind mithin zwei Berührungsstellen O und Q der Ebene T gefunden worden.

1235. Liegen O und Q unendlich nahe beisammen (was man daran erkennt, dass die erwähnten zwei Schnittcurven stetig in einander übergehen), so ist die windschiefe Fläche F in O und Q stetig gekrümmt; gehen aber die genannten zwei Schnitte nicht in einander über, sondern endigt jede an einer anderen Stelle von p (respective o und q), so ist die windschiefe Fläche F in O und Q unstetig gekrümmt, p ist eine Kante der windschiefen Fläche.

Hieraus geht hervor, dass man die Schnitte einer Ebene T, welche durch einen Stral p einer windschiefen Fläche gelegt wird, mit den dem p vorhergehenden Stralen und mit jenen dem p nachfolgenden Stralen für sich betrachten muss. Nur wenn man im Vorhinein weiss, dass die windschiefe Fläche längs p stetig gekrümmt ist, hat man diese Trennung des Schnittes in zwei Curven nicht zu beachten, weil beide Curven stetig in einander übergehen. Der Schnittpunkt der Curve mit dem Strale p ist die Berührungsstelle der Ebene T mit der windschiefen Fläche.

1236. Was verstehen wir unter einer Nulltangente einer Fläche?

Eine Tangente, welche durch drei aufeinanderfolgende Punkte der Fläche geht. Nulltangente desshalb genannt, weil die Neigung der durch diese drei Punkte bestimmten zwei Linienelemente gegeneinander gleich Null ist.

Nicht alle Flächen besitzen Nulltangenten.

1237. Jeder Stral einer Regelfläche ist für jeden seiner Punkte eine Nulltangente, weil alle Linienelemente des Strales auf der Regelfläche liegen.

1238. Wieviele Nulltangenten lassen sich durch jeden Punkt P einer windschiefen Fläche legen?

Wenn der Punkt P an einer stetig gekrümmten Stelle liegt, so gehen durch ihn zwei Nulltangenten. Denn ist p der durch P gehende Flächenstral, so ist p schon eine Nulltangente (1237).

Geht ferner o dem Strale p unmittelbar vorher und folgt q dem Strale p unmittelbar nach, so wird jede durch p gelegte Ebene T sowol o als q in zwei Punkten O und Q schneiden, die unendlich nahe beisammen liegen, weil die Fläche stetig gekrümmt vorausgesetzt wird. Ist nun T die durch P gehende Tangentenebene, und verbindet man O mit Q durch eine Gerade t, so muss t offenbar die Gerade p im Punkte P schneiden und man sieht nun ein, dass die drei aufeinanderfolgenden Punkte OPQ sowol der Geraden t, als auch der windschiefen Fläche angehören, folglich ist t die zweite durch P gehende Nulltangente.

1239. Die zweite durch einen Punkt P einer windschiefen Fläche gehende Nulltangente ist eine Tangente an jene Schnittcurve, welche die durch P gehende Tangentenebene mit der windschiefen Fläche erzeugt (1234).

Windschiefes Hyperboloid, windschiefes Paraboloid und windschiefe Schraubenflächen. Die archimedische Spirale.

§. 60.

1240. Welche Fläche wird ein windschiefes Hyperboloid (einmanteliges Hyperboloid) genannt?

Jene Fläche, welche durch eine Gerade s erzeugt wird, die an drei sich kreuzenden Geraden p, q und r hingleitet (33).

1241. Keine Lage von s schneidet eine andere Lage, weil sonst, wenn zwei Lagen von s sich schneiden würden, die drei Geraden p, q und r in einer Ebene liegen müssten, was gegen die Voraussetzung ist. Also ist die Fläche windschief.

1242. Welche Fläche nennt man ein windschiefes Paraboloid (hyperbolisches Paraboloid)?

Jene Fläche, welche entsteht, wenn eine Gerade s an zwei sich kreuzenden Geraden p und q parallel zu einer Ebene Q weiter bewegt wird.

1243. Keine Lage von s kann eine andere Lage schneiden, weil sonst die Geraden p und q in einer Ebene liegen müssten, was vermöge der Voraussetzung nicht der Fall sein kann. Mithin ist die Fläche windschief.

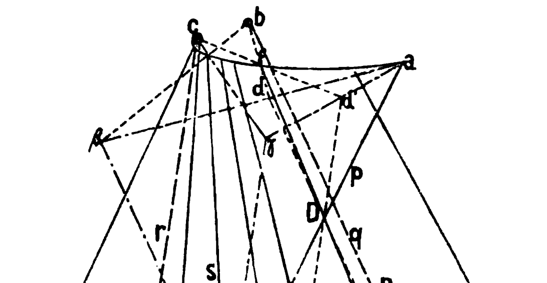
1244. Wie construiert man eine Gerade s, welche drei sich kreuzende Gerade p, q, r schneidet?

Man legt durch q eine Ebene Q und durch r eine Ebene R, aber so, dass sie durch einen in der Geraden p angenommenen

Punkt gehen, oder mit anderen Worten, dass die beiden Ebenen Q und R einen Punkt der Geraden p aus den Axen q und r projicieren (830). Sucht man die Durchschnittsgerade s der Ebene Q mit der Ebene R, so schneidet sie offenbar die Gerade p in dem erwähnten Punkte; sie schneidet aber auch q, weil sie in der Ebene Q liegt, und schneidet noch r, weil sie mit r in der Ebene R sich befindet; also schneidet sie p, q und r.

1245. Wie kann man die Projectionen der Geraden s finden, wenn die Projectionen der sich kreuzenden Geraden p, q, r gegeben sind?

Fig. 150.



Man kann wol die Aufgabe allgemein nach (1244) auflösen; indessen ist es bequemer, das folgende Verfahren einzuschlagen. (In Fig. 150 ist nur eine Projection gezeichnet, welche eine orthogonale oder eine schiefe sein möge.)

a) Man schneidet die abgebildeten Geraden p, q, r durch zwei parallele Ebenen, wodurch in p zwei Schnittpunkte A, a; in q die Schnittpunkte B, b; in r die Schnittpunkte C, c entstehen. (Die Lage der beiden parallelen Ebenen wird man so wählen, auf dass keiner der sechs Schnittpunkte unbenützbar liegende Projectionen gibt. In Fig. 150 wurden keine Zeiger zur Bezeichnung der Projection gewählt, weil die Deutlichkeit nicht leidet.)

Um durch A die Gerade s (1244) zu legen, ziehe man zuerst durch A eine Gerade $A\beta$ parallel und gleich lang mit Bb,

sodann $A\gamma$ parallel und gleich lang mit Cc, so ist $Aa\beta$ eine Ebene durch p parallel zur Geraden q und $Aa\gamma$ eine Ebene durch p parallel zur Geraden r; ihre Schnitte mit der unteren Ebene ABC sind die zu $a\beta$, $a\gamma$ parallelen Geraden $A\beta'$, $A\gamma'$.

Legt man durch q und den Punkt A eine Ebene, so ist ihr Schnitt mit der Ebene abc die Gerade $b\beta$, und wird durch r und A eine Ebene gelegt, so muss deren Schnitt mit der Ebene abc die Gerade $c\gamma$ sein. Wird nun der Schnittpunkt von $b\beta$ und $c\gamma$ mit A verbunden, so ist s eine Gerade, welche p in A schneidet, und in der Verlängerung auch q und r schneiden muss.

b) Um durch einen beliebigen Punkt D der Geraden p eine Gerade s (1244) zu construieren, zieht man zuerst durch D eine Parallele zu q; diese Parallele liegt offenbar in der Ebene $Aa\beta$, folglich muss sie die Ebene abc in einem Punkte d der Geraden $a\beta$ und die Ebene ABC in einem Punkte e der Geraden $A\beta'$ schneiden. Jetzt zieht man durch D eine Parallele zu r und sucht die Schnittpunkte d', e' mit den Ebenen abc und ABC in den Geraden $a\gamma$, $A\gamma'$.

Ist dies geschehen, so legt man durch q und D eine Ebene; ihr Schnitt mit der oberen Ebene ist bd, mit der unteren Be; ferner durch r und D eine Ebene, so ist cd' ihr Schnitt mit der oberen und Ce' ihr Schnitt mit der unteren Ebene, und wir erkennen sofort, dass fF die Projection einer Geraden sein muss, welche die Gerade p im Raumpunkte D schneidet, und hinreichend verlängert, auch die anderen Geraden q und r treffen wird.

Nach diesem Verfahren wurden noch mehrere Stralen der windschiefen Fläche in Fig. 150 abgebildet und die Bilder ihrer Schnittpunkte mit den Basisebenen abc und ABC durch Curven verbunden, welche die Krümmung der Fläche ersichtlich machen.

Man sieht ein, wenn noch weit mehr Stralen der Fläche construiert würden, die Curven sich weiter fortsetzen müssten; die obere Curve ginge durch die Punkte abc, die untere durch ABC. Die Geraden q und r sind teilweise durch den abgebildeten Teil der Fläche verdeckt und desshalb gestrichelt.

1246. **Welche Gestalt müssen die ebenen Schnitte eines windschiefen Hyperboloides erhalten?**

Sie sind Linien der zweiten Ordnung (also Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln) oder gerade Linien.

Beweis. Alle Ebenenpaare, welche durch q und durch r so gelegt werden, dass sie immer einen Punkt in der Geraden p

gemein haben (wie z. B. die Ebenen *bdDeB* und *cd'De'C*), bilden zusammen zwei Ebenenbüschel mit den Axen *q* und *r*, welche Ebenenbüschel projectivisch sind (833), weil sie auf der Geraden *p* dieselbe Punktreihe erzeugen.

Sind aber die Ebenenbüschel projectivisch, so sind es auch ihre zwei Stralenbüschel, die als Durchschnitte mit irgend einer Ebene *W* entstehen. Wenn aber in einer Ebene zwei projectivische Stralenbüschel liegen, so befinden sich entweder dieselben nicht in perspectivischer Lage, und dann liegen die Schnittpunkte verwandter Stralen in einer Linie der II. Ordnung (436), oder die Lage der beiden Stralenbüschel ist eine perspectivische, in welchem Falle die Schnittpunkte der verwandten Stralen in einer geraden Linie liegen.

Da aber der Schnittpunkt von zwei homologen Stralen ein Punkt der windschiefen Hyperboloidfläche ist, so folgt nun mit Sicherheit, dass alle ebenen Schnitte entweder Linien der zweiten Ordnung oder gerade Linien sind. In Fig. 150 werden die Schnitte in den Ebenen *abc* und *ABC* Ellipsen.

1247. Wann werden die ebenen Schnitte eines windschiefen Hyperboloides gerade Linien?

Wenn die schneidende Ebene *W* durch einen Stral *s* der Fläche gelegt wird. Dieser Stral *s* schneidet die Geraden *q* und *r* (die Axen der Ebenenbüschel, 1246) in jenen Punkten, welche die Scheitel der Stralenbüschel sein müssen, die als Schnitte von *W* mit den Ebenenbüscheln *q* und *r* entstehen, also ist *s* die Scheitellinie der beiden projectivischen Stralenbüschel, folglich liegen nach (293) die Schnittpunkte aller verwandten Stralen in einer Geraden.

1248. Wieviele Scharen von geraden Linien besitzt ein windschiefes Hyperboloid?

Zwei Scharen. Die eine Schar besteht aus den unendlich vielen Geraden *s*, welche an den gegebenen drei sich kreuzenden Geraden *pqr* (Fig. 150) anliegen; die zweite Schar besteht aus jenen vielen Geraden, welche an den Linien *s* anliegen. Denn wenn man durch irgend eine Lage von *s* eine beliebige Ebene legt, so wird diese Ebene alle anderen Lagen von *s* in Punkten schneiden, welche nach (1247) in einer Geraden liegen; also sieht man ein, dass man unzählig viele gerade Linien auf dem Hyperboloid ziehen kann, deren jede alle Lagen von *s* durchschneidet.

1249. **Was folgt aus dem Umstande, dass jede Gerade der zweiten Schar alle Geraden *s* der ersten Schar schneidet?**

Dass auch jede Gerade *s* alle Geraden der zweiten Schar schneidet. Der zweiten Schar gehören auch die Geraden *p*, *q*, *r* an, da *p*, *q* und *r* alle Lagen von *s* schneiden.

1250. Aus (1249) folgt dann weiter: Legt man durch eine Gerade eines windschiefen Hyperboloides, sie mag der ersten oder der zweiten Schar von Flächenstralen angehören, eine Ebene, so wird die Fläche noch immer in einer zweiten Geraden geschnitten.

Man sieht dies deutlich in Fig. 150, wenn z. B. durch die Gerade *Ff* und den Punkt *A* eine Ebene gelegt wird.

1251. **Wieviele Gerade einer Schar müssen angenommen werden, damit das windschiefe Hyperboloid bestimmt ist?**

Drei beliebige Gerade der ersten oder der zweiten Schar; denn wir haben ja in Fig. 150 aus drei beliebigen Geraden einer Schar das Hyperboloid construiert. Gleitet daher eine Gerade an drei Geraden einer Schar von Flächenstralen weiter, so gleitet sie auch gleichzeitig an allen übrigen Geraden dieser Schar also auf der Fläche selbst fort.

1252. **Wenn bei einem windschiefen Hyperboloide eine Gerade *s* an allen Geraden der Schar *pqr* . . . dahingleitet, von welcher Beschaffenheit sind die Punktreihen, welche *s* auf den verschiedenen Geraden *pqr* . . . erzeugt?**

Sie sind alle projectivisch-proportional (281), und zwar sind immer jene Punkte verwandt, welche in einem und demselben Flächenstrale liegen. Denn wenn man eine Ebene um den beliebigen Stral *r* dreht, so schneidet sie in jeder Stellung alle übrigen Stralen jener Schar, welcher sie selbst angehört, in Punkten einer Geraden (1250). Da aber ein Ebenenbüschel auf allen ihn schneidenden Geraden projectivisch-proportionale Punktreihen erzeugt (826), so folgt nun, dass *s* auch auf allen Lagen von *pqr*... solche Punktreihen erzeugen muss.

1253. **Wie kann man mittels projectivischer Proportionalität ein windschiefes Hyperboloid bestimmen?**

Man nimmt auf zwei sich kreuzenden geraden Linien *p* und *q* zwei beliebige projectivische Punktreihen an (d. h. auf *p* werden

irgend drei und auch auf q irgend drei Punkte angenommen und nach (276) aufeinander bezogen), dann ist jede Gerade, welche zwei verwandte Punkte verbindet, ein Stral des windschiefen Hyperboloides.

1254. Wann verwandelt sich ein windschiefes Hyperboloid in ein windschiefes Paraboloid?

Wenn die auf den Geraden p und q angenommenen Punktreihen geometrisch proportional sind (281). Denn bei der Erzeugung der Fläche nach (1242) entstehen geometrisch-proportionale Punktreihen.

1255. Da sonach ein windschiefes Paraboloid ein specieller Fall des windschiefen Hyperboloides ist, so gelten alle allgemein für das windschiefe Hyperboloid entwickelten Sätze auch für das windschiefe Paraboloid.

1256. Was folgt aus dem Umstande, dass bei einem windschiefen Paraboloide die von den Flächenstralen der einen Schar auf der anderen Schar erzeugten Punktreihen geometrisch-proportional sind?

Es folgt:

a) dass zu jeder Schaar eine andere Ebene des Parallelismus gehört;

b) dass das windschiefe Paraboloid einen unendlich fernen Flächenstral besitzt (parallel zur Durchschnittsrichtung der beiden Ebenen des Parallelismus);

c) dass das windschiefe Paraboloid (wegen *b*) eine offene Fläche ist, und deshalb mit keiner Ebene elliptische Schnitte geben kann.

1257. Das windschiefe Paraboloid wird oft in der Praxis angewendet. Hier zwei Fälle:

a) Der First und die Gesimskante einer Dachfläche seien zwar horizontal aber nicht parallel. Soll das Regenwasser senkrecht zur Gesimskante auf dem kürzesten Wege über die Dachfläche fliessen, so muss die Dachfläche nach einem windschiefen Paraboloid gestaltet sein; First und Gesimskante sind Leitlinien; eine Ebene senkrecht zur Gesimskante ist eine Ebene des Parallelismus. Die zweite Ebene des Parallelismus liegt horizontal.

b) Eine Erdböschung soll hergestellt werden. Die obere horizontale und untere nicht horizontale Gerade, durch welche die Böschung geht, liegen nicht in einer Ebene. Die Böschung

soll ein Paraboloid werden, für welches die Ebene senkrecht zur oberen Leitlinie als Parallelismusebene zu gelten habe.

Es sind diese Fälle durch Zeichnung darzustellen.

1258. Wie construiert man ein windschiefes Paraboloid, wenn drei sich kreuzende Gerade p, q, r (welche nothwendigerweise zu einer Ebene parallel sein müssen) einer Schar gegeben sind?

Man construiert nach (1244 oder 1245) zwei Gerade s und s' der ersten Schar. Zu diesen zwei Geraden geht die Ebene des Parallelismus parallel. Die folgenden Lagen von s werden nun entweder ebenso construiert, wie bei den windschiefen Hyperboloiden, oder man benützt die geometrische Proportionalität der Abschnitte, welche s bei der Weiterbewegung von p und q erzeugt (1254).

1259. Die wichtigste Anwendung der windschiefen Hyperboloide und Paraboloide kommt in der Construction vor, wenn es sich darum handelt, an andere windschiefe Flächen Berührungsebenen zu legen. Man muss daher wissen:

a) Wie construiert man am einfachsten in einem gegebenen Punkte M eines windschiefen Hyperboloides eine Berührungsebene?

Der Punkt M liege auf einem bekannten Strale s des Hyperboloides, welcher die drei geraden Leitlinien p, q, r schneidet. Man muss demnach durch M noch jenen Stral o ziehen, welcher der Schar $p\,q\,r\ldots$ angehört, alsdann sind s und o zwei Tangenten (Nulltangenten), folglich geht die zu suchende Ebene durch s und o.

Um o zu erhalten, suche man noch zwei Gerade s' und s'', deren jede p, q und r schneidet, so sind s, s', s'' drei Gerade der Schar s, welche wieder als Leitlinien für die Schar $o\,p\,q\,r\ldots$ gelten (1251). Wird jetzt durch M eine Gerade construiert (1244 oder 1245), welche s' und s'' schneidet, so ist o gefunden.

b) Wie construiert man am einfachsten in einem gegebenen Punkte M eines windschiefen Paraboloides eine Berührungsebene?

Liegt M in einem Punkte eines Strales s, welcher an zwei gegebenen Leitlinien p, q anliegt, so muss man noch einen Stral s' construieren, welcher auch p und q schneidet und zur Ebene Q des Parallelismus für die Schaar s parallel ist (man legt eine Ebene parallel zu Q und schneidet damit die Geraden p und q

durch die beiden Schnittpunkte geht *s'*). Wird jetzt durch *M* eine Ebene gelegt, welche mit *p* und *q* parallel läuft und ihr Schnitt mit *s'* bestimmt, so ist die Verbindungsgerade dieses Schnittes mit *M* die zweite durch *M* gehende Gerade *o* des windschiefen Paraboloides. Durch *s* und *o* geht die Berührungsebene des Punktes *M*.

1260. Wie kann man in einem gegebenen Punkte *M* einer beliebigen windschiefen Fläche:

a) mittels eines windschiefen Hyperboloides,

b) mittels eines windschiefen Paraboloides, eine Berührungsebene legen?

Fig. 151.

ad a). Der Punkt *M* liege auf einem Strale *p* der gegebenen windschiefen Fläche. Man wählt in der Geraden *p* noch zwei Punkte *K* und *N* (gewöhnlich auf verschiedenen Seiten von *M*), legt durch sie und durch *M* drei die windschiefe Fläche in Curven schneidende Ebenen und construiert an die ebenen Schnitte in den Punkten *K*, *M* und *N* die Tangenten *k*, *m* und *n*. (In manchen Fällen sind solche Schnitte und Tangenten schon vorhanden.) Betrachtet man *k*, *m* und *n* als Leitlinien eines windschiefen Hyperboloides, so gehört die Gerade *p* und ein längs *p* sich erstreckendes windschiefes Flächenelement sowol der gegebenen windschiefen Fläche, als auch dem windschiefen Hyperboloide an; sonach wird jede Ebene, welche das Hyperboloid in irgend einem Elementar-Dreiecke des windschiefen Flächenelementes berührt, auch die gegebene windschiefe Fläche in jenem Dreiecke

berühren. Construiert man nun in M nach (1259, a) eine Berührungsebene an das windschiefe Hyperboloid, so ist die Aufgabe gelöst.

ad b). Werden die Ebenen durch K, M und N parallel zu einander geführt, so sind die Tangenten k, m und n Leitlinien eines windschiefen Paraboloides, und nun wird nach (1259, b) verfahren.

1261. Wie wird die scharfkantige Schraubenfläche orthogonal abgebildet?

Die scharfkantige Schraube denkt man sich entstanden durch die Weiterbewegung eines gleichschenkeligen Dreieckes abc (das Profil des Schraubengewindes Fig. 151), dessen Basis ac in einem Strale eines senkrechten Kreiscylinders (Schraubenspindel) liegt und dessen Ebene durch die Axe der Spindel geht. Die Endpunkte a und c des beweglichen Dreieckes beschreiben auf der Spindel Schraubenlinien. Bei der einfachen Schraube ist die Ganghöhe gleich der Basis ac des Dreieckes abc, bei der n-fachen Schraube gleich n-mal ac. Bei der einfachen Schraube fallen die von a und c beschriebenen Schraubenlinien in eine zusammen. Bei der n-fachen Schraube wird der zwischen zwei Gängen eines und desselben Gewindes befindliche Raum noch mit (n—1) Schraubengewinden versehen, welche dem ersteren congruent sind.

In Fig. 151 ist eine einfache Schraube abgebildet. Wiewol bei stofflich ausgeführten Schrauben Gewinde und Spindel aus einem Stücke bestehen, indem aus einem grösseren Cylinder der zwischen den Gewinden liegende Stoff herausgeschnitten wird, wurde in der Figur doch eine Trennung beider Körper angezeigt, um das Verständnis der Construction zu erleichtern, welche wol keiner weiteren Erklärung bedarf, wenn noch bemerkt wird, dass man das Gewindeprofil (das Dreieck abc) in 13 Lagen herstellte ($abc = 1.$, $cde = 13.$ Lage), um einen Gang des Gewindes zu bekommen. Die von b beschriebene Schraubenlinie (welche bei der Construction zuerst zu zeichnen ist), erhält mit den von a und c erzeugten Schraubenlinien einerlei Ganghöhe.

Durch den oberen Endpunkt e des 13. Profiles (das 6. und 12. Profil projicieren sich in der Bildebene II in die Axe des Bildes), wurde eine Ebene senkrecht zur Spindelaxe geführt und wurden noch weitere 11 Profile des zweiten Ganges (das 14. bis 24.) gezeichnet. Diese Profile kommen aber nicht mehr voll-

ständig vor, indem vom 14. bis zum 17. die obere Dreiecksseite *de* immer kürzer wurde, im 18. Profil in $m_1 m_2$ endlich ganz verschwand, und hiedurch in der Ebene *u* eine Curve erzeugte, deren wahre Gestalt im ersten Bilde durch $a_1 f_1 g_1 h_1 i_1 k_1 m_1$ gegeben ist.

Im 19. und den folgenden Profilen, in welchen die obere Dreiecksseite schon verschwunden ist, kommt die untere Dreiecksseite mit der Ebene *u* zum Schnitt; diese wird immer kürzer und kürzer, endlich im 25. Profil gleich Null, wodurch sie eine der früheren congruente Curve erzeugt, deren erstes Bild in $m_1 n_1 o_1 p_1 q_1 r_1 a_1$ gefunden wurde.

Der zwischen beiden Curven liegende Raum (Schnitt der Ebene *u* mit dem Schraubengewinde) wurde schraffiert. Die Schraubenspindel wurde noch ein Stückchen fortgesetzt und weiter oben durch eine horizontale Ebene begrenzt, wesshalb im ersten Bilde der Kreisinhalt nach einer anderen Richtung schraffiert werden musste.

1262. Die beiden gekrümmten Flächen, welche ein Schraubengewinde begrenzen, sind windschief; jede derselben kann durch die Weiterbewegung einer Geraden an einer anderen Geraden (der Spindelaxe) und an zwei Schraubenlinien (auf concentrischen Cylindern) von gleicher Ganghöhe, erzeugt gedacht werden. Es sind also eine gerade und zwei krumme Leitlinien zur Erzeugung der windschiefen Fläche gegeben.

1263. Bewegt sich eine Gerade an einer Schraubenlinie und an der Axe ihres Cylinders so fort, dass ihre Neigung gegen die Cylinderaxe ungeändert bleibt, dann beschreibt die Gerade die Schraubenfläche der Fig. 151.

1264. Aus dieser Entstehungsweise folgt, dass ein jeder senkrechte Kreiscylinder, dessen Axe mit jener der Leit-Schraubenlinie zusammenfällt, die Schraubenfläche ebenfalls in einer Schraubenlinie schneiden muss. (Der Lernende zeichne eine solche Schraubenlinie auf der Fläche.)

1265. Zieht man in allen Punkten einer geraden Erzeugenden einer windschiefen Schraubenfläche die Tangenten an die durch diese Punkte gehenden Schraubenlinien (1264), so sind alle diese Tangenten zu einer Ebenen parallel (nämlich zu jener, welche man durch die Schraubenaxe senkrecht zur Profilsebene der gegebenen Erzeugenden führt); alle diese Tangenten haben mit der Schraubenfläche ein windschiefes Flächenelement gemein,

folglich bilden sie ein windschiefes Paraboloid, welches die gegebene Schraubenfläche längs einer Geraden berührt.

1266. Construiert man nach (1216) die Neigung, welche die Tangenten einer gegebenen Schraubenlinie gegen eine zur Schraubenaxe senkrechte Ebene haben, so kann man durch jeden Punkt der Schraubenfläche eine Tangente an die durch ihn gehende Schraubenlinie legen, da das erste Bild der Tangente senkrecht auf dem betreffenden Kreisradius steht. Durch diese Tangente und den durch ihren Berührungspunkt mit der Fläche gezogenen Flächenstral geht eine Berührungsebene der windschiefen Schraubenfläche.

1267. Wie entsteht die flache windschiefe Schraubenfläche?

Wenn die erzeugende Gerade (1263) auf der Schraubenaxe senkrecht steht.

1268. Wie entsteht die flache Schraube?

Wenn das Profil (1261) nicht ein gleichschenkeliges Dreieck, sondern ein Rechteck ist, dessen eine Seite ac an der Spindel liegt. Der Lernende zeichne die flache Schraube.

1269. Windschiefe Flächen kommen bisweilen bei Gewölben vor. Wenn eine Fläche der Gewölbsteine (Quadergewölbe) in der windschiefen Fläche liegt, so muss der Steinmetz die Steine dieser Fläche entsprechend bearbeiten. Hieraus erkennt der Lernende die Wichtigkeit der Construction windschiefer Flächen. (An der Schwarzenberg-Brücke in Wien befinden sich windschiefe Flächen an den Stirnseiten der Gewölbe; für jede sind ein Kreisbogen, eine Ellipse und eine Gerade, die Axe des Tonnengewölbes, die drei Leitlinien.)

1270. Wie entsteht eine archimedische Spirale?

Wenn in einer Ebene sich eine Gerade um einen in ihr liegenden festen Punkt O stets in demselben Sinne dreht, und wenn ein anderer beweglicher Punkt dieser Geraden sich in ihr so weiter bewegt, dass die Zunahme der Entfernung von O (oder Annäherung an O) proportional der Zunahme des Drehungswinkels erfolgt. Beschreibt der bewegliche Punkt eine unbegrenzte archimedische Spirale, so geht diese durch O und besteht aus unendlich vielen Windungen.

Die in Fig. 151 gefundenen zwei Schnitte $a_1 f_1 \dots k_1 m_1$ und $a_1 r_1 \dots n_1 m_1$ sind begrenzte Teile von zwei archimedischen Spiralen, denn die Längen Oa_1, Of_1, Og_1, $Oh_1, \dots$ nehmen um

gleichviel zu, während der Drehungswinkel von Oa_1 in den Lagen Of_1, Og_1, Oh_1, ... ebenfalls um gleich viel zunimmt.

B. Curvenflächen.

Projectivische Flächen. Die Serpentine. Umhüllungsflächen.

§. 61.

1271. Auf welche einfache Art ist es möglich, zwei beliebige Ebenen E und E' in eine solche Beziehung zu bringen, dass jedem Punkte A der einen Ebene E immer nur ein einziger Punkt A' in der Ebene E', und umgekehrt, jedem Punkte A' der Ebene E' nur ein Punkt A in der Ebene E entspricht?

Wählt man ausserhalb der beiden Ebenen einen beliebigen Punkt S als Scheitel eines Stralenbündels (1045), so kann die Beziehung der beiden Ebenen dadurch hergestellt werden, dass man sagt, je zwei Punkte A und A' der beiden Ebenen E und E', welche mit S in einem Strale liegen, sollen einander entsprechen. Solche Punkte werden nun projectivisch verwandt, oder kurzweg verwandt genannt, und man sagt, die beiden Ebenen seien perspectivisch aufeinander bezogen.

1272. Wenn zwei Ebenen E und E' perspectivisch aufeinander bezogen sind, was erhält man aus einer jeden in der Ebene E angenommenen beliebigen Linie e?

Eine andere Linie e', welche mit e projectivisch verwandt ist (422), weil sie mit e perspectivisch liegt. Wenn beispielsweise e ein Kreis, so wird e' irgend eine Linie der II. Ordnung sein.

1273. Die Durchschnittsgerade der perspectivisch aufeinander bezogenen Ebenen ist beiden Ebenen entsprechend gemein, d. h. in jedem Punkte dieser Geraden fallen zwei verwandte Punkte zusammen. Diese Linie ist die Begegnungsgerade für die perspectivische Lage der beiden Ebenen; zieht man daher durch zwei Punkte A und B der einen Ebene eine Gerade AB und durch ihre verwandten Punkte A' und B' die verwandte Gerade $A'B'$, so müssen sich beide in der Begegnungsgeraden schneiden.

1274. Wie kann man eine beliebige Menge von Ebenen projectivisch aufeinander beziehen?

Sind $EE'E''$ ... beliebige Ebenen und setzt man voraus, dass die Ebene E aus einem Punkte S auf die Ebene E'; das Resultat in der Ebene E' aus einem anderen Punkte S' auf die Ebene E''; das so in E'' gefundene Resultat aus einem dritten Punkte S'' auf die Ebene E''' u. s. f. projiciert werde, so sind je zwei aufeinanderfolgende Ebenen (z. B. E und E', oder E' und E'') perspectivisch (1271), je zwei nicht aufeinanderfolgende Ebenen aber nur projectivisch aufeinander bezogen, d. h. es entspricht zwar jedem Punkte A der Ebene E ein und nur ein Punkt A'' in der Ebene E'', oder A''' in der Ebene E''' u. s. w.; aber diese Punkte $A''A'''$ ... liegen mit A nicht mehr perspectivisch.

1275. In zwei projectivisch aufeinander bezogenen Ebenen (z. B. E und E'') ist die Durchschnittsgerade keine Begegnungsgerade für die verwandten Geraden der beiden Ebenen. (Es muss daher der Durchschnittsgeraden g der Ebene E'' mit E, als Gerade der Ebene E betrachtet, eine Gerade g'' in der Ebene E'' entsprechen, welche nicht mit g zusammenfällt. Denn projiciert man g aus S auf E', so entsteht g', und projiciert man g' aus S' auf E'', so entsteht g'', welche Gerade nicht mit g zusammenfallen kann.)

1276. Werden in der einen Ebene E eine beliebige Menge von Curven und Geraden und einzelnen Punkten angenommen, so entstehen in jeder der übrigen Ebenen $E'E''E'''$ ... ebenso viele Curven, Gerade und einzelne Punkte. Dabei entspricht einer jeden geraden Punktreihe oder jedem Stralenbüschel einer Ebene, in jeder anderen Ebene eine projectivisch-proportionale gerade Punktreihe oder ein derartiger Stralenbüschel.

1277. Sind die Neigungswinkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden unendlich vielen Ebenen unendlich klein und die Entfernungen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Scheitelpunkten $SS'S''S'''$ ... unendlich kurz, so bilden sowol die Ebenen E als auch die Punkte S eine stetige Aufeinanderfolge.

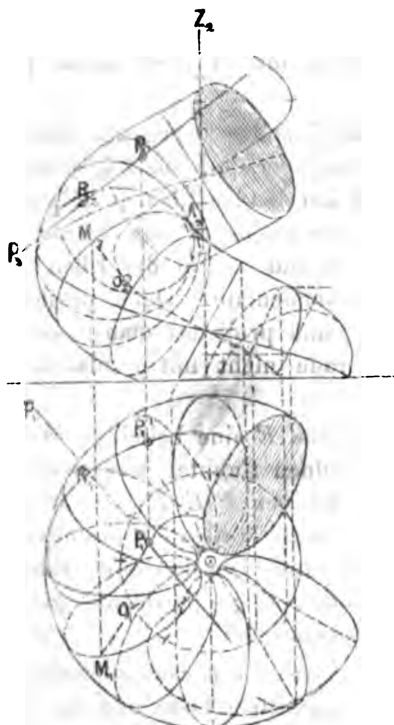
Aus einer jeden in der Ebene E angenommenen Linie e entsteht eine Reihenfolge neuer Linien, von welchen je zwei aufeinanderfolgende unendlich nahe aneinander und überdies perspectivisch liegen (in Folge des Entstehungsgesetzes 1271).

Der Inbegriff aller dieser Linien $ee'e''e'''$ ... bildet eine projectivische Fläche; ist e eine gerade Linie, so wird die

projectivische Fläche entwickelbar; ist aber e eine beliebige Curve, so entsteht eine projectivische Curvenfläche.

1278. Die ebenen Linien e, aus welchen eine projectivische Fläche entsteht, sollen Formlinien; die Ebenen E, in welchen sie liegen, Formebenen, und die Linie s, welche von allen Scheitelpunkten $S S' S'' \ldots$ gebildet wird, soll die Scheitellinie der projectivischen Fläche genannt werden.

Fig. 152.



1279. Wenn aus einer Formlinie e irgend eine projectivische Fläche abgeleitet wird, so muss aus jedem beliebigen Punkte a der Ebene E (in welcher e liegt) eine Linie entstehen; denn a aus S auf die Ebene E' projiciert, gibt den zu a unendlich nahen Punkt a'; ferner a' aus S' auf E'' projiciert, gibt den zu a' unendlich nahen Punkt a'' u. s. f. Jede aus irgend einem Punkte a einer Formebene abstammende, nach dem projectivischen Erzeugungsgesetz entstandene Linie soll eine Seitenlinie des Punktes a genannt werden.

1280. Welche Eigenschaften müssen die Tangenten aller Seitenlinien besitzen?

Alle Tangenten müssen die Scheitellinie s (1278) schneiden. Dies folgt aus der Entstehung der Seitenlinien (1279).

1281. Was für Flächenelemente können wir an einer projectivischen Fläche bemerken?

Formelemente und Seitenelemente.

a) Ein Formelement einer projectivischen Fläche ist jener Teil der Fläche, welcher zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Formlinien der Fläche liegt. Da zwei solche Form-

linien stets auf einer Stralenfläche liegen (es ist ja jede Formlinie eine directe Projection der ihr vorhergehenden), so kann man behaupten:

Eine jede projectivische Fläche wird längs eines Formelementes von einer Stralenfläche berührt, deren Scheitel in der Scheitellinie der projectivischen Fläche liegt.

b) Ein Seitenelement einer projectivischen Fläche ist jener Teil der Fläche, welcher zwischen zwei nebeneinanderliegenden Seitenlinien der Fläche liegt.

Da je zwei aufeinanderfolgende Lagen eines Linienelementes einer Formebene perspectivisch liegen (1279), so folgt:

Zieht man durch alle Punkte einer Seitenlinie einer projectivischen Fläche Berührungsgerade an die Formlinien, welchen die Punkte der Seitenlinie angehören, so bildet die Gesammtheit aller Tangenten eine entwickelbare Fläche (1203), deren Berührungsort ein Seitenelement der projectivischen Fläche ist.

1282. Die berührende entwickelbare Fläche ist selbst eine projectivische Fläche, aus einer Formlinien-Tangente entstanden.

1283. Beispiel. Eine Formlinie einer projectivischen Fläche sei irgend eine ebene Figur. Es soll die Fläche so erzeugt werden, dass alle Formlinien congruent sind. Welche Seitenlinien beschreiben die einzelnen Punkte der Formebene?

Soll eine ebene Figur e aus einer Ebene E auf eine andere Ebene E' congruent projiciert werden (733), so muss die congruent projicierende Richtung

a) in einer Ebene liegen, senkrecht auf der Durchschnittsgeraden der Ebenen E und E', und

b) mit den Ebenen E und E' gleiche Winkel einschliessen.

Ist nun oo' ein Linienelement einer Seitenlinie (1279), so muss, weil der von E mit E' gebildete Winkel unendlich klein ist, auch die Abweichung der Winkel, welche oo' mit den Ebenen E und E einschliesst, von einem rechten Winkel unendlich wenig betragen. Man kann also behaupten, es beschreibt jeder Punkt o der Formebene eine Seitenlinie, welche alle Formebenen senkrecht durchschneidet.

Um nun eine bestimmte projectivische Fläche zu erzeugen, gibt man eine Seitenlinie und die Lage der Formlinie in einer zur Seitenlinie senkrechten Ebene an. Die projicierende Richtung

ist für jede Stellung der Formebene senkrecht zu ihr, also parallel zur Tangente an die Seitenlinie in jenem Punkte, in welchem sie von der Formebene senkrecht durchschnitten wird. Die Scheitellinie *s* liegt im Unendlichen.

1284. Die Serpentine. Beschreibt der Mittelpunkt *o* eines Kreises von unveränderlicher Grösse eine Schraubenlinie, und steht jederzeit die Kreisebene auf der Schraubenlinie senkrecht, so entsteht eine röhrenförmige Fläche, Serpentine genannt, welche zu den speciellen Fällen projectivischer Flächen mit congruenten Formlinien (1283) gehört. In Fig. 152 ist ein Stück einer solchen Fläche abgebildet. Daselbst wurde zuerst die Axe der Schraubenlinie angenommen, die Ganghöhe in zwölf gleiche Teile geteilt und die Schraubenlinie wie bekannt construiert. Seitwärts von der Zeichnung wurde die halbe Basis des Kreiscylinders, auf welchem die Schraubenlinie liegt, rectificiert (1124), und der Neigungswinkel α aller Schraubenlinien-Tangenten mit der Bildebene I ermittelt (1216). Alle Kreisebenen stehen aber auf den entsprechenden Tangenten der Schraubenlinie senkrecht, folglich schliessen alle Kreisebenen den Winkel $90^0 - \alpha$ mit der Horizontalebene ein. Es werden sonach die ersten Bilder des Kreises in seinen verschiedenen Stellungen congruente Ellipsen, deren grosse Axen sich sämmtlich in einem Punkte schneiden. Die Grösse der halben kleinen Axe ergibt sich, wenn der Kreisradius r unter dem Winkel $90^0 - \alpha$ gegen die Bildebene I gestellt wird.

Sucht man in jeder Stellung des Kreises in der Bildebene II das Bild des horizontalen und des zu ihm senkrechten Durchmessers, so kann man jederzeit leicht aus den Bildern dieser zwei conjugierten Kreisdurchmesser das zweite Bild der Ellipse herstellen.

Sind eine genügende Anzahl von Kreisen abgebildet, so zieht man in jeder Bildebene eine die Kreisbilder entsprechend umhüllende Curve, um die Contour der Bilder darzustellen.

Im zweiten Bilde sieht man noch eine Curve, welche die einen Endpunkte aller zur Bildaxe parallelen Ellipsendurchmesser verbindet; sie ist das zweite Bild der ersten Flächen-Contour, deren erstes Bild die äussere Contour des ersten Flächenbildes gibt.

Die Serpentine schneidet die Bildebene I in einer Curve, deren Punkte durch die Schnitte der einzelnen Kreise mit der Bildebene I bestimmt werden.

Bei der Ausführung dieser Zeichnung ist dem Lernenden die grösste Genauigkeit zu empfehlen; namentlich bemühe er sich nur die nothwendigsten Linien zu ziehen. Eine schon früher erworbene Fertigkeit im Zeichnen der Ellipsen wird ihm hier wesentliche Dienste leisten.

1285. Wie construiert man in irgend einem Punkte $M_1 M_2$ (Fig. 152) einer Formlinie eine Berührungsebene?

Nach (1281, *a*) wird die projectivische Fläche längs der durch M gehenden Formlinie von einer Stralenfläche (hier eine senkrechte Kreiscylinderfläche) berührt. Legt man daher in M eine Berührungsebene an die erwähnte Stralenfläche (also eine Ebene senkrecht auf die Gerade $M_1 o_1$, $M_2 o_2$), so berührt sie auch die projectivische Fläche.

1286. Es ist von einem Punkte P der Serpentine das zweite Bild P_2 gegeben, und es sei vorausgesetzt, dass P dem Auge II sichtbar sei. Wo liegt P_1?

Man zieht durch P_2 irgend eine Linie (in Fig. 152 eine Gerade) und setzt voraus, dass sie das Bild einer auf der Fläche liegenden Linie sei. Sucht man von den Schnittpunkten mit den zweiten Bildern der Formlinien die zugeordneten ersten Bilder, so ergibt sich durch diese Punkte eine Curve in der Bildebene I, welche von der durch P_2 gehenden Ordinale in den Punkten P_1 P_1' geschnitten wird. Nur P_1 entspricht der Aufgabe.

1287. Um den Schnitt einer Geraden $p_1 p_2$ (Fig. 152) mit der Serpentine zu finden, sucht man zu p eine Decklinie, z. B. eine Zweier-Decklinie. Ihr erstes Bild schneidet p_1 in den Punkten $P_1 R_1$, folglich sind $P_1 P_2$, $R_1 R_2$ die Bilder der Schnitte von p mit der Serpentine.

Da p_2 ganz oberhalb des zweiten Bildes der ersten Flächencontour liegt, so kann das erste Bild der zu p_2 gehörenden Decklinie die Contour des ersten Bildes weder berühren noch durchschneiden.

1288. Auf welche nicht projectivische Art lässt sich die Serpentine noch erzeugen?

a) Durch Drehung und Verschiebung des Kreises,

b) durch Weiterbewegung einer Kugel.

ad a) Stellt man den Kreis senkrecht zur Schraubenlinie, wie dies für Fig. 152 vorausgesetzt wurde, und dreht den Kreis unendlich wenig um die verticale Axe Z, so beschreiben alle

Punkte des Kreises unendlich kleine Bögen in Parallelkreisen (802), deren Längen ihren Abständen von der Drehungsaxe Z proportional sind. Durch diese Drehung ist aber das Kreiscentrum aus der Schraubenlinie gekommen. Man verschiebe daher den Kreis parallel zur Axe Z so lange, bis das Kreiscentrum wieder in die Schraubenlinie gelangt, alsdann befindet sich der Kreis in derjenigen Lage, welche er Behufs der Flächenerzeugung einnehmen soll.

Bei der Verschiebung beschreiben alle Kreispunkte gleich lange zur Axe Z parallele Wege. Jeder Kreispunkt erzeugt ein unendlich kleines rechtwinkeliges Dreieck; alle Dreiecke haben gleiche und parallele Höhen, aber ungleiche, im Allgemeinen nicht parallele Grundlinien (Elemente der Parallelkreise); die Hypothenusen sind Linienelemente der Serpentine und schliessen offenbar umso kleinere Winkel mit der Bildebene I ein, je weiter sie von Z entfernt sind.

Da alle Punkte des Kreises sich um gleiche Winkel drehen und bei gleichen Drehungswinkeln um gleichviel parallel zur Axe Z weiterschreiten, so folgt, dass alle Punkte der Kreislinie, oder überhaupt der Kreisebene, Schraubenlinien von einerlei Ganghöhe beschreiben.

Es ist also jede Linie auf der Serpentine, deren erstes Bild ein mit der Axe Z concentrischer Kreis ist, eine Schraubenlinie.

ad b) Bewegt sich eine Kugel mit unveränderlichem Radius r mit ihrem Centrum in einer Schraubenlinie weiter, so ist die Fläche, welche alle Lagen der Kugel umhüllt, die Serpentine. Je zwei aufeinander folgende Kugeln schneiden sich in einem nahezu grössten Kreise, welcher ebenfalls auf der Schraubenlinie senkrecht steht, und einer jener Kreise ist, mit welchen auf projectivische Art die Fläche erzeugt wurde.

1289. Wenn eine Fläche (wie eben die Kugel) stetig sich weiter bewegt, so wird die alle Lagen gemeinsam umhüllende Fläche eine Umhüllungsfläche genannt. Die Durchschnittslinie zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Lagen der erzeugenden Fläche bezeichnet man als eine Charakteristik der Umhüllungsfläche.

Die Serpentine in Fig. 152 ist eine Umhüllungsfläche für Kugeln; die zur Schraubenlinie senkrechten Kreise sind deren Charakteristiken. Jede entwickelbare Fläche ist eine Umhüllungsfläche für Ebenen.

1290. Jede Umhüllungsfläche wird von der erzeugenden Fläche längs einer Charakteristik berührt, d. h. das unendlich schmale Flächenelement, welches sich längs einer Charakteristik erstreckt, liegt sowol auf der erzeugenden, als auch auf der Umhüllungsfläche. (Die in Fig. 152 längs den Formlinien sich erstreckenden Formelemente liegen demnach immer auch auf einer erzeugenden Kugel.)

1291. Vermag man in irgend einem Punkte der Charakteristik einer Umhüllungsfläche an die erzeugende Fläche eine Berührungsebene zu legen, so ist dieselbe auch eine Berührungsebene der Umhüllungsfläche. Ist in Fig. 152 $o_1\, o_2$ der Mittelpunkt der beschreibenden Kugel, $M_1\, M_2$ ein Punkt der Charakteristik, so ist die in $M_1\, M_2$ an die Kugel gelegte Berührungsebene auf dem Radius oM senkrecht. Also ist die durch $M_1\, M_2$ gehende Berührungsebene der Umhüllungsfläche auf $o\,M$ senkrecht (1285).

Allgemeine Bemerkungen über perspectivische Flächen.

§. 62.

1292. Welche projectivischen Flächen werden perspectivische Flächen genannt?

Wenn alle Formlinien einer projectivischen Fläche zu einander perspectivisch liegen, d. h. wenn jede Formlinie durch eine directe Projection aus jeder anderen Formlinie gefunden werden kann.

1293. Welche Lagen müssen die Formebenen erhalten, damit alle Formlinien untereinander perspectivisch liegen?

Sie müssen sich sämmtlich in einer einzigen geraden Linie schneiden, welche wir als Formaxe f bezeichnen. Denn wenn sich die Ebenen $E E' E''$ ... alle in f schneiden und man projiciert E aus einem Scheitel S auf E', so ist f die Begegnungsgerade für die perspectivische Lage beider Ebenen. Wird E' aus einem anderen Scheitel S' auf die Ebene E'' projiciert, so ist wieder f die Begegnungsgerade für die perspectivische Lage der Ebenen E' und E'' u. s. w. Da auf diese Art die Axe f immer sich selbst als Projection gibt, und weil jede Formebene auf jede andere Formebene projectivisch bezogen ist (1274), so folgt, dass irgend zwei Formebenen die Formaxe zur Begegnungsgeraden

haben, dass also je zwei beliebige Formebenen perspectivisch liegen.

1294. Was für eine Fläche bilden die aus einer beliebigen Geraden a einer Formebene E projectivisch abgeleiten Geraden $a' a'' a''' \ldots$?

Eine Stralenfläche, deren Scheitel in der Formaxe f liegt; denn nach (1293) fällt jeder Punkt der Formaxe f mit allen seinen verwandten Punkten in den Ebenen $E' E'' E''' \ldots$ zusammen, also muss durch den Schnittpunkt der Geraden a mit der Axe f auch jede andere zu a verwandte Gerade $a' a'' \ldots$ gehen.

1295. Wenn man aus irgend einer Formlinie e eine beliebige perspectivische Fläche ableitet, was für eine Fläche bilden alle Tangenten, deren jede eine Formlinie berührt, wenn alle Berührungspunkte in einer und derselben Seitenlinie (1279) liegen?

Alle Tangenten sind verwandte Gerade, folglich bilden sie zusammen eine Stralenfläche (1294).

Perspectivische Flächen werden demnach längs einer Seitenlinie immer von einer Stralenfläche berührt, deren Scheitel in der Formaxe liegt.

1296. Wann werden bei einer projectivischen, also auch bei einer perspectivischen Fläche die Seitenlinien ebene Gebilde?

Wenn die Scheitellinie S (1278) eine Gerade ist. Denn sind $A A' A'' A''' \ldots$ und $B B' B'' B''' \ldots$ aufeinanderfolgende Punkte zweier Seitenlinien, so sind A' und B' directe Projectionen der Punkte A und B der Formebene E auf die Ebene E' aus einem Punkte S der Scheitellinie s; ebenso sind A'' und B'' directe Projectionen der Punkte A' und B' der Formebene E' auf die Ebene E'' aus einem Scheitelpunkte S' u. s. f. Da nun $A A' A'' A''' \ldots$ sowie auch $B B' B'' B''' \ldots$ ein ebenes Gebilde sein soll, so folgt, dass die Geraden $A A' S$, $A' A'' S'$, $A'' A''' S'' \ldots$ in der Ebene der Seitenlinie $A A' A'' \ldots$ sich befinden, und dass demnach die Scheitellinie $S S' S'' \ldots$ selbst in der Ebene der Seitenlinie $A A' A'' \ldots$ liegen muss. Da nun auf dieselbe Art gefolgert werden kann, dass die Scheitellinie $s = S S' S'' \ldots$ auch in der Ebene der Seitenlinie $B B' B'' \ldots$ sich befindet, so ergibt sich hieraus, dass die Scheitellinie s die Durchschnitts-

gerade der Ebenen ist, in welchen die Seitenlinien $AA'A'' \dots$, $BB'B'' \dots$ liegen.

1297. Wieviele Seitenlinien einer projectivischen, also auch einer perspectivischen Fläche müssen ebene Gebilde sein, auf dass alle übrigen Seitenlinien gleichfalls ebene Gebilde werden?

Sind zwei Seitenlinien ebene Gebilde, so sind es auch alle übrigen, und die Ebenen sämmtlicher Seitenlinien schneiden sich in der geraden Scheitellinie. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus (1296).

1298. Welche gegenseitige Lage haben bei einer perspectivischen Fläche mit gerader Scheitellinie die ebenen Seitenlinien?

Jede Seitenlinie liegt mit jeder anderen perspectivisch.

Beweis. Es seien A und B zwei nebeneinander liegende Punkte einer Formlinie e, so ist AB ein Linienelement, welches beiderseits verlängert eine Berührungsgerade a an die Formlinie e gibt. Sind $A'A''A''' \dots$ und $B'B''B''' \dots$ die aufeinanderfolgenden Punkte der durch A und B gehenden Seitenlinien, so sind $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, ... die zu AB verwandten Linienelemente, welche verlängert die zu a verwandten Berührungsgeraden $a'a''a''' \dots$ geben. Da aber diese Geraden sich sämmtlich in einem Punkte F der Formaxe f schneiden (1294), so folgt, dass der Punkt B eine directe Projection des Punktes A, ebenso B' eine directe Projection von A' ist, u. s. w., woraus sich nun ergibt, dass die Seitenlinie $BB'B''B''' \dots$ mit der Seitenlinie $AA'A''A''' \dots$ perspectivisch liegt.

Ebenso beweiset man auch, dass die Seitenlinie $BB'B'' \dots$ mit der nächstfolgenden $CC'C'' \dots$ in perspectivischer Lage sich befindet.

Weil aber alle Seitenlinien ebene Gebilde sind (1296), deren Ebenen sich in einer und derselben geraden Linie schneiden (nämlich in der geraden Scheitellinie s), so folgt, dass nicht nur je zwei benachbarte Seitenlinien, sondern überhaupt je zwei Seitenlinien perspectivisch liegen.

1299. Wann haben bei einer perspectivischen Fläche die Seitenlinien die Eigenschaften von Formlinien?

Wenn die Scheitellinie s eine Gerade ist; denn dann liegt jede Seitenlinie mit jeder anderen Seitenlinie perspectivisch (1298).

Ist demnach die Scheitellinie einer perspectivischen Fläche eine Gerade, so kann man auch die Scheitellinie als Formaxe, und die frühere Formaxe f als Scheitellinie betrachten, wodurch die früheren Formlinien nun zu Seitenlinien und umgekehrt die vorigen Seitenlinien zu Formlinien werden.

1300. **Wann gibt es bei einer perspectivischen Fläche zwei Systeme von ebenen Linien, deren jede die Berührungslinie der perspectivischen Fläche mit einer Stralenfläche ist?**

Immer dann, wenn die Scheitellinie s eine Gerade ist. Das eine System bilden die Formlinien, das andere die Seitenlinien (1298).

1301. **Wodurch lässt sich eine perspectivische Fläche am leichtesten bestimmen?**

Durch Form und Lage einer Formlinie, einer Seitenlinie und durch die Angabe der Formaxe f und der Scheitellinie s.

1302. **Wie construiert man zu irgend einem Punkte einer Seitenlinie den Scheitel S zu der durch diesen Punkt gehenden Formlinie?**

Zieht man im gegebenen Punkte eine Berührungsgerade an die Seitenlinie, so muss diese durch den zu suchenden Scheitel S gehen, folglich ist ihr Schnitt mit der Scheitellinie s der gesuchte Scheitel.

1303. **Wie construiert man bei einer perspectivischen Fläche zu irgend einem Punkte P einer Seitenlinie die durch diesen Punkt P gehende Formlinie?**

Bei einer perspectivischen Fläche liegen je zwei beliebige Formlinien perspectivisch. Man suche daher zu P den verwandten Punkt (nennen wir ihn Q) in einer anderen schon bekannten Formlinie (P und Q liegen in derselben Seitenlinie, wenn P und Q verwandte Punkte sind), und ziehe die Gerade PQ, so muss in ihr das Centrum S der perspectivischen Lage beider Formebenen sich befinden. Aber wo?

a) Ist die Scheitellinie eine Gerade s, so liegt S im Schnitte von PQ mit s. (Der Lernende versuche den Beweis dieses Satzes selbst zu führen; es zeigt sich dabei, dass die gerade Scheitellinie eine Begegnungsgerade in perspectivisch - collinearen Gebilden wird.)

b) Liegen die Formlinien perspectivisch-affin oder perspectivisch-congruent, so befindet sich S in PQ im Unendlichen.

c) Kennt man von der zu suchenden Formlinie bereits zwei auf eine andere Art ermittelte Punkte P und P', und ist Q' der zu P' verwandte Punkt (Q' und Q müssen in einer und derselben Formlinie liegen), so liegt im Durchschnitte von PQ mit $P'Q'$ das gesuchte Centrum der perspectivischen Lage.

1304. Liegen zwei ebene Gebilde im Raume perspectivisch, so liegen auch ihre Projectionen perspectivisch; mithin kann man in den meisten Fällen die Form- und Seitenlinien perspectivischer Flächen nach den Gesetzen der perspectivischen Collineation (beziehungsweise perspectivischer Affinität, Aehnlichkeit oder Congruenz) abbilden.

1305. Wie construiert man das Bild des Schnittes einer Ebene u mit einer perspectivischen Fläche?

a) Weil die Formlinien ebene Linien sind, so wird man die Schnittgerade der Ebene u mit einer Formebene construieren; wo diese Gerade die Formlinie schneidet, das sind Punkte der gesuchten Schnittcurve. (Dieser Fall ist in (1013) besprochen; die eine Fläche F ist die perspectivische Fläche, die andere F' die gegebene Ebene. Die Fläche F'' ist jene Ebene, welche F in der Formlinie, die gegebene Ebene aber in einer Geraden schneidet.)

b) Sind die Seitenlinien ebenfalls ebene Gebilde, so kann man in derselben Weise wie in *a*) auch die Schnitte der Seitenlinien mit der Ebene u construieren.

Im Uebrigen gilt (1007 oder 1010).

1306. Wie construiert man in einem gegebenen Punkte P einer perspectivischen Fläche eine Berührungsebene?

a) Man construiert an die Form- und an die Seitenlinie, welche durch diesen Punkt P geht, die Tangenten im Punkte P. Durch beide geht die Berührungsebene (1025).

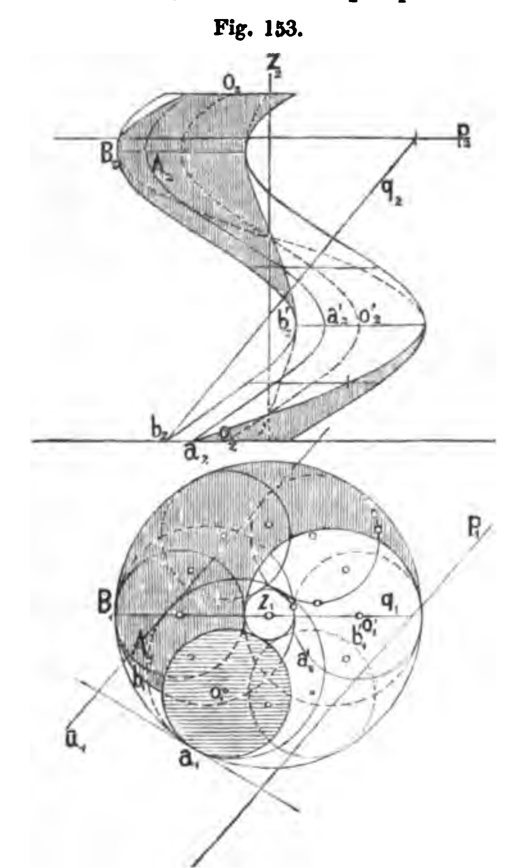
b) Man kann auch im Punkte P an jene Stralenfläche eine Berührungsebene legen, welche die perspectivische Fläche in der durch P gehenden Formlinie, oder, wenn ebene Seitenlinien vorhanden sind,

c) in der durch P gehenden Seitenlinie berührt. Diese Ebene berührt auch gleichzeitig die perspectivische Fläche.

1307. Wie contruiert man an einer perspectivischen Fläche für einen Punkt L den Umriss (1030)?

Man zieht durch den Punkt L und durch den Scheitel einer Stralenfläche, welche die perspectivische Fläche in einer Form- oder in einer Seitenlinie berührt, eine Gerade p (1032), sucht ihren Schnitt mit der Basis der Stralenfläche und legt nach (1066) eine Berührungsebene an die Stralenfläche. Der Berührungsstral durchschneidet die Form- oder Seitenlinie in einem Punkte des gesuchten Umrisses.

Fig. 153.



Wiederholt man für mehrere berührende Stralenflächen dieses Verfahren, so gewinnt man hinreichend viel Punkte, um die Projectionen des gesuchten Umrisses durch entsprechende Verbindung der durch Construction gefundenen Punkte erhalten zu können.

1308. **Wie construiert man den Umriss einer perspectivischen Fläche, wenn der unendlich ferne Punkt L durch eine Richtung l gegeben ist?**

Man zieht durch den Scheitel einer Stralenfläche, welche die perspectivische Fläche längs einer Form- oder einer Seitenlinie berührt, eine Gerade p parallel zu l und verfährt im Uebrigen wie in (1307).

Ist die berührende Stralenfläche cylindrisch, so verfährt man nach (1067, b).

Eine specielle perspectivische Fläche mit unebenen Seitenlinien und unendlich ferner Formaxe.

§. 63.

1309. Aufgabe. Es ist eine perspectivische Fläche unter folgenden Bedingungen herzustellen:

a) Alle Formebenen seien untereinander parallel;

b) die gegebene Formlinie sei ein Kreis;

c) der Mittelpunkt *o* des Kreises beschreibe als Seitenlinie eine Schraubenlinie, deren Axe auf den Formebenen senkrecht steht; und

d) die Scheitellinie *s* liege im Unendlichen.

Auflösung. Der Einfachheit wegen nehme man (Fig. 153) alle Formebenen horizontal, also zur horizontalen Projectionsebene I parallel an, und zeichne auf bekannte Art die Schraubenlinie $o_1 o_1' \ldots, o_2 o'_2 O_2$, welche der Mittelpunkt $o_1 o_2$ des gegebenen Kreises beschreibt. Dieser Kreis wird jedesmal auf die nächstfolgende Formebene projiciert, und zwar parallel mit jener Tangente an die Schraubenlinie, die man durch den Mittelpunkt des Kreises ziehen kann; es ergibt sich nun, dass die Projection des Kreises in jeder Formebene ein Kreis von derselben Grösse ist; mithin kann man den Kreis in seinen verschiedenen Stellungen zeichnen, wobei sein erstes Bild mit ihm congruent, sein zweites Bild eine zur Bildaxe parallele Gerade von der Länge eines Durchmessers wird.

Der höchste Kreis, mit welchem die gewundene Fläche endet, erscheint im ersten Bilde vollkommen sichtbar (er wurde schraffiert), während jeder tiefer liegende Kreis teilweise durch die darüber liegende Fläche gedeckt, also im ersten Bilde zum Teil gestrichelt wird. Der höchste und tiefste Kreis in Fig. 153 decken sich vollständig, mithin kann der tiefste Kreis im ersten Bilde nicht mehr gestrichelt werden.

1310. Was für eine Seitenlinie beschreibt irgend ein anderer Punkt, z. B. $a_1 a_2$, der ersten Formebene?

Da alle Formebenen zueinander parallel sind und jede Formlinie auf die nächste Formebene durch parallele Stralen projiciert wird, so folgt, dass alle Punkte der Formebene congruente Seitenlinien, also congruente Schraubenlinien in paralleler Lage beschreiben.

Das erste Bild der durch $a_1 a_2$ gehenden Seitenlinie ist demnach ein Kreis $a_1 a'_1 A_1 a_1$ von derselben Grösse, wie jener, auf welchem o_1 liegt.

Das zweite Bild $a_2 a'_2 A_2$ ist congruent mit dem durch o_2 gehenden Bilde der Schraubenlinie des Mittelpunktes $o_1 o_2$?

1311. Wie stellt sich die erste Contour der Fläche dar?

Die erste Contour der Fläche ist jene Linie, welche dem projicierenden Auge I die ihm sichtbare Seite der Fläche begrenzt; folglich ist ihr erstes Bild die Contour vom ersten Bilde der Fläche. Die Contour des ersten Flächenbildes sind zwei concentrische Kreise mit dem Centrum Z_1. Sucht man zu diesen Kreisen die zugeordneten Punkte im zweiten Bilde, so findet man als zweites Bild der ersten Flächencontour die Bilder von zwei Schraubenlinien, welche zwar mit den Seitenlinien einerlei Ganghöhe besitzen, sonst aber keine Seitenlinien sind.

In Fig. 153 wurde im zweiten Bilde jener Flächenteil schraffiert, welcher dem auf die Bildebene I senkrecht sehenden Auge unsichtbar ist, aber von dem Auge II gesehen wird.

Der nicht schraffierte Teil des zweiten Bildes ist aus beiden Projectionscentren I und II sichtbar.

1312. Wie gestalten sich die Bilder der zweiten Flächencontour?

Das zweite Bild der zweiten Flächencontour ist die Contour des zweiten Bildes der Fläche. Wie man leicht einsieht, besteht die zweite Flächencontour aus zwei Seitenlinien, deren jede nach (1310) im ersten Bilde als ein Kreis congruent mit jenem erscheint, auf welchem $o_1 o'_1$ liegt.

In der Bildebene I wurde wieder das Bild jenes Teiles der Fläche schraffiert, welcher dem projicierenden Auge II unsichtbar, hingegen aber dem projicierenden Auge I sichtbar ist.

Der nicht schraffierte Teil ist das Bild jenes Teiles der Fläche, welcher beiden projicierenden Augen sichtbar ist.

1313. Wie bestimmt man den Schnitt der gewundenen Fläche F (Fig. 153) mit einer Ebene u?

Nach (1305). Um die Kreise mit u zum Schnitt zu bringen, sucht man die Schnittgerade jeder Kreisebene mit der Ebene u. Zu diesem Zwecke wird eine Zweier - Spurparallele $q_1 q_2$ der Ebene u dargestellt. Jede Kreisebene schneidet q in einem Punkte, dessen zweites Bild in q_2 man zuerst findet; durch sein erstes

Bild geht das erste Bild des Schnittes beider Ebenen, nämlich eine zu p_1 parallele Gerade. Wo diese das erste Bild des Kreises, durch welchen die Ebene gelegt wurde, schneidet, sind die ersten Projectionen von den Schnitten des Kreises mit der Ebene u.

Würde man eine Bildebene III senkrecht zu $\bar{u}_1$ einführen und das dritte Bild der Fläche suchen, so würde sich der Schnitt der Kreise, sowie auch der Seitenlinien mit der Ebene u im dritten Bilde in die Nullseite $\mathring{\bar{u}}_3$ projicieren. Aus diesem dritten Bilde ergeben sich durch Ordinalen die ersten Bilder der Kreis- und Seitenlinien-Schnittpunkte und aus den ersten die zweiten Bilder ebenfalls durch Ordinalen und durch die aus den dritten Bildern zu entnehmenden ersten Ordinaten.

Specielle perspectivische Flächen mit ebenen Seitenlinien. Begriff von Flächen II. Ordnung. Rotationsflächen. Die Rotations-Ellipsoide, Paraboloide mit Hyperboloide.

§. 64.

1314. Man soll eine perspectivische Fläche unter folgenden Bedingungen orthogonal oder überhaupt durch eine Parallel-Projection abbilden:

a) die Formlinie sei eine Parabel;

b) eine gegebene Seitenlinie sei abermals eine Parabel, deren Durchmesser mit jener der Form-Parabel parallel sein sollen;

c) die Formaxe liege im Unendlichen, und

d) die gerade Scheitellinie liege im Unendlichen.

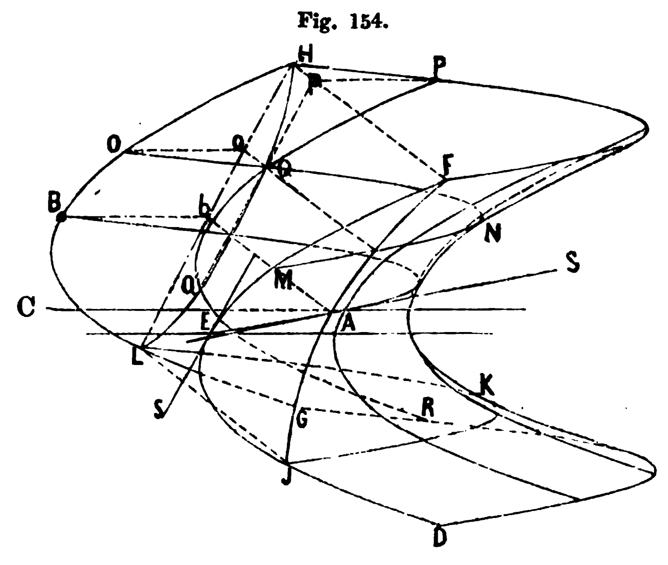
ad a) Liegt die Form-Parabel in einer gegebenen Ebene u und kennt man einen Durchmesser, seinen endlich gelegenen Endpunkt, die durch ihn gehende Tangente und noch einen Periferiepunkt, in ihrer Lage gegen eine Spur der Ebene u, z. B. gegen $\bar{u}_1$, so kann man nach (739) die Projectionen dieser Stücke in jeder Bildebene bestimmen und dann nach Fig. 45 die Bilder der Parabel construieren, welche wieder Parabeln sind.

In Fig. 154 wurde nur eine Projection gezeichnet und desshalb die Zeiger der Buchstaben weggelassen. Daselbst ist AC ein Parabeldurchmesser, AS die Tangente in A und B ein Periferiepunkt.

ad b) Die Seitenlinie DEF liegt in einer anderen Ebene w, welche die Ebene u in einer zur Axe der Form-Parabel parallelen Geraden durchschneidet, welche ein Durchmesser der Seitenlinie sein muss. Für diese sei Es die Tangente in E, und F

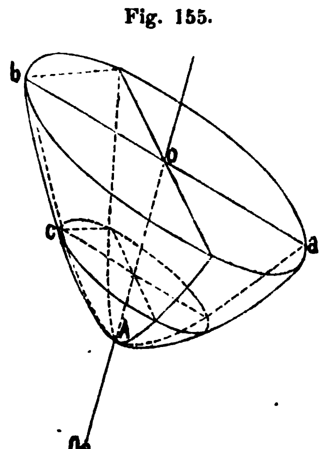
ein Periferiepunkt, gegeben; mithin lässt sich die Parabel DEF construieren.

Fig. 154.



ad c) Wenn die Formaxe im Unendlichen liegt, so folgt, dass alle Formebenen zu einander parallel sind.

Fig. 155.



ad d) In der geraden Scheitellinie schneiden sich alle Seitenebenen (1297) und weil diese Scheitellinie im Unendlichen liegt, so sind alle Seitenebenen ebenfalls zu einander parallel.

1315. Um jene Formlinie bildlich darzustellen, welche durch irgend einen Punkt der Seitenlinie DEF, z. B. durch F geht, beachte man (1304). Es liegen je zwei Formlinien perspectivisch-congruent, also auch ihre orthogonalen (oder schiefen) Projectionen. Nun sind jene Punkte zweier Formlinien verwandt, welche in derselben Seitenlinie liegen, also ist in Fig. 154 der Punkt E mit F verwandt, folglich lässt sich die obere durch F gehende Parabel nach §. 9 construieren.

Auf dieselbe Art wurden noch weitere drei Formlinien abgebildet.

Eine Linie, welche die Bilder aller Formlinien berührt, gibt die Contour des Bildes der Fläche.

1316. Nach (1299) sind die Seitenlinien genau so wie Formlinien zu behandeln. Ihre Lage ist eine perspectivisch-congruente, folglich lassen sich nach §. 9 noch beliebig viele Bilder von Seitenlinien darstellen. Dabei sind immer je zwei Punkte zweier Seitenlinien verwandt, welche in derselben Formlinie liegen. Für die durch B gehende Seitenlinie ist B mit dem Punkte E der Seitenlinie $DJEF$ verwandt, folglich ist EB die Richtung der congruent-projicierenden Stralen.

1317. Es soll durch die Raumpunkte FHJ der in Fig. 154 abgebildeten Fläche eine Ebene v gelegt, und ihr Schnitt mit der Fläche projiciert werden.

Das Bild des Schnittes der Ebene v mit der oberen Formebene ist die Gerade FH, also sind die Schnitte von v mit den anderen Formebenen zu FH parallel; folglich ist L ein Punkt vom Bilde des Schnittes, weil JL mit FH parallel läuft und J ein Punkt der Fläche ist.

Die Formebenen schneiden jede Seitenebene in Parabeldurchmessern (1314, b), wodurch sich in HL Punkte wie o und b ergeben. Nun liegt aber die Gerade HL in der Ebene v, folglich auch die Punkte o und b. Werden nun durch o und b zu FH parallele Gerade gezogen, so schneiden diese die Parabeln in Punkten, welche in der Ebene v liegen und entsprechend verbunden, den Schnitt $FJHL$ der Ebene v mit der Fläche liefern.

1318. Auf dieselbe Art, wie in (1317) Punkte der Schnittcurve der Ebene v mit der perspectivischen Fläche mittels der Formlinien abgebildet wurden, kann man sie auch mittels der Seitenlinien abbilden; denn zieht man in Fig. 154 durch den Punkt P einer Seitenlinie PR einen Parabeldurchmesser, bis er HF in p schneidet, so ist durch p nur eine Parallele zu HL (HL ist das Bild des Durchschnittes der Ebene v mit der Seitenebene $HOLG$) zu ziehen, welche die Seitenlinien PR sofort in zwei Punkten Q und Q' schneidet, welche dem Bilde der Schnittcurve zwischen der Fläche und der Ebene v angehören.

1319. Es ist eine perspectivische Fläche (Fig. 155) unter nachstehenden Voraussetzungen durch Parallel-Projectionen abzubilden:

a) die Formlinie sei eine Ellipse ab;

b) die gegebene Seitenlinie sei eine Hyperbel, von welcher ein Ast aAb mit der Ellipse einen Durchmesser ab gemein haben soll;

c) die Formaxe liege im Unendlichen und

d) die gerade Scheitellinie sei der zur Sehnenrichtung ab conjugierte Durchmesser oO der Hyperbel.

Auflösung. Man zeichne mit Hilfe einer Umlegung (739) die Projectionen der in einer gegebenen Ebene u liegenden Formellipse, und gleichwol auch die Projectionen der als Seitenlinie gegebenen in einer anderen Ebene w liegenden Hyperbel den gegebenen Bedingungen gemäss.

Da jede Formlinie mit jeder anderen Formlinie sowol im Raume als auch im orthogonalen oder schiefen Bilde perspectivisch ähnlich liegt, so kann man in jeder Bildebene unabhängig von einer zugeordneten Bildebene nach dem Principe der perspectivischen Aehnlichkeit (§. 10) noch eine beliebige Anzahl von Formlinien-Bildern construieren.

Weil ferner jede Seitenlinie mit jeder anderen sowol im Raume als auch im orthogonalen oder schiefen Bilde perspectivisch affin liegt, wobei die gerade Scheitellinie, beziehungsweise ihr Bild, als Begegnungsgerade dient, so lassen sich nach dem Principe der perspectivischen Affinität auch die Bilder von einer beliebigen Menge von Seitenlinien (Hyperbeln) bestimmen. Die Gesammtheit der Bilder aller Form- und Seitenlinien, mit Inbegriff der alle diese Bilder umhüllenden Contour, gibt ein Bild der verlangten Fläche.

In Fig. 155 wurde von der aus zwei getrennten Flächenästen (jeder Flächenast entsteht aus einem Aste der als Seitenlinie gegebenen Hyperbel) bestehenden Fläche nur ein Flächenast gezeichnet. O ist der Mittelpunkt aller Hyperbeln, A deren Schnitt mit der Begegnungsgeraden (gerade Scheitellinie), welche ab halbiert.

1320. Wie entstehen perspectivische Flächen, in welchen jede Formlinie auch mit jeder Seitenlinie perspectivisch liegt?

Wir denken uns eine beliebige Linie II. Ordnung e als gegebene Formlinie mit einer in der Ebene e liegenden beliebigen Geraden p als Formaxe, welcher für die Curve e ein gewisser Punkt P als Pol entsprechen wird (363).

Durch P ziehe man eine beliebige gerade Scheitellinie s, welche aber nicht in der Ebene e liegen darf, und lege durch s eine beliebige Ebene u, welche die Linie e in einer Sehne $a\,b$, die Gerade p aber in einem Punkte Q schneidet. Construiert man in der Ebene u wieder irgend eine Linie u der II. Ordnung, für welche aber Q der Pol, s die Polare und ab eine Sehne ist (443), so kann man die Linie u zur Seitenlinie einer perspectivischen Fläche wählen, in welcher p die Formaxe, e eine Formlinie und s die gerade Scheitellinie ist. In dieser perspectivischen Fläche liegt jede Seitenlinie mit jeder Formlinie perspectivisch (?).

1321. Eingehendere Untersuchungen zeigen, dass jeder ebene Schnitt einer solchen Fläche eine Linie II. Ordnung ist, (zu welchen auch gerade Linien als Specialitäten von Parabeln und Hyperbeln gehören), und dass jede dieser Flächen auf unendlich viele der in (1320) beschriebenen Arten entstehen kann.

Weil nun derartige Flächengebilde von einer Geraden nicht in mehr als in zwei Punkten geschnitten werden können, so sind sie als Flächen II. Ordnung zu bezeichnen.

Die Flächen II. Ordnung zerfallen in windschiefe Flächen (einmantelige Hyperboloide und windschiefe Paraboloide), in Curvenflächen (Ellipsoide mit Inbegriff der Kugel, elliptische Paraboloide und zweimantelige Hyperboloide) und in Kegelflächen, welche als Grenzfälle der ein- oder zweimanteligen Hyperboloide zu betrachten sind.

1322. Aufgabe. Der Lernende wolle diese Flächen (1320) unter der Voraussetzung construieren, dass alle Formebenen parallel werden und die gerade Scheitellinie im Mittelpunkte der Formlinie auf der Formebene senkrecht stehe:

a) Die gegebene Formlinie sowol wie die gegebene Seitenlinie sei eine Ellipse (Ellipsoid);

b) die Formlinie eine Ellipse, die Seitenlinie eine Hyperbel (ein- oder zweimanteliges Hyperboloid);

c) die Formlinie eine Ellipse, die Seitenlinie eine Parabel (elliptisches Paraboloid);

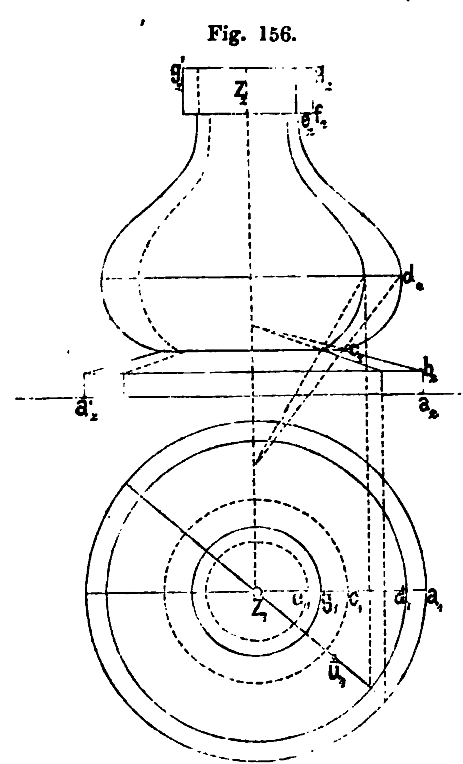
d) die Formlinie eine Parabel, die Seitenlinie eine Parabel (ein elliptisches oder ein windschiefes Paraboloid).

1323. **Welche perspectivischen Flächen nennt man Rotationsflächen?**

Sind bei einer perspectivischen Fläche alle Formlinien untereinander congruent (1283), alle Seitenlinien aber Kreise, deren Ebenen

auf der endlich gelegenen Formaxe senkrecht stehen und ihre Centra in der Formaxe haben, dann nennt man diese Flächen **Rotations-** oder **Drehungsflächen**, weil man sie auch durch Drehung einer Formlinie um die Formaxe erzeugen kann. Die Formaxe bezeichnet man als **Rotationsaxe**, die Formlinien als **Meridiane** und die Seitenlinien als **Parallelkreise**.

Fig. 156.



In Fig. 156 steht die Rotationsaxe Z_1 Z_2 auf der Bildebene I senkrecht, der mit der Bildebene II parallele Meridian projiciert sich auf derselben in wahrer Gestalt $a_2\, b_2\, c_2\, d_2\, e_2 f_2\, g_2$, welche Linie zugleich als die eine Hälfte der zweiten Bildcontour sich ergibt. In der ersten Bildebene erhält man die Projectionen der Parallelkreise als Kreise.

1324. Ist $\overset{\circ}{u}_1$ irgend eine Meridianebene (welche durch die Rotationsaxe Z geht), so muss die in ihr liegende Meridianlinie mit der gegebenen congruent sein (1323) und perspectivisch liegen, folglich wird die Richtung, in welcher man die gegebene Meridianlinie auf die Ebene u congruent projiciert, mit beiden Meridianebenen gleiche Winkel einschliessen und zu den Parallelkreisebenen parallel sein müssen.

Die orthogonalen oder schiefen Abbildungen aller Meridiane liegen perspectivisch affin, jene der Parallelkreise perspectivisch ähnlich; man kann daher, wie dies schon bei anderen perspectivischen Flächen gezeigt wurde, Meridiane und Parallelkreise nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität und Aehnlichkeit abbilden.

Die Herstellung der Fig. 156 ist so einfach, dass sie von dem aufmerksam Lernenden ohne Anstand getroffen werden kann.

1325. Aufgabe. Der Lernende wolle die in Fig. 156 gezeichnete Rotationsfläche so darstellen, dass die Rotationsaxe Z gegen die Bildebene I unter einem Winkel von 60° und gegen die Bildebene II unter 20° geneigt ist (Z soll von unten nach aufwärts rechts gehen und sich von der Bildebene II entfernen). Der tiefste (in der Figur zugleich auch der grösste) Parallelkreis soll die Bildebene I berühren.

Auflösung. Nach (815) wird $Z_1 Z_2$ aufgesucht. Alsdann legt man durch Z_1 eine Bildebene III senkrecht auf I und sucht Z_3. Im Abstande von $Z_1 a_1$ zieht man unterhalb Z_3 (der Bildebene I zugewendet) eine Parallele zu Z_3, bis sie Z_1 trifft. Durch diesen Punkt geht der unterste Parallelkreis, dessen drittes Bild eine zu Z_3 senkrechte Gerade ist. Ueber dieser Geraden wird der Meridian mit Z_3 als Symmetrieaxe genau so verzeichnet, wie er in Fig. 156 über $a_2 a'_2$ mit Z_2 als Symmetrieaxe verzeichnet wurde.

Denkt man sich durch Z_3 eine Meridianebene senkrecht zur Bildebene III geführt, so liegen in ihr diejenigen Durchmesser aller Parallelkreise, welche zur Bildebene I parallel werden (weil sie auf der Bildebene III senkrecht stehen), folglich erscheinen sie in ihren ersten Bildern in wahrer Länge. Auf diese Art erhält man von einem Meridiane (einer Formlinie) ein erstes Bild.

Sucht man zu einem dieser horizontalen Parallelkreis-Durchmesser das erste Bild des zu ihm senkrechten Durchmessers (dieses erste Bild muss in die Gerade Z_1 fallen), so hat man von dem ersten Bilde eines Parallelkreises die grosse und kleine Axe der Ellipse gefunden, und nun kann man entweder auf dieselbe Art die ersten Bilder mehrerer Parallelkreise construieren, oder auch wie in Fig. 155 verfahren.

Aus dem ersten und dritten Bilde ergibt sich auch das zweite.

Die Contouren der Bilder ergeben sich als Umhüllungslinien der gezeichneten Form- und Seitenlinien.

1326. Aufgabe. Man soll den Schnitt einer Ebene u mit einer Rotationsfläche abbilden.

In Fig. 157 wurde in der Bildebene I eine zur Bildebene II senkrechte Rotationsaxe Z_1 angenommen und der in der Bildebene I liegende Meridian $a_1 c_1$ gezeichnet. Die Rotationsfläche soll auf einer geneigten Ebene u_1 (welche durch a_1 und $p_1 p_2$ gegeben ist) aufstehen. Die Projectionen der Schnittlinie wurden

nach (1305, *b*) bestimmt; dabei ist $a'_2 b_2$ das zweite Bild der Geraden, welche als Durchschnitt der Ebene u mit der Ebene des Parallelkreises vom Punkte $a_1 a_2$ entsteht, mithin beginnt das zweite Bild der Schnittcurve in b'_2.

Der Schnitt von u mit der Parallelkreisebene eines anderen Punktes $c_1 c_2$ projiciert sich im zweiten Bilde in einer durch d_2 zu $a'_2 b_2$ parallelen Geraden, welche das zweite Bild des Parallelkreises c in e_2 schneidet.

Fig. 157.

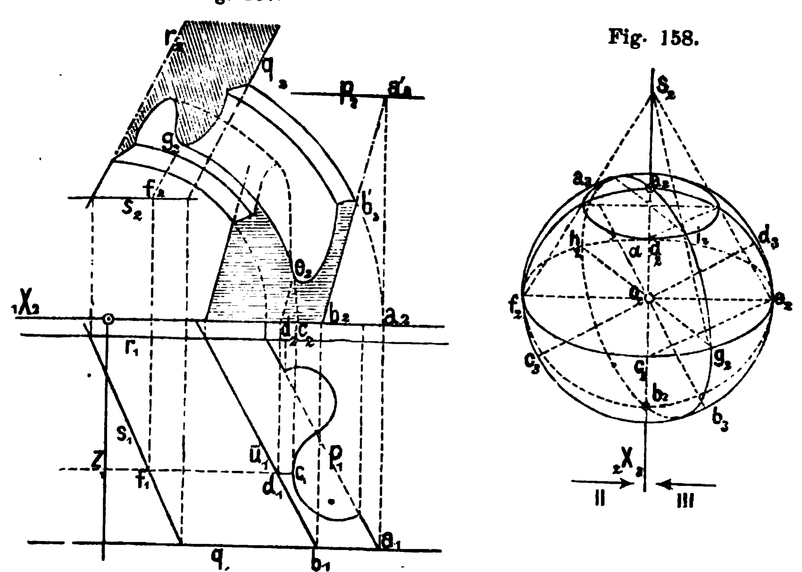


Fig. 158.

Nachdem der ganze Schnitt gefunden, wurde die Ebene u mit horizontalen Linien schraffiert.

Ausser diesem Schnitte wurde noch ein zweiter Schnitt mit einer Ebene w (gegeben durch $q_1 q_2$, $r_1 r_2$ parallel zur Bildebene II) construiert und im zweiten Bild die Schnittfläche der Ebene w mit dem Rotationskörper schraffiert.

Da von der Ebene w die erste Spur nicht benützt werden sollte, so wurde eine Einser-Spurparallele $s_2 s_1$ angenommen. Die Parallelkreisebene durch c_1 schneidet s im Punkte $f_1 f_2$, und durch f_2 geht zu q_2 eine Parallele, welche das zweite Bild des Schnittes der Ebene w mit der Parallelkreisebene von c ist. Der Punkt g_2 gehört dem zweiten Bilde der Schnittcurve an.

Die ersten Bilder der beiden Schnittcurven sowie das erste Bild der Rotationsfläche wurden nicht gezeichnet.

1327. **Aufgabe.** Es soll eine beliebige ebene oder unebene Linie l um eine Gerade Z gedreht und die von l beschriebene Rotationsfläche abgebildet werden.

Auflösung. Teilt man die volle Umdrehung von 360^0 etwa in 8 oder 12 gleiche Winkel α, so kann man die gegebene Linie l zuerst um α, dann um 2α, 3α u. s. w. drehen und die verschiedenen Lagen von l nach Art der Fig. 106 darstellen. Die Gesammtheit aller l gibt ein Bild der Fläche.

1328. Alle durch die Rotationsaxe gelegten Ebenen schneiden die Fläche in Meridianen oder congruenten Formlinien.

1329. Dreht sich eine Gerade l um eine Gerade Z, so entsteht entweder eine senkrechte Kreiskegelfläche, wenn l und Z in einer Ebene liegen, oder es entsteht ein windschiefes Hyperboloid (Rotations-Hyperboloid), wenn l und Z nicht in einer Ebene liegen.

Der Lernende wolle dasselbe in orthogonaler Projection darstellen, wenn Z auf einer Bildebene senkrecht steht. In der zugeordneten Bildebene ist die Contour des Bildes eine Hyperbel, deren Asymptoten die Projectionen von l sind, wenn l zur Bildebene parallel geworden ist.

1330. Dreht man eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel um ihre Axen, so entstehen Rotations-Ellipsoide, Paraboloide, Hyperboloide. Enthält letzteres nur einen Flächenast, so ist es das windschiefe Rotations-Hyperboloid (1329).

Einige Constructions-Aufgaben an und mit der Kugel. Contour-Uebergangspunkte an Rotationsflächen.

§. 65.

1331. **Man soll eine Kugel auf der Bildebene II orthogonal abbilden. Ausser der Kugelcontour ist ein Durchmesser ab zu zeichnen, welcher in einer zu $_1X_2$ senkrechten Ordinatenebene liegt, und mit der Bildebene II einen gegeben Winkel α einschliesst.**

Jede orthogonale Projection einer Kugel erscheint im Umriss gleich einem grössten Kugelkreise, wobei der zu der Bildebene parallele grösste Kreis die Contour der Kugel für das projicierende Auge sein muss. Ist sonach in Fig. 158 o_2 das orthogonale Bild des Kugelcentrums o, so ist der mit dem Kugelradius aus o_2 in der Bildebene II beschriebene Kreis die Contour des zweiten orthogonalen Bildes der Kugel. (Die erste Projection, sowie $_1X_2$ wurde in Fig. 158 weggelassen.)

Um $a_2 b_2$ zu finden, denke man sich die Bildebene II gehe durch o und lege durch o eine Bildebene III senkrecht auf ${}_1X_2$ (also ${}_2X_3$ senkrecht auf ${}_1X_2$ durch o_2), so muss $a_3 b_3$ durch o_2 gehen und mit ${}_1X_2$ den gegebenen Winkel α einschliessen. $a_3 b_3$ erscheint als ein Kugeldurchmesser und a_2, b_2 liegen in den durch a_3 und b_3 zu ${}_2X_3$ gezogenen Ordinalen in ${}_1X_2$.

1332. Man soll das zweite Bild des auf ab (Fig. 158) senkrechten grössten Kugelkreises construieren.

Da ab in der Bildebene III liegt, so ist die Ebene des zu suchenden Kreises senkrecht auf der Bildebene III und erscheint der Kreis im dritten Bilde in $c_3 d_3 \perp a_3 b_3$.

Ordinalen durch c_3 und d_3 geben in c_2 und d_2 die Endpunkte vom Bilde jenes Kreisdurchmessers, welcher sich in die Bildaxe ${}_2X_3$ projiciert. Der conjugierte Durchmesser ef ist zur Bildebene II parallel und erscheint desshalb in $e_2 f_2$ in wahrer Grösse. Aus $e_2 f_2$ und $c_2 d_2$ (Axen der Ellipse) lässt sich das zweite Bild des Kreises wie in Fig. 37 construieren.

1333. Man soll das zweite Bild jenes Kreises construieren, welcher die Kugeldurchmesser ab und ef (Fig. 158) enthält.

Da beide Durchmesser aufeinander senkrecht stehen, so sind ihre orthogonalen Projectionen $a_2 b_2$, $e_2 f_2$ conjugierte Durchmesser jener Ellipse, welche das zweite Bild des zu suchenden Kreises ist.

1334. Man soll das zweite Bild eines durch ab (Fig. 158) gehenden Kugelkreises darstellen, dessen Ebene den Kreis $dfce$ in g schneidet (g_2 ist das zweite Bild von g).

Da ab auf der Ebene $dfce$ senkrecht steht, so sind ab und gh zwei zu einander senkrechte Kreisdurchmesser, folglich $a_2 b_2$ und $g_2 h_2$ zwei conjugierte Ellipsendurchmesser. Die daraus construierte Ellipse $a_2 g_2 b_2 h_2$ ist das zweite Bild des gesuchten Kreises. Die Tangenten in a_2 und b_2 müssen zu $g_2 h_2$, jene in g_2 und h_2 zu $a_2 b_2$ parallel sein.

1335. Es ist i_2 (Fig. 158) das zweite Bild eines im Kreise $agbh$ liegenden Punktes i. Man soll das zweite Bild des durch i gehenden zur Ebene $dfce$ parallelen Sehnenkreises darstellen.

Weil der Mittelpunkt des zu suchenden Kreises in ab liegen muss, und die erwähnten zwei Kreisebenen parallel sind, so folgt,

dass die Kreise perspectivisch ähnlich liegen; es ist demnach der Punkt S_2, in welchem die Gerade $g_2 i_2$ die $a_2 b_2$ schneidet, das Centrum der perspectivischen Aehnlichkeit, mithin kann nach (§. 10) das zweite Bild des gesuchten Kreises als eine mit $d_2 f_2 c_2 e_2$ perspectivisch-ähnliche Ellipse gezeichnet werden.

1336. Eine Kugel liegt mit ihrem Mittelpunkte O in einer Bildebene; man soll für irgend einen in der Bildebene liegenden Punkt P den Umriss auf der Kugel abbilden.

In Fig. 35 sei der Kreis die orthogonale Projection der Kugel und PM, PN seien die durch P gehenden Tangenten an den grössten Kreis, alsdann ist MN das orthogonale Bild jenes Kreises, in welchem alle durch P gehenden Kugeltangenten die Kugel berühren. Denn dreht man den Kreis und die zu PO senkrechte Sehne MN um PO, so beschreibt der Kreis die Kugel, PM und PN beschreiben einen die Kugel umhüllenden Kegel mit einem Berührungskreise, welcher in der von MN beschriebenen, also zu PO senkrechten Ebene des Umrisskreises liegt.

1337. Erklärung. Wenn ein Punkt und eine Ebene die Eigenschaft haben, alle durch den Punkt gehenden Sehnen einer Fläche harmonisch zu teilen, so nennt man den Punkt den Pol der Ebene und letztere die Polarebene des Punktes bezüglich der Fläche.

1338. In Fig. 35 ist P der Pol der Geraden MN und $PDFE$ (der Buchstabe F ist in der Figur dorthin zu schreiben, wo PE die Sehne MN schneidet) eine harmonische Punktreihe (364). Dreht sich die ganze Figur um die Gerade PO, so bleiben die Punkte D und E auf der Kugel und F in der zu PO senkrechten Ebene MN, und man erkennt unzweifelhaft: Zieht man durch P eine beliebige Gerade, welche die Kugel schneidet, so wird die auf ihr entstandene Kugelsehne durch P und die Ebene MN harmonisch geteilt.

1339. Wir wissen, dass in Fig. 35 $D'E'$ die Polare des Punktes C ist (365), woraus nun folgt, dass jede durch C gehende Kugelsehne durch C und durch die zu PO senkrechte Ebene $D'E'$ harmonisch geteilt wird. Aus (1338) und (1339) ergibt sich nun der Satz:

1340. Zu jedem Punkte im Raume, er mag ausserhalb oder im Inneren einer Kugel liegen, gibt es für die Kugel eine und

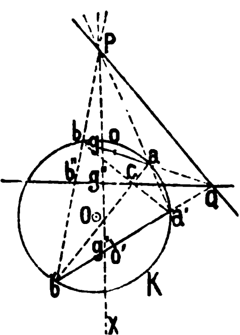
nur eine Polarebene. Diese schneidet die Kugel, wenn der Pol ausserhalb der Kugel liegt. Ebenso erkennt man:

1341. Die Polarebene eines Punktes bezüglich einer Kugel steht immer auf der Geraden senkrecht, welche den Punkt mit dem Centrum der Kugel verbindet.

1342. Welche Lage besitzen je zwei beliebige auf einer Kugelfläche liegende Kreise gegen einander?

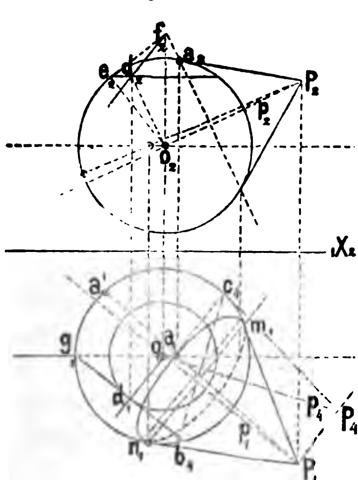
Sie liegen perspectivisch.

Fig. 159.



Beweis. Sind oo' die Mittelpunkte zweier Kugelkreise kk', deren Ebenen u und u' genannt werden sollen, und ist O das Kugelcentrum, so steht Oo auf u und Oo' auf u' senkrecht (140), folglich müssen beide Ebenen u und u' auf der durch $oo'O$ gelegten Ebene senkrecht stehen (136). Man lege die Kugel mit den drei Punkten $oo'O$ in eine Bildebene (Fig. 159), alsdann sind die orthogonalen Bilder der Kreise k und k' zwei Sehnen ab und $a'b'$ des grössten Kugelkreises K. Ergänzt man die vier Punkte $aba'b'$ zu einem vollständigen Vierecke, so ist nach (308) QC eine Gerade, welche die Reihen Paa' und Pbb' harmonisch teilt, mithin ist QC die Polare des Punktes P (367), folglich ist die durch QC zur Bildebene senkrecht geführte Ebene u'' die Polarebene des Punktes P (1338).

Fig. 160.



Zieht man von P zu irgend einem Punkte G des Kreises k einen Stral, welcher die Polarebene in einem Punkte G'' durchschneidet, so müssen die orthogonalen Bilder gg'' dieser Punkte in u und u'' liegen. Der noch unbekannte zweite Schnittpunkt G' der Geraden PG mit der Kugel liegt so, dass $PGG''G'$ eine harmonische Reihe ist (1338); also muss auch die Projection $Pgg''g$ dieser vier Punkte eine harmonische Reihe sein, woraus nun folgt,

dass g' die Projection von G' wird, dass also demzufolge G' ein Punkt im Kreise k' sein muss.

Weil nun jeder Punkt des Kreises k aus P auf die Kugel projiciert, seine Projection im Kreise k' erhält, so folgt, dass die beiden Kreise k und k' perspectivisch liegen.

Die Durchschnittsgerade ihrer Ebenen ist die Begegnungsgerade der perspectivischen Lage.

1343. Je zwei beliebige auf einer Kugel liegende Kreise k und k' liegen stets auf eine zweifache Art perspectivisch. Denn weil in Fig. 159 C der Pol der Geraden PQ, so ist C der Pol der durch PQ zur Bildebene senkrecht gelegten Ebene, woraus man auf eine analoge Art wie in (1342) erkennt, dass der Kreis k aus C auf die Kugel projiciert, den Kreis k' als Projection gibt.

1344. Wie construiert man für zwei auf einer Kugel liegende Kreise k und k' die Centra P und C ihrer perspectivischen Lage?

Legt man durch ihre Mittelpunkte oo' und durch den Mittelpunkt O der Kugel eine Ebene, so liegen in ihr beide Centra P und C. Sucht man den Schnitt dieser Ebene mit den Kreisen k und k' und ermittelt jene zwei Diagonalpunkte (307) des durch die erhaltenen vier Schnittpunkte bestimmten Viereckes, welche nicht in den Kreisebenen liegen, so sind P und C gefunden.

1345. Es ist besonders zu bemerken, dass die Mittelpunkte oo' der Kreise kk' nur dann perspectivisch liegen, wenn die Kreisebenen parallel sind, in welchem Falle die Centra P und C der perspectivischen Lage sich in der Geraden oo' befinden.

1346. Liegen die Kreise k und k' einer Kugel auf einer Cylinderfläche (also P in Fig. 159 im Unendlichen), so liegen die Mittelpunkte oo' beider Kreise ebenfalls perspectivisch.

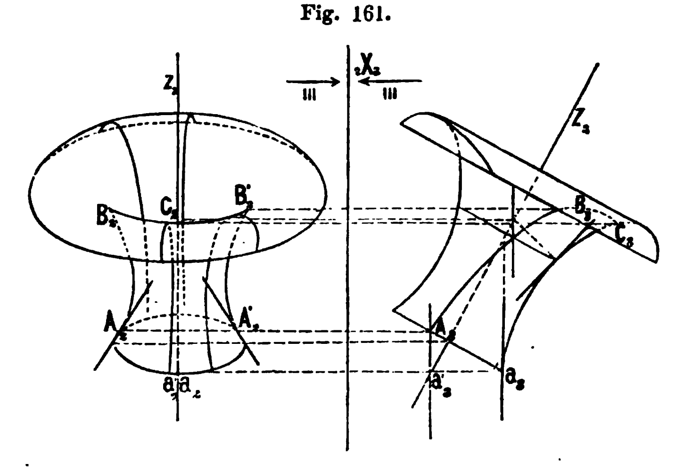
1347. Eine Kugel liegt beliebig gegen die Bildebenen; man soll für irgend einen Punkt $P_1 P_2$ (Fig. 160) den Umriss orthogonal abbilden.

Der Umriss ist ein Kreis k; je zwei Kreise einer Kugel liegen perspectivisch (1342), also liegt auch k mit dem zur Bildebene I parallelen grössten Kreise perspectivisch; mithin ist für ihre orthogonalen Bilder P_1 das Centrum und dessen Polare $m_1 n_1$ (erstes Bild der Durchschnittsgeraden beider Kreisebenen) die Begegnungsgerade. Zieht man durch P_2 eine Tangente $P_2 a_2$, so-

liegt a_1 im ersten Bilde der zweiten Kugelcontour und weil $a_2 a_1$ ein Punkt des Umrisses für P ist, so sind im ersten Bilde schon zwei verwandte Punkte für die perspectivische Collineation gefunden, indem zu a_1 jener Punkt a' verwandt ist, welcher in der Geraden $P_1 a_1$ in der Contour des ersten Kugelbildes liegt. Nun kann man nach der Lehre über perspectivische Collineation das erste Bild des Umrisses für P construieren. (Das zweite Bild wurde nicht gezeichnet.)

1348. Um auf gewöhnlichem Wege das erste Bild des Umrisses für P zu erhalten, legt man durch o_2 eine zu I parallele (beigeordnete) Bildebene III und durch $P_1 o_1$ eine Ebene IV

Fig. 161.



senkrecht auf III und bestimmt P_4. Zieht man von P_4 die Tangenten an die Contour des vierten Kugelbildes und verbindet die Berührungspunkte durch eine Gerade, so ist $b_4 c_4$ das vierte Bild des Umrisses für P. Das erste Bild (welches mit dem dritten zusammenfällt, wegen des Parallelseins der Ebenen I und III) erhält zur grossen Ellipsenaxe die Länge von $b_4 c_4$, zur kleinen Axe die Länge des ersten Bildes $b_1 c_1$ (in der Geraden $P_1 o_1$), sonach kann man aus beiden Axen die Ellipse construieren.

Sucht man zu den ersten Bildern dieser Durchmesser ihre zugeordneten zweiten Bilder, so ergeben sich abermals zwei conjugierte Durchmesser und man vermag sofort die Ellipse (zweites Bild des Umrisses für P) zu zeichnen.

1349. Man soll den Umriss einer Kugel für eine gegebene Richtung l construieren.

Nimmt man in Fig. 160 an, $P_1 o_1$, $P_2 o_2$ sei die gegebene Richtung $l_1 l_2$, so darf man nur voraussetzen, P'_1 und P'_2 liegen in diesen Geraden im Unendlichen, und für den Punkt P' die Umrisslinie so construieren, wie sie für P construiert wurde. In diesem Falle wird $m_1 n_1$ durch o_1 gehen. Die Ebene des Umrisses geht durch o.

1350. Man soll durch einen Punkt d der Kugel, dessen Bild d_2 gegeben ist, eine Tangentenebene legen.

Man zeichnet einen zur Bildebene I oder II parallelen durch d gehenden Kugelkreis (dessen zweites Bild geht durch d_2 und ist entweder eine Gerade parallel zu ${}_1X_2$ oder ein Kreis mit dem Centrum in o_2; das erste Bild ist dann in dem einen Falle ein Kreis mit dem Centrum o_1, im anderen Falle eine Gerade parallel zu ${}_1X_2$, oder eigentlich zwei solche von o_1 gleichweit entfernte Sehnen); im ersten Bilde desselben liegt d_1. (Es sind zwei Auflösungen möglich.)

a) Zieht man in e_2 (Fig. 160) eine Tangente, so sind $d_2 f_2$ und $d_1 o_1$ zugeordnete Bilder einer durch d gehenden Tangente; zieht man noch durch d eine Tangente an den durch d gehenden horizontalen Kreis ($d_1 g_1$ ist deren erstes Bild, während ihr zweites Bild in die Gerade durch $d_2 e_2$ fällt), so bestimmen beide Tangenten die Berührungsebene für d vollständig.

b) Man kann, anstatt diese zwei Tangenten zu construieren, auch die Projectionen des durch d gehenden Kugelhalbmessers zeichnen; die durch d auf od senkrecht geführte Ebene berührt die Kugel gleichfalls in d (712).

1351. Man soll mittels Kugelflächen die Projections-Contouren von Rotationsflächen bestimmen.

In Fig. 161 ist die Rotationsaxe $z_2 z_3$ zur Bildebene III parallel, demnach ist die Contour des dritten Bildes mit einem Meridiane congruent. Zieht man in a_3 an die Bildcontour eine Normale, so ist der Schnitt a'_3 der letzteren mit der z_3 das dritte Bild jenes Punktes a', in welchem das Centrum jener Kugel liegt, welche die Rotationsfläche in dem durch a gehenden Parallelkreise berührt; a'_2 liegt in z_2.

Legt man durch den Kugelmittelpunkt a' eine Ebene zur Bildebene II parallel, so schneidet sie die Kugel in ihrer zweiten Contour, mithin muss der Schnittpunkt dieses Contourkreises mit dem Parallelkreise a der Rotationsfläche ein Punkt der zweiten

Contour der letzteren Fläche sein. Zieht man sonach durch a'_2 eine Parallele zu ${}_2X_3$, so ergibt sich A_2 als drittes Bild eines Punktes der zweiten Contour. Durchschneidet man mit dem Radius $a'_3 a_3$ aus a'_2 die durch A_2 gehende Ordinale, so ergeben sich zwei Contourpunkte $A_2 A'_2$ des zweiten Bildes der Rotationsfläche. Errichtet man in A_2 eine Senkrechte auf $a'_2 A_2$, und in A'_2 eine Senkrechte auf $a'_2 A'_2$, so ist dieselbe eine Tangente an das erwähnte Contourbild. (In Fig. 161 liegt zufällig die Normale $a_3 a'_3$ in einer Ordinale.)

Construiert man für eine genügende Anzahl von Parallelkreisen die in der zweiten Contour liegenden Punkte, so ergibt sich hieraus das Bild der zweiten Contour der Rotationsfläche.

1352. Wie entstehen Contour-Uebergangspunkte?

Wenn man bei einer gekrümmten Fläche F durch einen ausserhalb der Fläche auf der convexen Seite liegenden Punkt P eine Gerade so weiter gleiten lässt, dass sie F stets berührt, so kann bei einer besonderen Form der Fläche der Fall eintreten, dass einige dieser Stralen die Fläche schneiden und dass die Schnittcurve mit der Umrisslinie irgendwo zusammentrifft. Diese Punkte der Contour, in welchen sie der ihr für den Punkt P entsprechenden Decklinie begegnen, sollen Contour-Uebergangspunkte genannt werden. Der Lernende wähle sich einen Körper ungefähr von der Gestalt der in Fig. 161 abgebildeten Rotationsfläche, oder versinnliche sich denselben und vollführe im Geiste die eben erwähnte Operation, so wird er zu der Ueberzeugung gelangen, dass in jedem Contour-Uebergangspunkte eine Aenderung in der Contour eintritt. Entweder geht der berührende Stral, welcher bis zu dem Uebergangspunkte die Fläche der einen Seite (z. B. auf der äusseren) berührte, im Uebergangspunkte in einen Stral über, welcher von nun an die Fläche auf der anderen Seite (also der inneren) berührt, oder es hört überhaupt im Uebergangspunkte die Contour der Fläche auf.

1353. Aus der Entstehung der Contour-Uebergangspunkte erkennt man, dass die Umrisslinie in jenen Punkten von den durch P gehenden Stralen selbst berührt wird, weil die Berührungscurve in den Contour-Uebergangspunkten stetig in die ihr für den Punkt P entsprechende Decklinie übergeht.

1354. In Fig. 161 gibt es in der zweiten Contour zwei solche Uebergangspunkte $B_3 B_2$, $B_2 B'_2$, in welchen der auf die Bildebene II die Contour projicierende Stral von der einen auf

die andere Seite tritt. Es ist desshalb die Linie $B_2 C_2 B'_2$ das Bild der inneren Contour der Rotationsfläche, während die äussere Contour sich in jenen Punkten als unsichtbare Contour anschliesst (1086), um, bis sie das Bild des äussersten Randes der Fläche verlässt, wieder sichtbar zu werden.

Alle Punkte der Linie $A_3 B_3 C_3$ wurden wie A_3 mittels berührender Kugeln bestimmt. Den Uebergangspunkt B_3 hätte man mittels der zu BC gesuchten Zweier-Decklinie ermitteln können, allein es ist bequemer, durch eine Ordinaltangente an die Curve $A_3 C_3$ den Uebergangspunkt B_3 zu finden (1353).

In Fig. 152 ist A_2 ebenfalls das Bild eines Contour-Uebergangspunktes und zwar hört in A ein Teil der zweiten Contour auf.

1355. Man soll durch eine gegebene Gerade $p_1 p_2$ zwei Ebenen w und w' berührend an eine Kugel legen.

Führt man eine Bildebene senkrecht auf p ein, so müssen die Bilder der beiden Ebenen w und w' als Nullseiten erscheinen, welche durch das Punktbild der Geraden p gehend, das Contourbild der Kugel berühren. Sind aber die Nullseiten der Ebenen w und w' gefunden, so sind durch die Geraden p und $\overset{\circ}{\bar{w}}$, sowie p und $\overset{\circ}{\bar{w}}'$ die Ebenen w und w' bestimmt.

Bei der praktischen Ausführung wird man p_1 als ${}_1X_3$ annehmen, p_3 und das dritte Bild der Kugel suchen; ferner ${}_3X_4$ senkrecht auf p_3 legen, aldann den Punkt p_4 ermitteln und durch p_4 an das vierte Bild der Kugel-Tangente $\overset{\circ}{\bar{w}}_4 \overset{\circ}{\bar{w}}'_4$ ziehen. Sieht der Lernende die Constructionen der Fig. 105 durch, so erkennt er ohneweiters auch die Constructionen der vorstehenden Aufgabe.

Eine Vereinfachung lässt sich erzielen, wenn man durch den Kugelmittelpunkt o vorher zwei den Bildebenen I und II beigeordnete Bildebenen legt.

1356. Wie findet man die Spitze $P_1 P_2$ einer Kreiskegelfläche, welche einer gegebenen Kugelfläche umschrieben wird, und deren Axe eine gegebene Richtung erhalten soll?

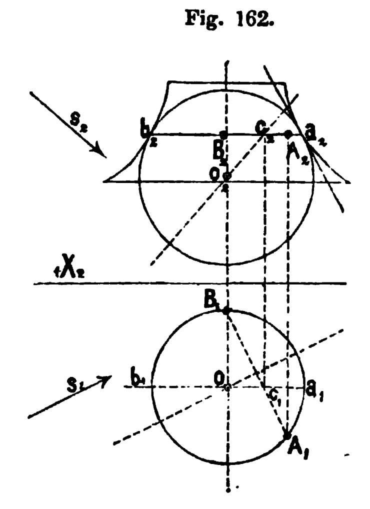
Man ziehe (Fig. 160) durch $o_1 o_2$ die Bilder $p_1 p_2$ der gegebenen Richtung, ordne durch o_2 (oder durch o_1) eine Bildebene III der Bildebene I (im anderen Falle der Bildebene II) bei, lege durch p_1 (im zweiten Falle durch p_2) eine Ebene IV, suche auf bekannte Art p_4 und ziehe an die Contour des Kugelbildes eine Tangente, welche mit p_4 den gegebenen Winkel ein-

schliesst, so ist im Durchschnitte mit p_4 der Punkt P_4 gefunden, aus welchem sich P_1 und P_2 ergeben.

1357. **Man soll mittels einer Kugelfläche eine Ebene w so legen, dass sie mit einer Ebene u den Winkel α mit einer Ebene v den Winkel β einschliesse.**

Errichtet man durch den angenommenen Kugelmittelpunkt o eine senkrechte Gerade p auf die Ebene u und eine Senkrechte q auf v, so sollen diese die Axe zweier Kegelflächen sein, welche die Kugel umhüllen, und deren Flächenstralen mit den Axen beziehungsweise die Winkel $90^0 - \alpha$ und $90^0 - \beta$ einschliessen (1356). Kann man durch die Verbindungsgerade der Scheitelpunkte der beiden Kegelflächen eine tangierende Ebene an die Kugel legen (1355), so berühren diese die beiden Kegelflächen und schliessen daher mit den Ebenen u und v die Winkel α und β ein.

Fig. 162.



Der Lernende führe diese Aufgabe auch für den Fall durch, dass u die Ebene I und v die Ebene II sei. Sehr einfach wird die Lösung, wenn der Kugelmittelpunkt in der Bildaxe angenommen wird, weil die Scheitelpunkte der beiden Kegelflächen schon in den Spuren der gesuchten Ebenen liegen, und weil diese Spuren die betreffenden in den Bildebenen liegenden Basislinien der beiden Kegelflächen tangieren. Im Allgemeinen erhält man vier Auflösungen.

1358. **Wie findet man auf einem gegebenen Kugelkreise k jenen Punkt, in welchem die durch ihn gelegte Tangentenebene durch einen gegebenen Punkt P geht?**

Man sucht die Ebene des Umrisses für den Punkt P (wie Fig. 160 zeigt), ermittelt die Durchschnittsgerade dieser Ebene mit der Ebene des Kreises k (indem man zwei conjugierte Durchmesser des Berührungskreises mit der Kreisebene k zum Durchschnitt bringt), alsdann sind jene Punkte, in welchen diese Gerade den Kreis k trifft, die gesuchten, weil sie in der Umrisslinie des Punktes P sich befinden.

1359. **Wie kann man mittels einer Kugel in einem gegebenen Parallelkreise einer Rotationsfläche jene Punkte finden, in welchen die Berührungsebene zu einer gegebenen Richtung s parallel läuft?**

Man construiere eine Kugel, welche die Rotationsfläche längs des gegebenen Parallelkreises berührt, führe durch ihren Mittelpunkt eine Ebene senkrecht auf die gegebene Richtung s und suche die Schnittpunkte dieser Ebene mit dem Parallelkreise, so entsprechen dieselben der Aufgabe. (Der Lernende suche dies zu begründen.)

In Fig. 162 steht die Rotationsaxe auf der Bildebene I senkrecht; $a_2\,b_2$ sei das Bild des gegebenen Parallelkreises; die Normale in a_2 oder b_2 an den Meridian gibt in o_2 das Bild des Kugelcentrums, durch o_2 eine Senkrechte $o_2\,c_2$ auf s_2 (712) und durch o_1 eine Parallele zur Bildaxe, geben die zugeordneten Bilder einer Zweier-Spurparallelen jener Ebene, welche durch $o_2\,o_1$ senkrecht auf $s_2\,s_1$ zu führen ist; $c_2\,c_1$ ist der Schnitt der Spurparallelen mit der Parallelkreisebene, folglich ist der Schnitt beider Ebenen eine Gerade, welche im ersten Bilde durch c_1 senkrecht auf s_1 zu ziehen ist. Die Punkte $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$, welche von dieser Geraden auf dem Parallelkreis erzeugt werden, entsprechen der Aufgabe.

1360. **Eine jede Kugel kann auf unendlich viele Arten als perspectivische Fläche mit gerader Scheitellinie erzeugt werden.**

Nehmen wir eine beliebige Gerade p zur Formaxe (einerlei ob p die Kugel schneidet oder nicht), so sind alle jene Kugelkreise Formlinien, welche in einer durch die Gerade p gehenden Ebene liegen (1293).

Um die Existenz einer **geraden Scheitellinie** (1296) nachzuweisen, denke man sich durch das Kugelcentrum O eine Bildebene senkrecht zur Geraden p gelegt (welch' letztere beispielsweise den Schnittpunkt P, Fig. 35, liefert). Werden durch p **zwei beliebige Ebenen** gedacht, welche in der Bildebene die Nullseiten zeigen, so ist nach (1344) klar, dass in der Polare MN des Punktes P das Centrum der perspectivischen Lage der beiden Kreise sich befindet. Man erkennt nun ohneweiters den Satz:

Wird eine beliebige Gerade p als Formaxe zur Entstehung einer Kugel als perspectivische Fläche mit gerader Scheitellinie benützt; legt man ferner

durch das Kugelcentrum O eine Ebene u senkrecht auf die Formaxe p, und sucht zu dem Durchschnittspunkte von p mit u die Polare bezüglich des grössten Kreises, in welchem u die Kugel schneidet — so ist diese die gerade Scheitellinie der perspectivischen Fläche.

Weil je zwei Kugelkreise perspectivisch liegen, so liegt jede Form- mit jeder Seitenlinie perspectivisch, mithin gehört die Kugel den in (1320) erwähnten Flächen der II. Ordnung an.

1361. Wählt man eine beliebige Ebene β als Begegnungsebene, ausser ihr einen beliebigen Punkt S als Projections-Centrum, und nimmt zu β irgend eine parallele Ebene W als Verschwindungsebene (987) eines räumlichen Systemes E an, so kann man nach (993) zu jedem im Systeme E angenommenen Gebilde seine räumliche Collinear-Projection construieren. Aus der Kugel entstehen auf diese Art die in (1321) erwähnten Curvenflächen II. Ordnung und aus dem Rotations-Hyperboloide (1329) die Regelflächen.

a) Besitzt die Verschwindungsebene W mit der Kugelfläche keinen gemeinsamen Punkt, so werden die räumlichen Collinear-Gebilde Ellipsoide;

b) berührt W die Kugel, so entstehen elliptische Paraboloide und

c) schneidet W die Kugel, so entstehen elliptische Hyperboloide;

d) schneidet W das Rotations-Hyperboloid in einer Ellipse, so wird die Collinear-Projection ein allgemeines windschiefes Hyperboloid; wenn aber

e) die Ebene W das Rotations-Hyperboloid in einer offenen Linie schneidet, ein windschiefes Paraboloid entstehen.

Wenn der Lernende eine Form- und Seitenaxe einer Kugel darstellt (1360) und sodann die räumliche Collinear-Projection der Kugel sucht, so wird er unter Berücksichtigung von (1343 und 1360) finden, dass die neuen Flächen dem in (1320) aufgestellten Begriffe entsprechen.

Fünfter Abschnitt.

Construction der gegenseitigen Durchschnitte gegebener Flächengebilde.

Allgemeine Grundsätze über die Construction der gegenseitigen Durchdringung von Stralenflächen. Beispiele über Pyramiden und Prismen. Durchbrechungen. Flächen-Combinationen.

§. 66.

Bei der Construction der Durchdringungslinie zweier Flächen F und F' wird die in (1010) oder allgemein die in (1013) angegebene Methode angewendet. Es handelt sich demnach jetzt nur darum, an verschiedenen Beispielen diese Methode zu erläutern.

1362. Wie construiert man die Durchdringung zweier Stralenflächen?

Sobald zwei Stralenflächen F und F', deren Scheitelpunkte S, S' und Basisebenen u und u' sein sollen, in zwei zugeordneten Projectionen abgebildet sind, und durch Versinnlichung der beiden Flächen eine klare Vorstellung von ihrer gegenseitigen Lage erreicht worden ist, lege man sich die Fragen vor:

a) Ist eine der beiden Stralenflächen geeignet, dass man möglichst leicht den Schnitt eines jeden Strales derselben mit der anderen Stralenfläche abbilden kann?

(Dieser Fall ist vorhanden: 1) Wenn eine Stralenfläche ein Prisma oder ein Cylinder ist, deren Stralen auf der Basisebene senkrecht stehen, also ihre Nullseiten zeigen, und wenn von der anderen Stralenfläche die orthogonale Projection auf jener Basisebene gegeben, oder einfach gefunden werden kann. 2) Wenn sich zu den Stralen der einen Fläche auf der anderen Stralenfläche die Decklinien (§. 34) ohne Mühe finden lassen.)

b) Kann man durch die Scheitellinie (die Verbindungsgerade der beiden Scheitelpunkte *S* und *S'*) Ebenen legen und ihre Schnitte mit den Basisebenen der beiden Stralenflächen leicht bestimmen?

(Diese Möglichkeit tritt ein: 1. Wenn die Projectionen der Durchschnittsgeraden der beiden Basisebenen *u* und *u'*, sowie auch die Projectionen der Durchschnitte der Scheitellinie *SS'* mit den beiden Basisebenen, nicht ausser der Zeichnungsfläche liegen. 2. Wenn der Fall 1) mit dem Unterschiede eintritt, dass die Scheitellinie zu einer Basisebene parallel läuft. 3. Wenn beide Basislinien in derselben Ebene liegen und die Bilder von dem Schnitte der Scheitellinie mit der Basisebene noch innerhalb der Zeichnungsebene fallen. 4. Wenn im Falle 3) die Scheitellinie zur Basisebene parallel läuft. 5. Wenn beide Flächen Parallel-Stralenflächen sind und jede Ebene, welche zu den Stralen beider Flächen parallel läuft, mit den Basisebenen *u* und *u'* leicht zum Schnitt gebracht werden kann.)

c) Kann man schneidende Ebenen (1052) legen, welche auf jeder der beiden Stralenflächen einfach construierbare Schnitte erzeugen?

(Derartige Umstände können eintreten: 1. Wenn beide Basisebenen *u* und *u'* zu einer und derselben Bildebene parallel sind, und die zu jener Bildebene parallelen Ebenen die beiden Stralenflächen in bequem construierbaren Linien, z. B. in Kreisen, schneiden. 2. Wenn eine Basisebene zur Bildebene parallel läuft, die zur Basisebene parallelen Schnitte leicht construierbar sind, und wenn diese Ebenen die zweite Fläche in geraden Linien schneiden.)

d) Oder ist keiner dieser drei Fälle vorhanden?

(Dann können folgende Umstände eintreten: 1. Es lässt sich die Scheitellinie ziehen und man kann von jedem Strale der einen Fläche zwei Punkte desselben parallel mit der Scheitellinie auf die Basisebene der anderen Stralenfläche projicieren. (Durchschneidet die Scheitellinie die Basisebene, so ist von jedem Flächenstrale nur ein Punkt auf die erwähnte Art zu projicieren.) Die derart den angenommenen Stral projicierende Ebene schneidet beide Flächen in Flächenstralen. 2. Es lassen sich zwei angenommene Punkte eines Flächenstrales aus dem Scheitel der zweiten Stralenfläche auf die Basisebene dieser zweiten Stralenfläche projicieren. Die so projicierende Ebene schneidet gleichfalls beide Flächen in Flächenstralen. 3. Es sind

abgestutzte Central-Stralenflächen gegeben und die Bilder der Scheitelpunkte nicht vorhanden. In einem solchen Falle sucht man zu den Flächenstralen Decklinien, auch wenn sie Curven werden sollten.)

Erkennt man aus der auf einen vorliegenden Fall passenden Beantwortung der gestellten vier Fragen, dass die in einer derselben angeregte Construction zum Ziele führt, so wird man dieselbe zur Anwendung bringen. Lassen sich mehrere Methoden anwenden, so wird man die einfachste wählen.

Es wird für den Lernenden eine sehr nützliche Uebung sein, mittels Versinnlichung Stralenflächen so anzunehmen, auf dass die in dieser Nummer angeführten Fälle eintreten.

1363. Von der Verbindung der den beiden Stralenflächen F und F' gemeinsamen Punkte zur Durchdringungslinie der Flächen.

Die Construction von gemeinsamen Punkten nach (1362, *a*, *b* oder *c*), kann dem Lernenden, welcher bisher gründlich die vorgetragenen Lehren studierte, keine Schwierigkeiten mehr bieten; diese können höchstens in complicierten Fällen bei der Verbindung der gemeinsamen Punkte zur Durchdringungslinie sich ergeben. Um solche Schwierigkeiten zu beheben, ist ein geordneter Vorgang bei dem Auffinden der erwähnten Punkte zu beachten, darin bestehend, die zur Durchdringung zu bringenden Linien der Fläche in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge zu benützen, und die gefundenen Punkte stets mit den unmittelbar vorhergehenden (wenn auch bei gekrümmten Flächen bisweilen nur provisorisch) durch eine Linie zu verbinden.

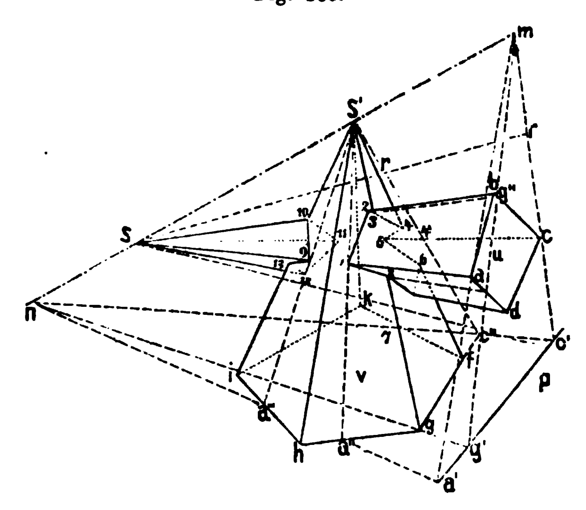
Am Schlusse der Arbeit lässt sich bei krummen Stralenflächen die provisorische Verbindungslinie erst genau durch die richtige Verbindungslinie ersetzen, weil aus der Gesammtheit der Punkte sich die Krümmungen der Linie sicherer erkennen lassen. Unterlässt man die allsogleiche Verbindung, so ist die Arbeit erschwert.

1364. Bei der Construction der Durchdringung von zwei ungekrümmten Stralenflächen, wolle der Anfänger sich auf einem Nebenblatte eine Tabelle entwerfen, deren Kopf folgendermassen eingerichtet ist:

Punkt Nummer	Kante		Ebene		Schnitt geht weiter in den Ebenen	
	F	F'	F	F'	F	F'
1	aS	—	—	ghS'	abS	ghS'
2	bS	—	—	ghS'	bcS	ghS'
3	—	gS'	bcS	—	bcS	fgS'
4	—	fS'	bcS	—	bcS	fkS'

a) In die erste Rubrik werden die gefundenen Durchschnittspunkte nur in der Reihenfolge, in welcher sie in der Durchdringungslinie aufeinanderfolgen, eingetragen. Finden sich daher bei einer Kante mehrere Durchschnittspunkte mit der anderen Stralenfläche, so wird nur der in der Reihenfolge liegende eingetragen; die übrigen aber aufgehoben, bis an sie die Reihe kommt.

Fig. 163.



b) Die zweite Rubrik ist in ihren Unterabteilungen mit den Namen der Stralenflächen F und F' überschrieben, um die Kante entsprechend eintragen zu können, auf welcher der nummerierte Durchschnittspunkt liegt.

c) Die dritte Rubrik enthält ebenfalls zwei mit F und F' überschriebene Unterabteilungen. Es ist nun zu bemerken, dass hier die Ebene jener Stralenfläche eingetragen wird, welcher die

eingetragene Kante nicht angehört, in welcher Ebene aber der Punkt liegt.

d) Von dem gefundenen Schnittpunkte aus, muss sich die Schnittgerade in zwei Ebenen, welche in die vierte Rubrik eingetragen werden, fortsetzen, bis sie in ihrem Laufe durch die Begrenzung der einen oder der anderen Ebene aufgehalten wird. Die eine Ebene ist nothwendigerweise jene, welche schon in der Rubrik: „Ebene" eingetragen wurde; die zweite Ebene muss sich an die eingetragene Kante unmittelbar anschliessen.

1365. Durchdringung zweier Pyramiden. Nehmen wir an, es seien zwei Pyramiden unter gegebenen Bedingungen in orthogonalen Projectionen abgebildet worden, und es habe sich der Fall (1362, *b*, 1) ergeben.

Nehmen wir ferner an, in Fig. 163 sei nur eine Projection gezeichnet, die andere wegen Raumersparnis weggelassen worden und es seien p das Bild der Durchnittsgeraden der beiden Basisebenen, SS' die Projectionen der Scheitelpunkte, sowie m und n die Abbildungen der Schnitte der (im Raume liegenden) Scheitellinie SS' mit den Basisebenen, so ist der Vorgang folgender:

a) Durch mn und einen Stral aS der Stralenfläche F wird eine Hilfsebene F'' gelegt; ma ist ihr Schnitt mit der Basisebene u; a' ihr Schnitt mit p, folglich $a'n$ ihr Schnitt mit der Basisebene v. $a'n$ schneidet die Basislinie v in den Punkten $a''a'''$, folglich sind $a''S'$, $a'''S'$ die Bilder der Hilfsebenenschnitte mit der Stralenfläche F', mithin sind nach (1013) die Schnittpunkte von aS mit $a''S'$ und $a'''S'$ die Bilder jener Punkte der Flächenkante Sa, welche auf der Stralenfläche F' liegen. Nach (1364, *a*) wird vorderhand nur der eine Schnittpunkt benützt, mit 1 bezeichnet und nach (1364, *b*, *c*) in die Tabelle eingetragen. Die Ebenen, in welchen der Schnitt weiter geht, sind ghS' und nach (1364, *d*) eine an aS sich anschliessende Ebene. Da uns die Wahl freisteht, jede der beiden in aS zusammentreffenden Ebenen zu benützen, so müssen wir uns für eine derselben, z. B. für abS, entscheiden, sonach wird abS in die Tabelle eingetragen.

b) Nun sehe man in die letzte Rubrik der Tabelle und sage: entweder wird eine Seite der Ebene abS mit der Ebene ghS' oder eine Seite der Ebene ghS' mit der Ebene abS zum Durchschnitt gebracht. Wählen wir bS, so ist der Schnitt von bS mit ghS' zu suchen. Es wird daher durch mn und den Stral bS (genau

so wie vorhin durch mn und aS) eine Hilfsebene F'' (wenn keine Irrung zu befürchten ist, so kann man alle Hilfsebenen mit demselben Buchstaben F'' bezeichnen) gelegt und ihr Schnittpunkt 2 mit der Ebene ghS' gesucht. (Der zweite Schnittpunkt der Seite bS wird einstweilen aufgehoben; nur bei grösserer Uebung kann man gleichzeitig auch die Schnittlinien construieren, welche sich durch die zweiten Punkte ergeben.) Punkt 2 wird mit Punkt 1 durch eine Gerade verbunden.

c) Wenn zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte durch eine Gerade verbunden werden, so berücksichtige man, ob die beiden Ebenen, in welchen die Schnittgerade liegt, dem projicierenden Auge sichtbar sind. Ist es der Fall, so wird die Schnittgerade voll gezogen; ist aber mindestens eine der beiden Ebenen dem projicierenden Auge unsichtbar, so ist die Schnittgerade zu punktiren.

d) Der gefundene Punkt 2 wird in die Tabelle eingetragen. Der Schnitt geht weiter in der Ebene ghS' und in der an bS sich anschliessenden Ebene bcS, welche ebenfalls in die Tabelle eingetragen wird. Nun kann man entweder eine Seite der Ebene bcS mit der Ebene ghS', oder eine Seite der Ebene ghS' mit bcS zum Durchschnitt bringen. Wählen wir gS', so ist durch mn und gS' eine Hilfsebene F'' zu legen und bcS zu schneiden. Man verbindet daher n mit g, sucht den Schnitt g' von ng mit p und zieht $g'm$, so wird $g'm$ die Gerade bc in einem Punkte g'' schneiden und $g''S$ wird gS' in dem gesuchten Punkte 3 treffen. 2 wird mit 3 durch eine punktierte Linie (1364, *c*) verbunden. Sodann wird 3 in die Tabelle eingetragen und gefunden, dass der Schnitt in der Ebene bcS und in der an die Kante gS' sich anschliessenden Ebene fgS' weiter geht.

e) Hilfspunkte. Sucht man jetzt den Schnitt der Seite cS mit der Ebene fgS' (siehe Tabelle), so hat man die Geraden mcc' und $c'n$ zu ziehen. Letztere schneidet aber fg erst in der Verlängerung in c'', folglich liegt der Schnittpunkt der Kante cS mit der Ebene fgS' ausser den Grenzen dieser Ebene. Nichtsdestoweniger benützt man diesen Punkt für die Durchdringung, nennt ihn einen Hilfspunkt und bezeichnet ihn statt mit 4 durch 4'. Wird der Hilfspunkt 4' mit 3 verbunden, so ist die Gerade 34' nur soweit zu ziehen, bis die Grenze der Ebene fgS' erreicht wird; dieser Punkt ist erst mit 4 zu bezeichnen und in die Tabelle einzutragen.

Auf diese Art wird die Durchdringung fortgesetzt, bis in der Reihenfolge der Punkt 1 wieder erscheint und die Durchdringungslinie somit geschlossen ist.

1366. Wann ist eine Durchdringung zweier Stralenflächen eine vollständige?

Wenn von einer Stralenfläche alle Flächenstralen die andere Stralenfläche durchdringen, wie dies in Fig. 163 geschieht. In einem solchen Falle sind zwei getrennte Linien (der Ein- und der Austritt) vorhanden. Ist die Durchdringung unvollständig, so bildet die Austrittslinie mit der Eintrittslinie einen zusammenhängenden Linienzug (Fig. 164).

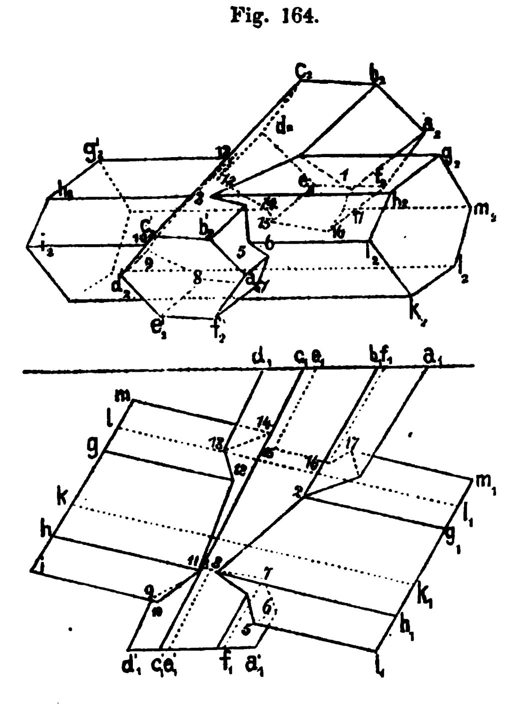
1367. Um sich selbst Beispiele für die Durchdringung zweier Stralenflächen zu wählen, entscheide sich der Lernende zuerst darüber, von welcher Art (1051) diese Stralenflächen sein sollen. Ist dies geschehen, so frage er sich, welche Lage soll die erste und welche Lage die zweite Stralenfläche gegen die Bildebene einnehmen. Diese Frage wird sich der Lernende am leichtesten beantworten, wenn er etwa mit den Fingerspitzen den Stralen der einen Fläche nachfahrend, sich dieselbe versinnlicht und dann beurteilt, welche Lage wol die zweite Stralenfläche wird annehmen können, auf dass sie die erste durchdringt.

Hat man sich über die Lage der beiden Stralenflächen entschieden, so beurteilt man weiter, welche Lagen die Basisebenen und die Scheitel der Stralenflächen einnehmen müssen, und nimmt diesem Urteile entsprechend die Spuren der Basisebenen und die Projectionen der Scheitelpunkte an. Bisweilen wird man bequemer statt der beiden Spuren nur eine Spur und eine zu ihr parallele Spurparallele, oder überhaupt zwei zueinander parallele Gerade der Ebene wählen.

Ist keine Nothwendigkeit vorhanden, dass die Basislinie u der ersten Stralenfläche F, in der ebenfalls mit u zu bezeichnenden Basisebene eine bestimmte Lage einnehme und eine gegebene Gestalt besitze, so wird man die eine Projection der Basislinie der Vorstellung entsprechend annehmen und die zugeordnete Projection construieren. Auf diese Art gelangt man zu den Bildern der zur Durchdringung zu bringenden Stralenflächen, auf welche man nun (1362) zur Anwendung bringt.

Denken wir uns ein horizontales sechsseitiges Prisma F von rechts gegen links der Bildebene II sich nähernd, die Basisebenen senkrecht zur Bildebene I, so kann dieses Prisma etwa

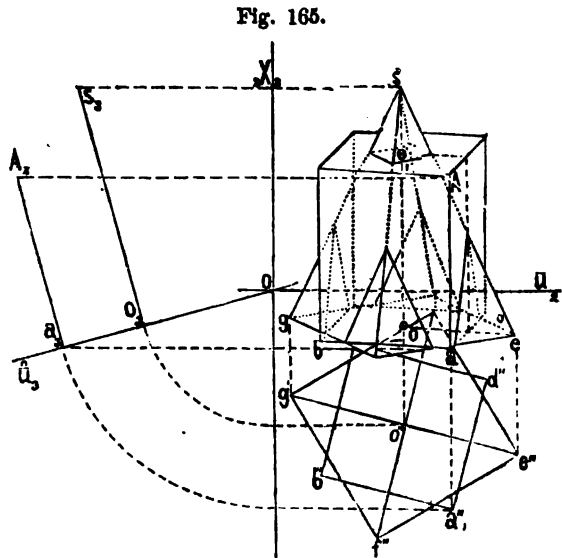
Fig. 164.



so dargestellt werden, wie es die Fig. 164 zeigt. Das Prisma soll von einer abgestutzten sechsseitigen Pyramide durchdrungen werden, deren Basisebene die Bildebene II sein soll.

Um die zweite zur Basisebene parallele kleinere Basislinie zu zeichnen, bedenke man, dass in jeder Bildebene die beiden Basislinien sich perspectivisch ähnlich projicieren. Man mache demnach die Strecke $a'_2 b'_2$ parallel mit $a_2 b_2$ und ziehe, weil das Centrum der perspec-

Fig. 165.



tivischen Lage unbenützbar liegt, durch a'_2 eine Parallele zu $a_2 c_2$ und durch b'_2 eine Parallele zu $b_2 c_2$, so gibt ihr Schnitt den

Punkt c'_2, die Ordinale den Punkt c'_1. Auf gleiche Art findet man $d'_2 d'_1$, $e'_2 e'_1$ und $f'_2 f'_1$.

Die Durchdringung kann mit irgend einer Kante begonnen werden. Am vorteilhaftesten wird es sein, alle Schnittpunkte der Kanten mittels Deckgeraden zu construieren (1362, *a*, 2). Das Beispiel in Fig. 164 zeigt eine unvollkommene Durchdringung, weil die Austrittslinie mit der Eintrittslinie einen zusammenhängenden einzigen Linienzug bildet.

Wenn der Lernende die Methoden versteht, die Projectionen des Durchschnittes einer Geraden mit einer Ebene aufzufinden, und die Tabelle zum Eintragen der Schnittpunkte anzuwenden, so wird es ihm nicht schwer fallen, die Durchdringung zu construieren.

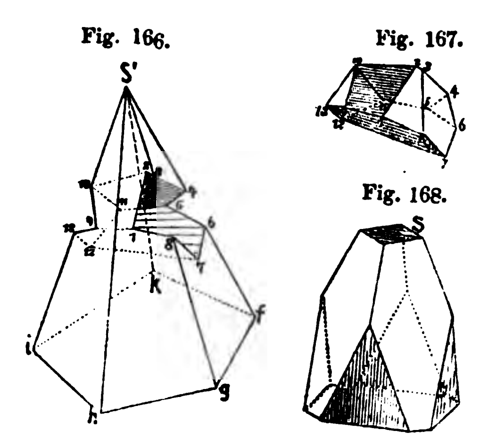
Es sei hier bemerkt, dass der Lernende nicht die Figur aus dem Buche auf das Zeichnenblatt übertrage, sondern dass er die Figuren in grösserem Massstabe sich selbst annehme, wodurch selbstverständlich auch die Durchdringungsfigur anders ausfallen wird.

1368. In Fig. 165 soll ein senkrechtes Prisma von quadratischer Basis mit einer senkrechten Pyramide, ebenfalls von quadratischer Basis zum Schnitt gebracht werden. Beide Quadrate *abcd* und *efgh* liegen in einer Ebene *u*, deren Neigung gegen die Bildebene II durch $\mathring{\bar{u}}_3$ gegen ${}_2X_3$ gegeben ist.

Um die zweiten Bilder der Quadrate construieren zu können, zeichne man (§. 42) zuerst ihre Congruenz-Projectionen in der Bildebene II, wodurch die wahre Grösse und relative Lage der beiden Quadrate $a''b''c''d''$ und $e''f''g''h''$ ersichtlich wird. Es wurde angenommen, beide Quadrate haben einen gemeinsamen Mittelpunkt o'' und die Seiten des einen seien zu den Diagonalen des andern parallel.

Trägt man den senkrechten Abstand des Punktes a'' von $\bar{u}_2$ nach Oa_3 auf, so ist a_3 das dritte Bild von a und zieht man durch a_3 eine Ordinale, bis die durch a'' auf $\bar{u}_2$ senkrecht gezogene Gerade getroffen wird, so erhalten wir das zweite Bild a_2. Der Einfachheit wegen sollen alle Zeiger 2 weggelassen werden.

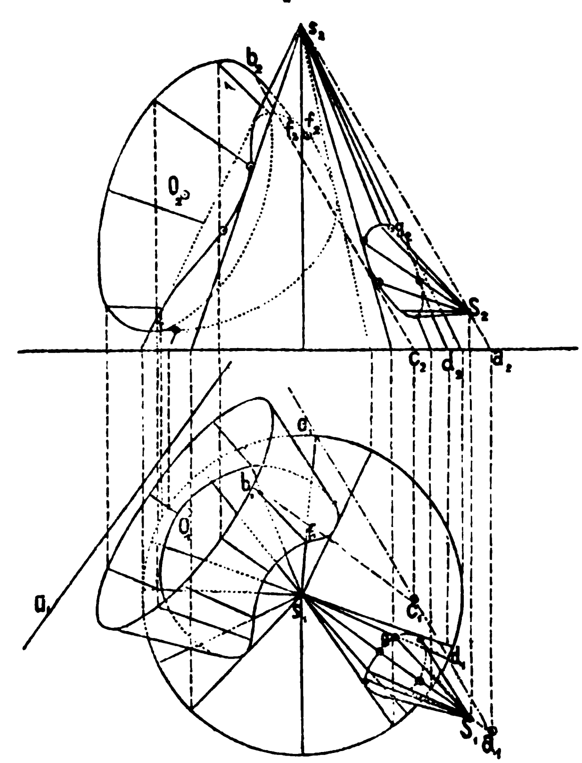
Betrachtet man $\bar{u}_2$ als Begegnungsgerade, $a''a$ als zwei verwandte Punkte von zwei perspectivisch-affinen Gebilden, so kann man sehr leicht das zweite Bild der beiden Quadrate construieren.


Fig. 166. Fig. 167. Fig. 168.

Sind die Höhen des Prismas und der Pyramide gegeben, so trägt man sie im dritten Bilde nach $a_3 A_3$ und $o_3 S_3$ auf und ermittelt aus ihnen A und s. Es lässt sich sodann das zweite Bild vom Prisma und von der Pyramide ohne Mühe herstellen.

Um die Durchdringung zu construieren, beachte man die Fragen in (1362) und findet, dass hier (1362, *b*, 3) vorliegt, denn die Scheitellinie schneidet die Basisebene in *o*. Legt

Fig. 169.



man durch *se* und die Scheitellinie *so* eine Ebene, so schneidet diese das Prisma in den zu den Kanten parallelen Geraden, wo-

durch sich die Schnitte von *se* mit dem Prisma ergeben. Die weitere Construction der Durchdringung ist selbstverständlich.

1369. Was für Gebilde lassen sich aus einer jeden Durchdringung ableiten?

a) Durchbrechungen.

b) Flächen-Combinationen.

ad a) Die Durchbrechungen entstehen, wenn man bei der Durchdringung von zwei körperlichen Räumen die Höhlung zeichnet, welche der eine Körper im anderen erzeugt. In Fig. 166 wurde die Durchbrechung der Pyramide S' aus Fig. 163 dargestellt.

ad b) Eine Flächen-Combination nennt man den als selbstständiges Gebilde dargestellten gemeinsamen Raum, welcher bei der Durchdringung von zwei oder mehr körperlichen Räumen entsteht. In Fig. 167 wurde die Flächen-Combination der in Fig. 163 zum Schnitt gebrachten Stralenflächen abgebildet und in Fig. 168 die der Durchdringung in Fig. 165 entsprechende Flächen-Combination dargestellt. Die eine der in Combination getretenen Flächen wurde schraffiert.

1370. Die Darstellungen von Flächen-Combinationen bieten ein reiches Feld für constructive Uebungen; denn hieher gehören die Formen der Kristalle, sowie die Formen einer Unzahl von industriellen und Kunst-Gegenständen. Der Lernende beachte nun deren Gestalten und versuche viele derselben, welche Interesse bieten, einer geometrischen Abbildung zu unterziehen.

Durchdringungen gekrümmter Stralenflächen. Aufgaben über die Durchdringung anderer Flächen.

§. 67.

1371. Die Durchdringungslinien gekrümmter Stralenflächen unterscheiden sich von jenen ungekrümmter Stralenflächen nicht in der Methode ihrer Construction, sondern darin, dass sie Curven sein müssen (ausgenommen, wenn die Durchdringung längs eines Flächenstrales erfolgt), während sie bei den letzterwähnten Flächen Polygone sind.

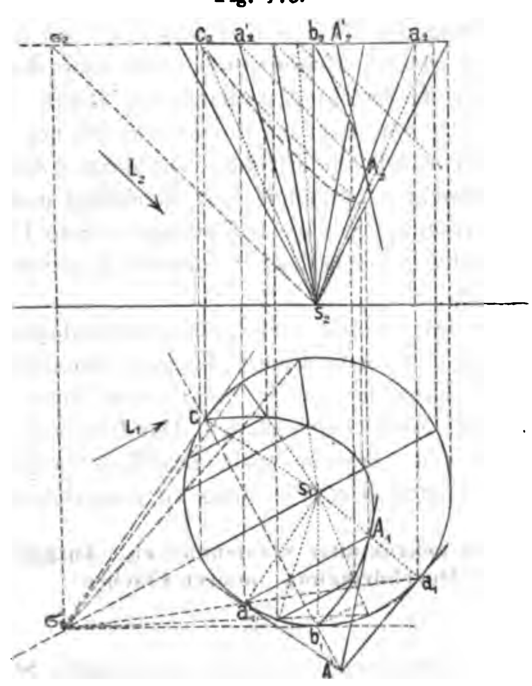
In einem gegebenen Falle wendet man wieder (1362) an, achtet aber sorgsam darauf, dass die Flächenstralen in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge und nicht in allzuweiten Entfernungen auf der einen Fläche angenommen und mit der anderen zum Schnitt gebracht werden.

1372. Punkte einer Durchdringung, welche eine besonders zu beachtende Lage erhalten, sollen besondere Punkte ge-

nannt werden. Zu den besonderen Punkten gehören namentlich jene, welche in den Contouren der Flächen sich befinden, bisweilen auch solche, welche einer Bildebene am nächsten oder fernsten liegen.

1373. Durchdringung zweier Kegelflächen. Denken wir uns in Fig. 169 links eine Ebene u mit der Oberseite als Rückseite (§. 31) zur Basis eines senkrechten Kreiskegels gewählt, dessen Scheitel $S_1 S_2$ unter u liegt. Nehmen wir, wenn keine weiteren

Fig. 170.



Bedingungen vorliegen, $\bar{u}_1$ und die Projectionen $O_1 O_2$ des Kreiscentrums O an, construieren, etwa unter Benützung einer zu $\bar{u}_1$ senkrechten Bildebene III (667), die Kreisbilder und die Bilder der zu u senkrechten Kegelaxe OS (705), welche entweder eine gegebene Länge besitzt oder beliebig lang angenommen werden kann (710), und ziehen die Contouren der Kegelbilder.

Hierauf construieren wir die Bilder eines zweiten senkrechten Kreiskegels, dessen Basis in der Grundrissebene I liegt, dessen Axe aber die Axe des ersten Kegels S schneidet.

Um die Durchdringungslinie beider Flächen zu ermitteln, beachte man (1362) und findet den Fall (d, 1). Es hätte sich

zwar auch für die Bildebene I der Fall (1362, *b*, 1) ergeben, der Belehrung wegen wurde jedoch (*d*, 1) genommen.

Es sei nun $S_1 b_1$, $S_2 b_2$ ein auf dem Kegel S angenommener Stral. Man projiciere ihn parallel mit der Scheitellinie Ss auf die Basisebene des Kegels s, d. i. auf die Bildebene I, so wird a_1 die Projection von S und c_1 die Projection von b, mithin ist $a_1 c_1$ der Schnitt der durch bS und Ss gelegten Hilfsebene mit der Basisebene I. Diese Spur schneidet die Basis von s in den Punkten d_1 und e_1, folglich sind sd_1 und se_1 jene Stralen des Kegels s, welche mit Sb in einer und derselben Hilfsebene liegen, daher f_1 und g_1 die ersten Bilder des Durchschnittes vom Strale Sb mit der Kegelfläche s.

Da das zweite Bild $S_2 b_2$ sehr nahe an die Contour des Kegels S fällt, so fallen auch die zweiten Bilder e_2 und f_2 sehr nahe an diese Contour.

Suchen wir nach diesem Verfahren in einer geordneten Reihenfolge noch genügend viele Punkte, namentlich aber die besonderen Punkte, welche in den Contouren liegen und verbinden wir sie während der Construction durch eine feine Linie, um eine Uebersicht in der Reihenfolge zu gewinnen, so können wir zuletzt eine endgiltige Verbindung der Schnittpunkte zum Bilde der Durchdringungslinie herstellen.

Das erste Bild der Durchdringungslinie in Fig. 169 besteht aus zwei geschlossenen Curven, deren jede, wie leicht einzusehen, bezüglich $S_1 O_1$ symmetrisch sein muss.

Die kleinere Curve liegt ganz auf der Vorderseite des Kegels s, mithin kann ihr zweites Bild die Contour des Kegels s nicht überschreiten.

Die Grössenverhältnisse der beiden Kegel sind überdies noch von der Art, dass die tangierende Ebene, welche durch die Scheitellinie Ss an den Kegel S geführt wird, den Kegel s durchschneidet. Die Schnittstralen sind nothwendigerweise T a n g e n t e n a n d i e S c h n i t t c u r v e n.

Würde die durch Ss gehende tangierende Ebene beide Kegel berühren, so würden auch die Schnittcurven gemeinsame Tangenten erhalten.

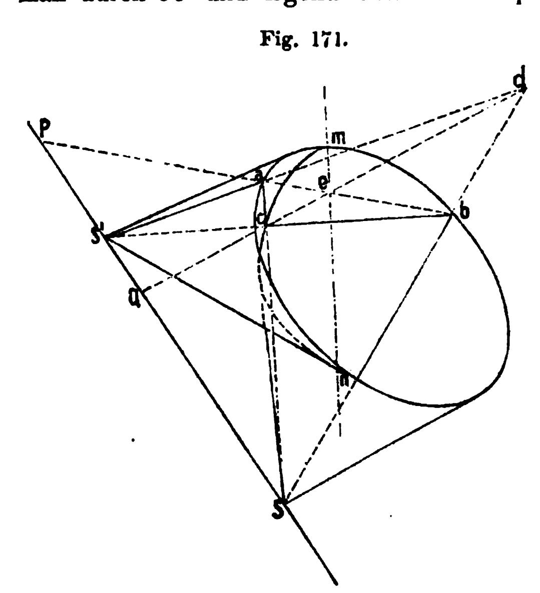
1374. Ein Beispiel einer D u r c h d r i n g u n g e i n e r K e g e l f l ä c h e m i t e i n e r C y l i n d e r f l ä c h e ist in Fig. 170 gegeben. Daselbst ist ein Kegel, mit seiner Höhlung nach oben gewendet, dargestellt. Die Basislinie (welche etwa als eine Kreislinie angenom-

men werden kann), soll gleichzeitig auch die Basislinie für den Cylinder sein, dessen Stralenrichtung durch den Pfeil $L_1 L_2$ gegeben ist.

Nach (1362) findet man den Fall (b, 3).

Um die Durchdringung zu finden, ziehe man die Scheitellinie beider Flächen, welche nun durch s parallel zu L geht, und suche ihren Schnitt $\sigma_2 \sigma_1$ mit der gemeinsamen Basisebene. Legt man durch $s\sigma$ und irgend einen Stral $s_1 a_1$, $s_2 a_2$ des Kegels s eine Hilfsebene, so muss das erste Bild $\sigma_1 a_1$ der Schnittgeraden dieser Hilfsebene mit der Basisebene sein. σa schneidet die Basislinie noch in einem Punkte a', durch welchen Punkt ein Cylinderstral geht, der mit dem Kegelstrale sa in einer Hilfsebene liegt; mithin muss der Schnittpunkt $A_1 A_2$ der Schnitt des Cylinderstrales $a' A$ mit der Kegelfläche sein. Durch eine Reihe derart bestimmter Schnittpunkte erhält man die Darstellung der Durchdringungslinie.

Fig. 171.



Wie aus der Construction hervorgeht, muss das erste Bild der Durchdringungslinie durch jene Punkte b_1 c_1 gehen, in welchen die von σ_1 an den Kreis gezogenen Tangenten den Kreis berühren.

1375. **Wie construiert man in irgend einem Punkte A einer Durchdringungslinie zweier gekrümmten Stralenflächen eine Tangente an die Durchschnittscurve?**

Die Tangente muss in den tangierenden Ebenen liegen, welche sich in diesem Punkte an beide Flächen legen lassen, also muss sie die Durchschnittsgerade beider tangierenden Ebenen sein.

Je nach der besonderen Lage der beiden Tangentenebenen, lässt sich ihre Durchschnittsgerade mehr oder weniger einfach bestimmen. In Fig. 170 wird man in a_1 und a'_1 Tangenten an den Kreis ziehen, welche die Schnitte der beiden Tangentenebenen des Punktes A mit der Kreisebene vorstellen, folglich geht durch den Punkt A' das erste Bild der Tangente in A.

1376. Wenn zwei Stralenflächen eine Linie II. Ordnung zur gemeinsamen Basis haben, so ist diese Basis schon eine Durchdringungslinie beider Flächen. Ausser dieser besitzen sie aber noch eine Durchdringungslinie, welche ebenfalls der II. Ordnung angehört.

Beweis:

a) Es seien in Fig. 171 SS' die Scheitelpunkte zweier Kegelflächen (eigentlich nur ihre Bilder), deren gemeinsame Basis $manb$ eine Linie II. Ordnung ist. Es sei vorausgesetzt, die Basisebene u schneide die Scheitellinie SS' im Punkte P. Durch PSS' lege man eine Ebene w, welche u in der Geraden Pab, folglich die Stralenflächen in Sa, Sb, $S'a$, $S'b$ schneidet. Die letzteren vier Geraden schneiden sich noch in zwei Punkten c und d, welche offenbar Punkte der zweiten Durchdringungslinie sind. Um zu beweisen, dass alle wie c und d bestimmten Punkte in einer Linie II. Ordnung liegen, bedenke man, dass jener Punkt e, in welchem cd die Gerade Pab schneidet, der Durchschnitt von cd mit der Basisebene u, und der Punkt Q der Durchschnitt von cd mit der Scheitellinie SS' ist. Nun ist aber in dem aus den vier Punkten $abcd$ gebildeten vollständigen Vierecke nach (308) $Paeb$ eine harmonische Punktreihe, folglich liegt e in der Polare des Punktes P (409); also durchschneiden alle Sehnen, welche so wie cd bestimmt werden, die Ebene u in Punkten einer geraden Linie, welche die Polare des Punktes P bezüglich der gemeinsamen Basislinie ist.

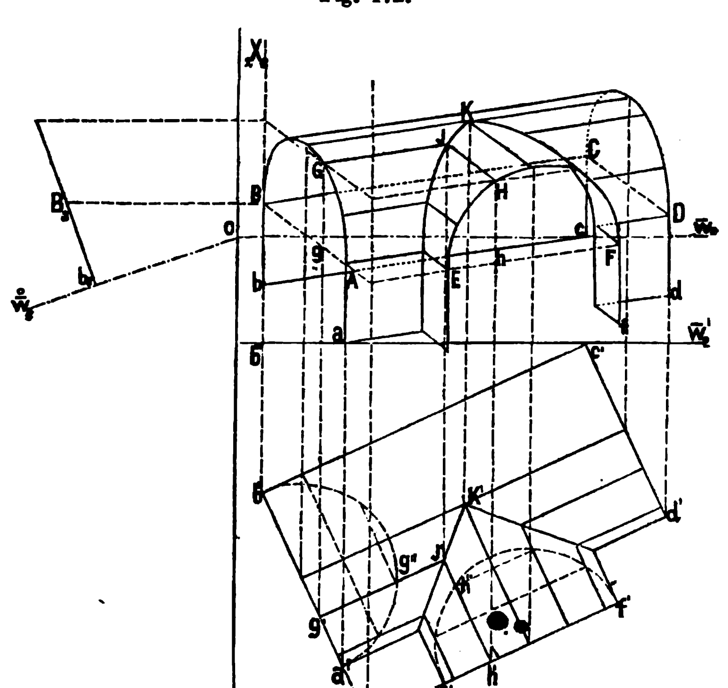
b) Ferner ist auch nach (308) $PS'QS$ eine harmonische Punktreihe; weil aber die Punkte $PS'S$ unverändert bleiben, so ist Q stets jener Punkt, in welchem alle wie cd bestimmten Sehnen die Scheitellinie SS' schneiden, und nun kann man folgern: weil alle wie cd bestimmten Sehnen sich in einem Punkte Q treffen und die gemeinsame Basisebene in Punkten der Polare des Punktes P schneiden, so liegen sie in einerlei Ebene. Also ist auch die zweite Durchdringungslinie der beiden Stralenflächen eine ebene Curve und da dieselbe eine Projection der gemein-

samen Basislinie auf die durch die Polare mn des Punktes P und den in der Reihe $PS'S$ mit P harmonisch liegenden Punkt bestimmten Ebene ist, so muss sie ebenfalls eine Linie II. Ordnung sein w. z. b. w.

Für die zweite Schnittcurve ist Q der Pol der Polaren mn, also sind Qm und Qn Tangenten an die zweite Durchdringungslinie.

Es lässt sich somit das Bild der Durchdringungslinie nach den Gesetzen der perspectivischen Collineation ermitteln.

Fig. 172.



1377. In Fig. 170 ist die construierte Durchdringungslinie, nach (1376), eine Linie II. Ordnung und nach (1376, b) muss ihre Ebene die Gerade $s\sigma$ in einem Punkte Q schneiden, welcher um 2. $s\sigma$ von s entfernt ist, weil $s\sigma Q\infty$ eine harmonische Reihe ist.

1378. **Ein Beispiel über die Durchdringung zweier Cylinderflächen.**

In Fig. 172 wurde eine zur Bildebene II geneigte Ebene w angenommen, auf welcher die tangierenden Ebenen zweier kreis-

cylindrischen gleich hohen, einander senkrecht durchschneidenden Gewölbsflächen, senkrecht aufstehen.

Man soll im zweiten Bilde beide Flächen sammt ihrer Durchdringung darstellen, also axonometrisch abbilden.

Zeichnet man in einer zur Ebene w parallelen etwas tiefer gelegten Ebene w', welche man sich um $\bar{w}'_2$ in die Bildebene II umgelegt oder congruent projiciert denkt, die orthogonalen Projectionen beider Cylinder, so erscheint der eine als das Rechteck $a'b'c'd'$, der andere als ein Rechteck, dem $e'f'$ als Seite angehört.

Ueberträgt man den Abstand $b'''b'$ nach ob_3 und zieht durch b_3 eine Ordinale zu ${}_2X_3$, so erhält man b_2. (Wir wollen der Einfachheit wegen die Zeiger 2 überall weglassen, mithin ist b das zweite Bild jenes Punktes b, welcher in der Ebene w gegen $\bar{w}_2$ dieselbe Lage einnimmt, wie sie b' gegen $\bar{w}'_2$ besitzt.)

Wie man die übrigen Punkte des zweiten Bildes der in der Ebene w liegenden Figur construiert, ist nach den Lehren der axonometrischen Projection klar.

Ist b_3B_3 die Höhe der Berührungsstralen über der Ebene w, so ergibt sich aus B_3 das zweite Bild B und mit $abcdef$ perspectivisch congruent das Bild $ABCDEF$ der Anlaufslinie der Gewölbefläche.

Um sowol die Bilder der Kreise an den Stirnseiten der Gewölbeflächen, als auch die Bilder der Durchdringungslinie beider Cylinderflächen zu erhalten (1362, b, 5), denke man sich die Kreise an den Stirnseiten bei AB und EF umgelegt, wodurch sich in der Ebene w' über $a'b'$ und $e'f'$ als Durchmesser Kreise ergeben.

Zieht man in gleichen Abständen zu $a'b'$ und $e'f'$ parallele gerade Linien, wodurch sich die Punkte $g''h''$ ergeben, so stellen diese Linien die Schnitte einer mit w parallelen Hilfsebene mit den Stirnseiten der Gewölbefläche vor; die orthogonalen Projectionen dieser Punkte auf der Ebene w' erscheinen in den Punkten g' und h'.

Um den Abstand des Punktes G über dem Durchmesser AB zu finden, denke man sich einen Proportionalwinkel mit b_3B_3 als Radius, bB als Sehne, verändere die Länge $g'g''$ diesem Winkel entsprechend und trage die veränderte Länge von g nach G auf, so ist G ein Punkt vom Bilde des Kreises über AB.

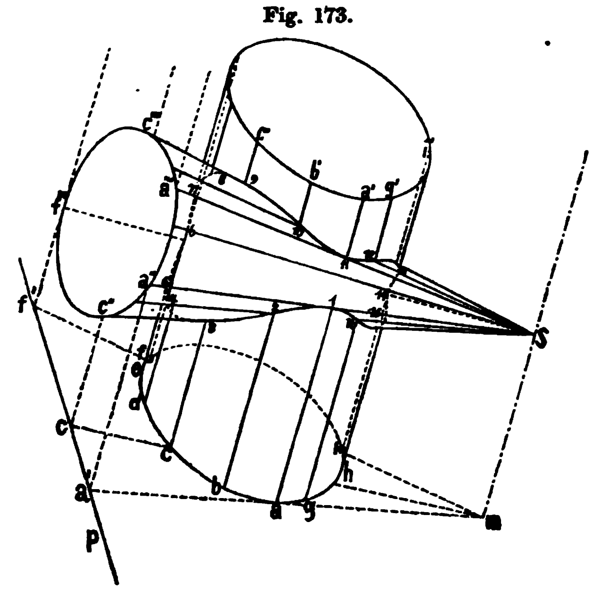
Sucht man in gleicher Art auch den Punkt H und zieht durch beide Punkte die Bilder der entsprechenden Cylinderstralen, so ergibt sich in J das Bild eines Punktes der Durchdringungslinie, welche, wie leicht nachzuweisen, aus zwei ebenen Curven, also aus Linien der II. Ordnung besteht.

Der Cylinder EF wurde über die Durchdringungslinie hinaus nicht fortgesetzt.

K ergibt sich als der höchste Punkt der Durchdringung.

1379. In Fig. 173 wurde ein Kegel und ein Cylinder in einer Parallel-Projection abgebildet und der Fall (1362, b, 2) vorausgesetzt. Dabei sei p das Bild der Schnittgeraden der beiden

Fig. 173.



Basisebenen und m das Bild des Schnittes der Scheitellinie mit der einen Basisebene des Cylinders. Die Durchdringung ist eine unvollständige, indem Ein- und Austrittslinie einen zusammenhängenden Linienzug bilden.

Von besonderen Punkten sind jene zu erwähnen, in welchen die Schnittcurve von den Flächenstralen berührt wird. Zieht man durch m eine Tangente ma' und durch a' eine Parallele zur Scheitellinie mS, so ergeben sich in der Kegelbasis zwei Schnittpunkte $a'' a'''$, wobei man findet, dass der Flächenstral aa' in den Kegel in den Punkten 1 und 11 ein- und austritt. Hieraus erkennt man, dass ein Teil der Flächenstralen des Kegels den Cylinder nicht

schneidet, dass Sa'', Sa''' die Grenzen dieses Teiles sind, und dass somit in 1 und 11 die Durchdringungslinie die Stralen Sa'', Sa''' berührt.

Ebenso zeigt die in der Basisebene des Kegels zur Scheitellinie mS parallele Tangente $f''f$ mittels der Geraden mf' an, dass die durch f und i gehenden Cylinderstralen die Grenzen jener Cylinderstralen bilden, welche in den Kegel eindringen, folglich werden diese Grenzstralen von der Durchdringungslinie in den Punkten 6 und 14 berührt.

Der Lernende wolle die Durchbrechung des Cylinders und die Combinationsfläche (1369, b) darstellen.

1380. In Fig. 174 sind zwei senkrechte Kreiskegelflächen gegeben. Die Basis des einen liegt in der horizontalen, jene des anderen in der verticalen Projectionsebene, jedoch so, dass die Kegelaxen sich schneiden.

Nach (1362) findet man hier den Fall (d, 2). Nur ist zu bemerken, dass sich auf die Stralen Sa, Sb der Fall (a, 2) anwenden lässt, indem die zu $a_2 S_2 b_2$ auf der Fläche des Kegels S' gesuchte Decklinie ein horizontaler Kreis ist, dessen erstes Bild die Geraden $S_1 a_1$, $S_1 b_1$ in vier Punkten schneidet, welche dem ersten Bilde der Durchdringungslinie angehören. Ferner ist auch zu beachten, dass die Stralen Sc, Sd und $S'e$, $S'f$ in einer Ordinatenebene liegen, dass sonach ihre gegenseitigen Durchschnittspunkte mittels einer dritten Bildebene bestimmt werden können, wie dies aus der Ermittelung des Punktes $g_3 g_2 g_1$ zu ersehen ist.

Wird jetzt ein allgemeiner Flächenstral, z. B. $S_2 h_2$, $S_1 h_1$ angenommen, so projiciert man nach (1362, d, 2) zwei Punkte des Strales $S_2 h_2$, $S_1 h_1$ aus $S'_2 S'_1$ auf die Basisebene I, wodurch beispielsweise die Punkte $i_1 k_1$ erhalten werden. Die Gerade $i_1 k_1$ schneidet die Basislinie in $m_1 n_1$, folglich sind die Punkte, in welchen $S'm_1$, $S'n_1$ die Gerade Sh schneiden, zwei Punkte der Durchdringungslinie. Auf diese Weise construiert man noch eine hinreichende Menge von Punkten und verbindet sie schliesslich zu den Bildern der Durchdringungslinie.

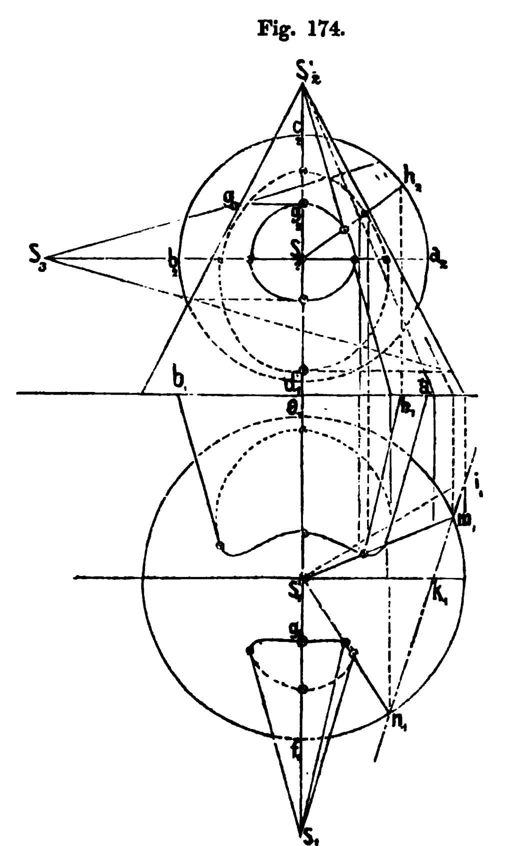
Der Lernende wolle nachweisen, dass die Durchdringungslinie sich auf einer zu den Kegelaxen parallelen Ebene als ein Teil einer Hyperbel projiciert.

1381. Denkt man sich in Fig. 164 jeder Basislinie eine Curve umschrieben, so entsteht die Aufgabe, die Durchdringung

einer Cylinderfläche mit einem abgestutzten Kegel zu bestimmen. Dieses Beispiel kann man nach dem Falle (1362, *d*, 2) behandeln, weil sich alle Stralen des Kegels parallel mit den Cylinderstralen auf die Basisebene des Cylinders ohne besondere Mühe projicieren lassen.

Wird aber statt des Cylinders ebenfalls ein abgestutzter Kegel angenommen, dann verfährt man nach (1362, *d*, 3).

Fig. 174.



1382. Es bleibe dem Lernenden überlassen, die in (1362) erwähnten hier nicht durchgeführten Fälle auszuarbeiten; auch Durchdringungen von gekrümmten mit ungekrümmten Stralenflächen, sowie die **Netzlinien der Durchdringungslinie** im Netze der einen oder der anderen Stralenfläche zu construieren.

1383. Von geometrischem Interesse sind die Durchdringungslinien zweier nicht concentrischer Stralenflächen der II. Ordnung, wenn sie einen Flächenstral gemeinsam haben und sich längs desselben *a*) berühren oder *b*) durchschneiden. Bei *a*) entsteht eine Linie II. Ordnung; bei *b*) sind aber vier verschiedene Fälle denkbar, wodurch die Raumcurven III. Ordnung entstehen, welche die Eigenschaft besitzen, dass wenn alle Punkte einer derselben aus einem beliebigen Punkte dieser Curve projiciert werden, eine Stralenfläche der II. Ordnung gebildet wird.

1384. Wenn die **Durchdringung abgebildeter Flächen von beliebiger Gestalt** zu suchen ist, so wird man stets sein

Augenmerk dahin zu lenken haben, auf der einen Fläche Linien einfach darzustellen und sie auf eine bequeme Art mit der anderen Fläche zum Durchschnitt zu bringen, oder Ebenen oder andere Flächen zu legen, welche die gegebenen Flächen in bequem abzubildenden Linien schneiden. Das letzte Mittel, wenn nämlich keine speciellen zur Verfügung stehen, Durchschnitte von Linien mit Flächen zu finden, ist die Anwendung der Decklinien.

Der Lernende bearbeite nun folgende Fälle:

a) Es ist die windschiefe Schraubenfläche (Fig. 151) am oberen Ende statt mit einer Ebene durch eine Kugelfläche zu begrenzen, deren Centrum in der Schraubenaxe liegt.

b) Es ist ein Säulenfuss mit einem gleichprofilierten Fussgesimse einer ebenen Wand zu verbinden.

c) Im Beispiele *b*) das Fussgesimse einer cylindrischen Wand zuzuweisen.

d) Es ist der Schnitt einer beliebigen Rotationsfläche mit einer excentrischen Kugel zu bestimmen.

e) Es sind zwei Rotationsflächen zum Durchschnitt zu bringen, deren Axen sich schneiden. (Kugelflächen, deren Centra im Durchschnittspunkte beider Rotationsaxen liegen, können diese Rotationsflächen nur in Kreisen schneiden; daher empfehlen sich derartige Kugeln bisweilen als schneidende Hilfsflächen.)

f) Zwei Rotations-Ellipsoide zur Durchdringung zu bringen, deren Axen nicht in einer Ebene liegen.

g) Die Durchdringung von drei Kugeln zu projicieren. (Z. B. die Centra sind die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreieckes und jedes Centrum liegt auf der Oberfläche jeder der beiden übrigen Kugeln.)

Zu noch weiterer Uebung sei empfohlen, diese Beispiele nicht nur in orthogonaler, sondern auch in schiefer und centraler Projection zu bearbeiten.

Sechster Abschnitt.

Beleuchtungs-Constructionen.

Allgemeine Bemerkungen über Beleuchtungs-Erscheinungen. Tongrenzen der Flächen.

§. 68.

1385. Um die Wirksamkeit einer geometrischen Abbildung auf unsere Vorstellungskraft zu erhöhen, sucht man in manchen Fällen an dem Bilde jene Erscheinungen nachzuahmen, welche sich an dem abgebildeten Objecte durch unser Sehorgan wahrnehmen lassen, wenn ersteres der Sonnenbeleuchtung, oder der Beleuchtung durch eine kräftige, aber nicht umfangreiche Flamme ausgesetzt wird. Diese Erscheinungen bestehen

a) in der Wahrnehmung der Farbe des Gegenstandes und

b) in der Helligkeit oder Dunkelheit, in welcher die beleuchteten Flächenteilchen erscheinen.

1386. Die Kunst des Malens ist kein Gegenstand der Construction, es kann sich also bei der geometrischen Darstellung von Beleuchtungs-Erscheinungen nur darum handeln, blos die verschiedenen Grade der Dunkelheit einer beleuchteten und abgebildeten Fläche im Bilde ersichtlich zu machen. Damit dies geschehen könne, müssen gewisse Voraussetzungen bestehen, welche einer Construction zugänglich sind, von den Thatsachen aber nicht auffallend abweichen. Diese Voraussetzungen sind:

a) Die Lichtquelle L sei ein leuchtender Punkt (Leuchtpunkt) mit einer unseren Zwecken entspechenden Leuchtkraft;

b) das Licht pflanze sich geradlinig fort;

c) jede Kugelfläche, deren Centrum im Leuchtpunkt liegt, werde an allen Stellen ihrer inneren Fläche gleich stark beleuchtet;

d) die Oberfläche eines jeden beleuchteten und abgebildeten Körpers sei matt und reflectire das Licht nach allen Richtungen zurück, insoferne es nicht durch die undurchsichtige Materie des Körpers daran verhindert wird.

1387. Was folgt aus den Voraussetzungen *a*) und *b*)?

Es folgt, dass an jedem beleuchteten Körper ein Umriss (1030) für den Leuchtpunkt L entstehen wird, welcher die Grenze zwischen den beleuchteten und den unbeleuchteten Flächenteilen bilden muss, und Lichtcontour genannt werden kann.

1388. Eine begrenzte Ebene, welche erweitert durch die Lichtquelle L geht, ist auf keiner Seite beleuchtet; man sagt, sie befinde sich im Streiflichte.

Von den einer Lichtquelle L abgewendeten Teilen einer Fläche sagt man, sie befinden sich im Selbstschatten; daher bezeichnet man auch die Lichtcontour eines Körpers als die Grenze seines Selbstschattens.

1389. Jener Raum, dem das Licht durch die Undurchsichtigkeit eines Gebildes entzogen wird, bildet den Schattenraum dieses Gebildes. Denken wir uns beispielsweise eine undurchsichtige Fläche in Form eines Quadrates von einem Leuchtpunkte L beleuchtet, welcher aber nicht in der Ebene des Quadrates liegt, so ist eine Seite der Quadratfläche im Selbstschatten. Die am Umfange des Quadrates hinstreifenden Lichtstralen bilden eine Stralenfläche und jener von dieser Stralenfläche begrenzte in's Unendliche reichende Raum, welcher sich an die Selbstschattenseite des Quadrates anschliesst, ist der Schattenraum des Quadrates.

Den Schattenraum eines Punktes bezeichnen wir als einen Schattenstral; dieser bildet daher die geradlinige Verlängerung des den Punkt treffenden Lichtstrales.

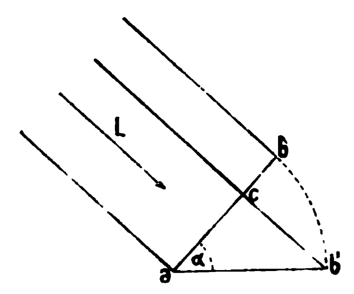
1390. Wird eine beleuchtete Fläche vom Schattenraume eines anderen Gebildes getroffen, so wird jener Teil der beleuchteten Fläche, dem das Licht durch den Schattenraum des anderen Gebildes entzogen ist, der Schlagschatten dieses Gebildes auf der Fläche genannt.

1391. Welche Folgerungen lassen sich aus der Voraussetzung (1386, *c*) ziehen?

Es ergibt sich hieraus, dass das Licht ringsum vom Leuchtpunkt gleichförmig ausstralt. Denken wir uns ferner zwei concentrische Kugeln mit dem Centrum im Leuchtpunkt und mit den Ra-

dien r und R, von der Lichtquelle L einzeln beleuchtet, so wird dasselbe Lichtquantum einmal auf die Oberfläche $4r^2\pi$, das anderemal auf die Oberfläche $4R^2\pi$ gleichförmig ausgebreitet, woraus folgt, dass die grössere Kugel R schwächer erleuchtet ist, als die kleinere r. Bezeichnet man das Gesammtquantum Licht, welches in jedem Momente vom Leuchtpunkte angeregt wird, mit 1, so entfallen auf die Flächeneinheiten der beiden Kugeln die Quantitäten $\frac{1}{4r^2\pi}$, $\frac{1}{4R^2\pi}$; und weil sich die Helligkeiten wie die Lichtquantitäten verhalten, welche über eine Flächeneinheit ausgebreitet sind, so ergibt sich $h : H = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$, d. h.: Werden Flächenteilchen von den Lichtstralen senkrecht getroffen, so verhalten sich die Helligkeiten derselben umgekehrt wie die Quadrate ihrer Abstände von dem Leuchtpunkte.

Fig. 175.



1392. Liegt der Leuchtpunkt in sehr grosser Entfernung, so dass man alle eine Fläche beleuchtenden Stralen als parallel ansehen kann, dann ist die Helligkeit einer ebenen Flächeneinheit von der Neigung der Ebene gegen die Lichtrichtung bedingt, indem bei abnehmender Neigung immer weniger Lichtstralen auf eine Flächeneinheit entfallen.

Denken wir uns die Flächeneinheit in Gestalt eines Quadrates, dessen eine Seite in Fig. 175 durch ab dargestellt sein soll, und versetzen wir das Quadrat einmal in eine senkrechte Stellung ab, das anderemal in eine geneigte Lage ab' gegen die Richtung L des parallelen Lichtes, so folgt, dass die Lichtmengen, welche auf die beiden Stellungen des Quadrates entfallen, in dem Verhältnisse wie $ab : ac$ zueinander stehen. Da ab die Einheit, so ist $ac = \cos\alpha$, mithin ist die Helligkeit einer ebenen Fläche durch den Cosinus des Winkels zu messen, um welchen die Ebene von der senkrechten Stellung zur Lichtrichtung abweicht; vorausgesetzt, dass die Helligkeit bei der senkrechten Stellung mit 1 bezeichnet wird.

1393. Die Dunkelheit D einer Ebene setzen wir dem Lichtquantum proportional, welches auf die Ebene bei schiefer Stellung

gegen das Licht weniger auffällt, als bei senkrechter Stellung; demzufolge wird die Dunkelheit der Ebene ab in Fig. 175 durch Null, jene der Ebene ab' durch bc, d. i. durch $1 - \cos \alpha$ gemessen.

Es sei bemerkt, dass α dem vom Einfallslote zu ab' mit der Lichtrichtung gebildeten Winkel (Einfallswinkel des Lichtes) gleich ist.

1394. Wird $\alpha = 90^0$, so wird das Licht zur Ebene parallel und die Dunkelheit $= 1$. Demzufolge müssen alle Flächenteilchen längs der Selbstschattengrenze einer gekrümmten Fläche, weil sie der Lichtrichtung parallel sind, die Dunkelheit 1 besitzen.

1395. Welche Ergebnisse finden wir aus (1386, *d*)?

Wir finden, dass die Helligkeit, in welcher uns die Flächenteilchen sichtbar sind, von der Leuchtkraft der reflectierten Lichtstralen abhängt; denn da ein jedes Flächenteilchen das in einer Richtung empfangene Licht nach unendlich vielen Richtungen zurückstralt (zerstreutes Licht) und die Oberfläche eines Körpers mehr oder weniger directes Licht absorbiert, so muss die Leuchtkraft eines jeden einzelnen solchen Strales schwächer sein, als jene eines directen Lichtstrales aus der Lichtquelle L. Demzufolge und mit Berücksichtigung von (1391) haben wir an beleuchteten Flächen eine absolute und eine scheinbare Helligkeit oder Dunkelheit zu unterscheiden.

1396. Das zerstreute Licht, welches von allen materiellen beleuchteten Körpern, sowie auch von den beleuchteten Luftteilchen ausgesendet wird, bewirkt, dass die im Selbst- oder im Schlagschatten liegenden Flächen noch gewisse Grade von Helligkeit erlangen, also nicht in Finsternis sich befinden. Um der Construction Anhaltspunkte für die Ermittelung der Dunkelheiten für die im Selbst- oder im Schlagschatten liegenden Flächenteilchen zu bieten, nimmt man bei parallel einfallendem Lichte an, das von der Luft zerstreut reflectierte Licht entstamme einer unendlich fernen Lichtquelle, deren Stralen jenen des directen Lichtes gerade entgegengesetzt, aber von weit schwächerer Leuchtkraft sind. Es soll dieses Licht das Gegenlicht des gegebenen genannt werden.

1397. Wenn nun zwar die direct beleuchteten Flächen kein Gegenlicht im Sinne von (1396) empfangen, so wird dennoch zer-

streutes Licht auch auf diese Flächenteilchen gelangen, und befindet sich ein Teil der direct beleuchteten Fläche im Schlagschatten, so wird dieser demzufolge noch immer einen gewissen Grad von Helligkeit zeigen, welcher aber geringer als jener des Selbstschattens sein muss. Es ist also die Dunkelheit der Schlagschatten eine grössere als jene der Selbstschatten. Ueberdies wird die Dunkelheit des Schlagschattens noch durch den Contrast erhöht, so dass ein Schlagschatten um so tiefer erscheint, je heller die an ihn grenzende Fläche beleuchtet ist.

1398. Bei der geometrischen Darstellung der Beleuchtungserscheinungen wird auf die scheinbare Dunkelheit nicht gerne Rücksicht genommen, weil hiedurch einerseits die Constructionen umständlich werden und andererseits die mit grossem Aufwande an Mühe erzielten Resultate dennoch nicht in wünschenswerter Uebereinstimmung mit den thatsächlichen Beleuchtungs-Erscheinungen stehen. Es genügt daher die absoluten Lichtstärken der Flächenteile nach den getroffenen Voraussetzungen zu bestimmen, und beim Colorit jene Abänderungen zu treffen, welche zur Erhöhung des Eindruckes beitragen, den das Bild auf uns machen soll. Diese Abänderungen in der Lichtstärke beruhen auf Erfahrungen, die wir bei Beobachtung von Beleuchtungs-Erscheinungen sammeln können. (Man lese hierüber Professor Guido Schreiber's Schattenlehre, Leipzig 1868.)

1399. Teilen wir die Zunahme der Dunkelheit Null bis zur Dunkelheit der Selbstschattengrenze etwa in 10 Abstufungen oder Töne, und nehmen wir an, jene Fläche, welche vom Gegenlichte senkrecht getroffen wird, habe den Ton 5, so wird eine Fläche, welche im directen Lichte den Ton x annimmt, im Gegenlichte den Ton $5+\frac{x}{2}$ erhalten; denn die Dunkelheit muss im Gegenlichte ebenfalls grösser werden, wenn die Neigung der Ebene gegen die Lichtrichtung kleiner wird. Wird die Ebene zum Lichte parallel, so wird der Ton der Selbstschattenseite $=5+\frac{10}{2}=10$, wie es sein soll, weil die Ebene auf beiden Seiten ein gleiches Verhalten gegen das Licht zeigt.

1400. Für den Selbstschatten nehmen wir an, dass der Ton mit 15 zu bezeichnen sei, wenn die Helligkeit der Fläche im directen Lichte $=0$ wäre, und dass der Ton $=15-\frac{x}{2}$ werde, wenn die Fläche im directen Lichte den Ton x annehmen würde.

Unter diesen Voraussetzungen vermag man für ein jedes Flächenelement, es mag im directen oder im Gegenlichte oder im Schlagschatten liegen, die Töne durch Zahlen zu bezeichnen und diese durch Construction zu ermitteln.

1401. Wenn bei abgebildeten Körpern die Beleuchtungserscheinungen geometrisch darzustellen sind, so ermittelt man sich

a) die Selbstschattengrenzen,

b) die Schlagschatten und

c) die Töne der Flächenteile.

Bei gekrümmten Flächen sucht man Linien auf, welche die Punkte von einerlei Ton verbinden und bezeichnet sie als Linien gleicher Beleuchtungsstärke, als Licht-Intensitätslinien, oder auch als Tonlinien oder Tongrenzen der Fläche.

1402. Wenn mittels Farben eine geeignete Scala für die Farbentöne angefertigt wurde, oder wenn man selbst schon das Gefühl für diese Töne in sich trägt, und wenn jeder Teil des Bildes, welcher zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tonlinien liegt, mit dem entsprechenden Tone angelegt wird, so hat man auf geometrische Art mittels Farben die Beleuchtungserscheinungen am Bilde eines Körpers dargestellt, das Bild coloriert.

1403. Welche Erscheinungen werden wahrgenommen, wenn den das Licht zurückstralenden Flächen nicht eine matte, sondern eine möglichst glatte Beschaffenheit eigen ist?

Man bemerkt, dass diese Flächen das Licht nach den bekannten Reflexionsgesetzen reflectieren, nämlich:

a) der reflectierte Stral liegt in der Einfallsebene,

b) der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.

Die Folge davon ist, dass es bei einer glatten Fläche Punkte oder auch Linien gibt, welche das empfangene Licht regelmässig, d. h. nach den Reflexionsgesetzen in das projicierende Auge reflectieren. Solche Punkte und Linien einer Fläche werden Reflexe oder auch Glanzpunkte und Glanzlinien der Fläche genannt.

1404. Wenn glatte Flächen auch das von beleuchteten Objecten auf die Fläche ausgestralte Licht in ein Auge regelmässig reflectieren, so entsteht bekanntlich eine Spiegelung der Objecte auf der Fläche.

1405. Die bekanntesten Spiegelungen sind jene auf glatten Ebenen, wie sie ruhig stehende Flüssigkeitsoberflächen oder amalgamierte Glastafeln bieten. Das dabei auftretende Gesetz lautet nach den Lehren der Fisik: Das Spiegelbild eines Punktes erscheint in einer von dem Punkte auf die spiegelnde Ebene senkrecht gefällten Geraden hinter der Spiegelebene als Punkt, und zwar ebensoweit, wie der sich spiegelnde Punkt vor der Spiegelebene.

Construction der Selbstschattengrenzen an geometrischen Gebilden.

§. 69.

1406. Wie kann man untersuchen, welche Seite einer orthogonal dargestellten Ebene u im directen Lichte sich befindet?

Fig. 176.

Bezeichnen wir die Lichtquelle jederzeit, ob sie im Endlichen oder im Unendlichen liegt, mit L, und ziehen wir in einer Projectionsebene, etwa in I, durch L_1 eine Gerade l_1, so kann man zu l_1 in der Ebene u eine Einser-Deckgerade l' construieren (686). Ist dies geschehen, so ersieht man aus der zweiten Projection, ob das zugeordnete Bild L_2 des Leuchtpunktes L über oder unter dem Bilde l'_2 der Deckgeraden l' liegt. Im ersteren Falle ist die obere Seite der Ebene u dem directen, folglich die untere dem Gegenlichte ausgesetzt.

Auf eine analoge Art, wie man mittels einer zu l_1 construierten Deckgeraden die direct beleuchtete Seite einer Ebene u ermittelt, können auch Deckgerade benützt werden, die man zu einem anderen Bilde l_2 oder l_3 eines Lichtstrales construiert.

In Fig. 176 sei der unendlich ferne Leuchtpunkt L durch die Projection der Geraden $L_1\,L_2$ bestimmt und bcS sei die Ebene, deren Selbstschattenseite aufgefunden werden soll. Zieht man in

der ersten Bildebene zu L_1 eine parallele Gerade l_1, so ist $e_1 f_1$, $e_2 f_2$ die zugehörige Einserdeckgerade l'. Zieht man in der zweiten Bildebene an $e_2 f_2$ parallel zu L_2 einen Pfeil, so erkennt man, dass die Oberseite von $e_2 f_2$, also auch die Oberseite der Ebene bcS von der unendlich fernen Lichtquelle L beleuchtet wird. Da die Oberseite der Ebene zugleich Vorderseite, so ist von Sbc weder in der einen, noch in der anderen Bildebene das Bild zu schraffieren. Der Lernende wolle sich durch Versinnlichung die Wahrheit der Construction zur Erkenntnis bringen.

1407. Ist eine begrenzte Ebene ein Teil der Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers, so kann die innere Seite der Ebene (wie immer vorausgesetzt, die Lichtquelle befinde sich ausserhalb des Körpers) nie direct beleuchtet werden. Würde demnach die Construction (1406) zeigen, dass die innere Seite dem directen Lichte ausgesetzt ist, so würden wir folgern: die Aussenseite der gegebenen begrenzten Ebene u befindet sich im Selbstschatten.

1408. Bei einer isolierten begrenzten Ebene ist stets der Umfang der Ebene die Grenze des Selbstschattens.

1409. Wie wird man untersuchen, ob eine Kante eines Körpers, welche von zwei begrenzten Ebenen u und v desselben gebildet wird, der Selbstschattengrenze angehört?

Man zieht in einer Bildebene, z. B. in I, durch L_1 eine Gerade l_1 und sucht zu l_1 in der Ebene u eine Einser-Deckgerade l', in der Ebene v eine Einser-Deckgerade l''. Findet man nach (1407), dass von der einen Ebene die Aussenseite im directen Lichte, von der anderen Ebene aber die Aussenseite im Selbstschatten sich befindet, so ist die von diesen zwei Ebenen gebildete Körperkante ein Teil der Selbstschattengrenze des Körpers.

Liegen aber beide Aussenseiten im directen Lichte oder beide im Selbstschatten, so bildet die Körperkante keine Selbstschattengrenze des Körpers.

1410. Ist die Aussenseite einer der beiden Ebenen direct beleuchtet, die Aussenseite der anderen Ebene aber im Streiflichte (1388), so ist die Körperkante gleichfalls ein Teil der Selbstschattengrenze.

1411. In Fig. 176 wurde l_1 durch das erste Bild L_1 des (unendlich fernen) Leuchtpunktes L gehend, so angenommen, dass

von allen fünf Ebenen die ersten Bilder geschnitten wurden, wodurch sich auch fünf Decklinien ef, fg, gh, hi und ie ergaben. Aus dem zweiten Bilde findet man die Oberseite von $f_2 g_2$, also auch die Oberseite der Ebene Sab beleuchtet. Da die Oberseite dieser Ebene Aussenseite ist, was man aus dem Polygone $e_2 f_2 g_2 h_2 i_2 e_2$ erkennt, so folgt, dass die Ebene Sab weder im ersten noch im zweiten Bilde schraffiert werden darf. In der Ebene $abcd$ ergab sich gh als Decklinie. Nun zeigt aber der zu $g_2 h_2$ gezogene Lichtpfeil, dass die Unterseite von $g_2 h_2$, also auch die Unterseite der Ebene $abcd$, welche Unterseite zugleich Innenseite des Körpers ist, dem Lichte zugewendet erscheint, folglich ist die Aussenseite im Selbstschatten. Da die Aussenseite der Ebene $abcd$ in der Bildebene I sichtbar ist, so muss ihr erstes Bild schraffiert werden. Ferner findet man noch die Aussenseite der Ebene Sad unbeleuchtet, und die Ebene Sdc im Streiflichte, weil die Deckgerade ie durch die Lichtquelle L geht.

Da von allen fünf Flächen nur die Ebenen Scb und Sba beleuchtet sind, so ist der Linienzug $ScbaS$ die Grenze des beleuchteten oder der Beginn des unbeleuchteten Teiles der Aussenfläche.

1412. **Wie wird man die Selbstschattengrenze eines durch orthogonale Projectionen gegebenen Körpers oder einer Fläche bestimmen?**

Wenn die besondere Gestalt des Körpers nicht auch eine besondere Methode zulässt, so ist die Bestimmung der Selbstschattengrenze folgende: Man zieht in einer Bildebene, z. B. I, durch das Bild L_1 der Lichtquelle L eine Reihe von geraden Linien $l_1 m_1 n_1 \ldots$, welche das erste Bild des Körpers durchschneiden; zu jeder dieser Geraden sucht man das zweite Bild der Decklinie auf der Fläche und zieht an diese Bilder aus L_2 Tangenten. Jeder Berührungspunkt gehört dem zweiten Bilde der Selbstschattengrenze an. Durch eine genügende Anzahl solcher Berührungspunkte lassen sich die Bilder der Selbstschattengrenze ziehen, welche nach (1030) die Contour des Körpers für den Punkt L ist. In Fig. 176 genügte eine einzige Gerade l_1.

1413. **Wie ermittelt man auf eine specielle Art die Selbstschattengrenzen einer Stralenfläche?**

Man legt durch den Leuchtpunkt L berührende Ebenen an die Stralenfläche; die Berührungsstralen bilden dann die Selbstschattengrenze. Denn zieht man vom Leuchtpunkt L aus in einer

dieser Tangierungsebenen beliebige Stralen, so müssen sie die Stralenfläche berühren und zwar in einem Punkte jener Geraden, längs welcher die Ebene die Stralenfläche berührt.

a) Ist die Stralenfläche eine Pyramiden- oder eine Kegelfläche, so ermittelt man nach (1066) oder nach (1067, *a*) die tangierenden Ebenen, welche durch die Lichtquelle L gehen.

b) Bei Prismen- oder Cylinderflächen ziehe man, wenn der Leuchtpunkt L im Endlichen liegt, durch L eine Parallele l zu den Flächenstralen, suche den Schnitt von l mit einer Basisebene der Parallel-Stralenfläche und ziehe von diesem Schnittpunkte Tangenten an die Basislinie, so müssen die durch die Berührungspunkte gezogenen Flächenstralen der Selbstschattengrenze angehören.

c) Befindet sich bei Parallel-Stralenflächen der Leuchtpunkt L im Unendlichen, so lassen sich die tangierenden Ebenen nach (1067, *b*) legen.

Man kann aber auch in der Parallel-Stralenfläche irgend einen Flächenstral p annehmen, durch einen Punkt desselben einen Lichtstral l ziehen und seinen Schnitt mit der Basisebene der Stralenfläche ermitteln. Durch diesen Schnittpunkt, sowie durch den Basispunkt des angenommenen Flächenstrales geht eine Gerade, zu welcher parallele Tangenten an die Basis zu ziehen sind. Diese Tangenten stellen die Schnitte der Basisebene mit jenen Ebenen vor, welche man parallel zur Lichtrichtung tangierend an die Fläche legt. Durch die Berührungspunkte der erwähnten Tangenten gehen die Flächenstralen, welche die Selbstschattengrenzen sind.

1414. Zieht man durch einen Punkt der Selbstschattengrenze einen Lichtstral, so muss man hieraus erkennen, welcher Teil der Fläche dem Lichte zugewendet, sonach beleuchtet ist.

1415. Ist eine Stralenfläche durch Basisebenen begrenzt, so gehört jener Teil einer Basislinie der Selbstschattengrenze an, welcher entweder

a) die beleuchtete Mantelfläche von der unbeleuchteten Basisebene, oder

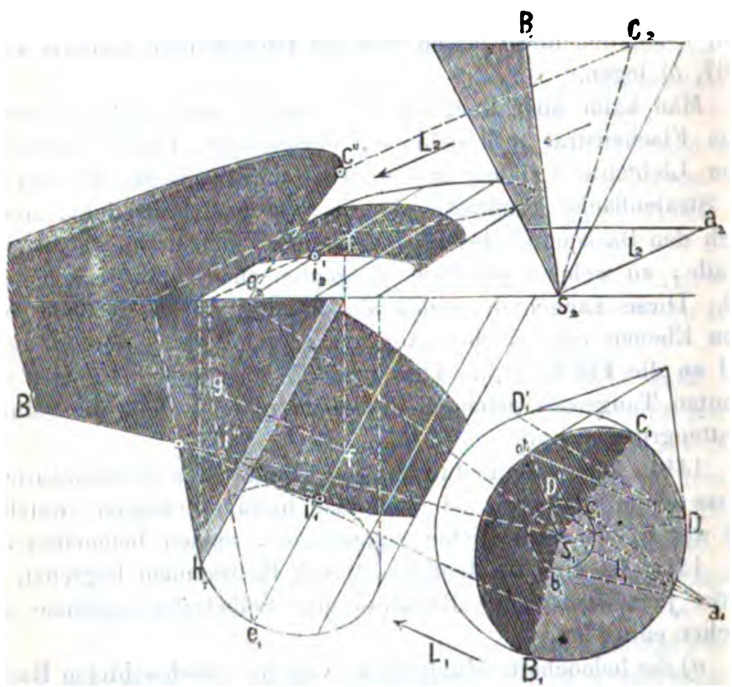
b) die unbeleuchtete Mantelfläche von der beleuchteten Basisebene trennt.

1416. Beispiel. In Fig. 177 ist ein Kegel (senkrechter Kreiskegel) dargestellt und die Richtung der parallelen Lichtstralen durch $L_1 L_2$ gegeben. Da der Lichtstral l durch den Scheitel S die Basisebene an einem unbenützbar liegenden Orte schneidet,

so wurde parallel zur Basisebene eine Hilfs-Basisebene gelegt, welche von l in einem Punkte $a_2 a_1$ geschnitten wird. Der Schnitt mit der Kegelfläche ist eine zur Basis perspectivisch ähnliche Figur, in unserem Falle also ein Kreis. Zieht man von a Tangenten ab, ac an diese Hilfsbasis, so sind die Geraden SbB und ScC die gesuchten Selbstschattengrenzen. Ein an $S_2 B_2$ mit l_2 paralleler Pfeil lässt die äussere Selbstschattenseite des Kegels erkennen, folglich ist im ersten Bilde $B_1\ S_1\ C_1\ D_1\ B_1$ der im Selbstschatten liegende innere Teil der oben offenen Kegelfläche.

1417. Beispiel. In Fig. 177 sind die orthogonalen Bilder eines Cylinders mit der Basis in der Bildebene I gegeben. Es

Fig. 177.



wurde irgend ein Flächenstral, etwa jener durch $e_1\ e_2$ gezogen ein Punkt $f_1 f_2$ angenommen, durch f eine Parallele zu l gedacht und deren Schnitt g_1 mit der Basisebene I ermittelt. Eine parallele Tangente zu $e_1 g_1$ gibt h_1; folglich geht durch h_1 das erste Bild der einen Selbstschattengrenze. (Weil die übrigen Bilder der Selbstschattengrenzen beiden projicierenden Augen unsichtbar sind, so wurden sie in Fig. 177 nicht gezeichnet.)

1418. Beispiel. Der Lernende zeichne sich in zwei zugeordneten Bildern eine horizontale cylindrische Rinne, welche aus einer verticalen, zur Bildebene II nicht parallelen Wand, in welcher sich eine kreiscylindrische Oeffnung befindet, senkrecht zur Wandfläche hervortritt. (In Fig. 178 wurde das erste Bild wegen Raumersparnis weggelassen.) Sodann nehme er die Richtung $L_1 L_2$ des parallelen Lichtes an, und lege durch einen Flächenstral, z. B. ab, eine Ebene parallel zur Richtung des Lichtes. Ist $B_1 B_2$ der Schnitt des durch den Punkt $b_1 b_2$ gehenden Lichtstrales mit der verticalen Basisebene, so sind nur mit $a_2 B_2$ parallele Tangenten an die Basislinie zu ziehen. Hiedurch ergibt sich das zweite Bild $c_2 d_2$ der Selbstschattengrenze. Für das Bild der cylindrischen Höhlung ergibt sich diese Grenze durch g_2.

Nach (1415, *b*) ist die Basislinie von d über h nach f ein Teil der Lichtcontour der Rinne; der Flächenstral fe gehört gleichfalls der Selbstschattengrenze an.

1419. Beispiel. In Fig. 179 sind zwei vereinigte verticale Cylinderflächen dargestellt. Weil die Flächenstralen auf der Bildebene I senkrecht stehen, so lehrt die Construction in (1413, *c*), dass man nur zu L_1 parallele Tangenten an die Basislinien ziehen darf, um die Punkte $a_1 b_1$ zu erhalten, durch welche die Selbstschattengrenzen gehen. Bezüglich des oberen Cylinders beachte man (1415).

1420. Wie construiert man bei einer allgemeinen entwickelbaren Fläche, auf eine specielle Art die Selbstschattengrenze?

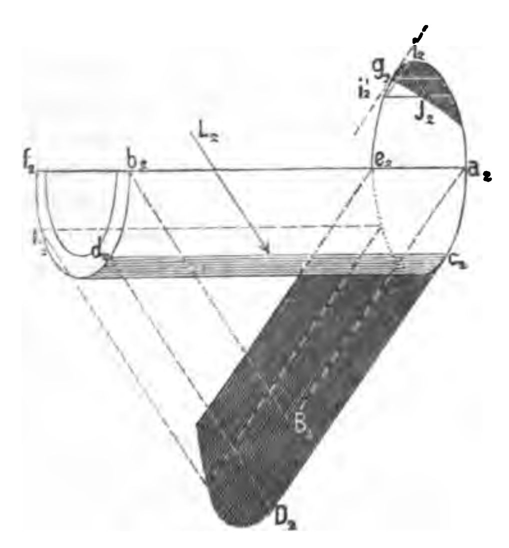
Nach (1206, *a*) wird diese Grenze ein Flächenstral; man construiert dieselbe, wenn man den Berührungsstral jener Tangentenebene aufsucht, welche durch die Lichtquelle L geht.

a) Wendet man das in (1412) gelehrte Verfahren nur einmal an, um einen Punkt der Lichtcontour zu erhalten, so zieht man durch diesen Punkt eine Tangente an die Rückkehrkante (1205) der entwickelbaren Fläche, welche ein Stral der Fläche, also auch deren Selbstschattengrenze ist. In manchen Fällen erhält eine allgemeine entwickelbare Fläche mehrere Flächenstralen als Selbstschattengrenzen der beleuchteten Fläche.

b) Legt man durch den Leuchtpunkt L und durch die Rückkehrkante der entwickelbaren Fläche eine Stralenfläche, so ist klar, dass jene Ebene u, welche die entwickelbare Fläche längs der Selbstschattengrenze berührt (1206, *a*), auch die erwähnte

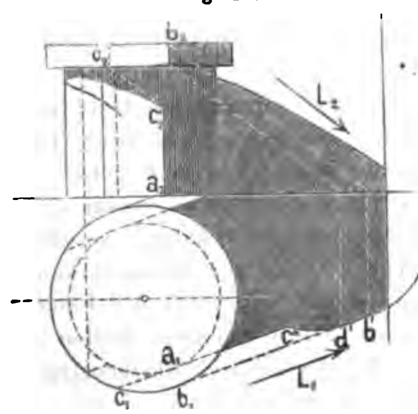
Stralenfläche berührt. (Denn weil die Ebene *u* zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Scheitellinie oder Rückkehrkante enthält (1206, *b*), und diese Tangenten auch die Stralenfläche berühren, so folgt, dass die Ebene *u* die genannte Stralenfläche sogar in zwei aufeinanderfolgenden Seitenelementen berührt.)

Fig. 178.



Wenn nun die Schnittcurven beider Flächen mit irgend einer Ebene *w* gesucht werden, so muss der Schnitt der Ebene *u* mit *w* beide Curven tangieren, und durch jenen Punkt, in welchem die Schnittcurve der entwickelbaren Fläche berührt wird, geht die Selbstschattengrenze der entwickelbaren Fläche.

Fig. 179.



c) Bei parallelem Lichte kann man **Parallelkegelflächen** benützen. Man wähle sich ausserhalb der entwickelbaren Fläche einen beliebigen Punkt *S* und ziehe durch *S* zu allen Stralen der entwickelbaren Fläche parallele Stralen; diese bilden eine Kegelfläche *S* und man kann behaupten, **zu jedem Seitenelemente der entwickelbaren Fläche gibt es ein paralleles Seitenelement auf der Kegelfläche.** Sucht man an dieser letzteren jene Berührungsebene, welche zu den Lichtstralen parallel läuft, so enthält diese Ebene ein Seitenelement der Stralenfläche, folglich ist sie auch zu einem Seitenelemente

der entwickelbaren Fläche parallel. Zieht man demnach zu der Selbstschattengrenze des Kegels einen parallelen Stral auf der entwickelbaren Fläche, so ist dieser auch die Selbstschattengrenze der entwickelbaren Fläche.

Bei Anwendung eines Parallelkegels wird man die Basis desselben in einer Ebene construieren, in welcher schon eine Schnittcurve mit der entwickelbaren Fläche bekannt ist, weil man dann nur den Schnitt der zum Lichte parallelen Berührungsebene des Kegels mit der Basisebene soweit parallel verschieben darf, bis er die Schnittcurve der entwickelbaren Fläche berührt. Durch diesen Berührungspunkt geht die Selbstschattengrenze der entwickelbaren Fläche.

1421. Dieses Verfahren mittels Parallelkegelflächen wird auch bisweilen bei Kegelflächen mit Vorteil angewendet, wenn man den Schnitt des durch den Scheitel gehenden Lichtstrales mit der Basisebene nicht benützen kann.

1422. Wie construiert man auf eine specielle Art die Selbstschattengrenze einer windschiefen Fläche?

Man legt durch genügend viele Flächenstralen Ebenen, welche durch die Lichtquelle L gehen, sucht nach (1234) oder mittels windschiefer Hyperboloide und Paraboloide die Berührungspunkte und verbindet diese entsprechend durch eine Curve, welche die gesuchte Selbstschattengrenze ist.

1423. Wie construiert man auf eine specielle Weise bei einer projectivischen Fläche die Selbstschattengrenze?

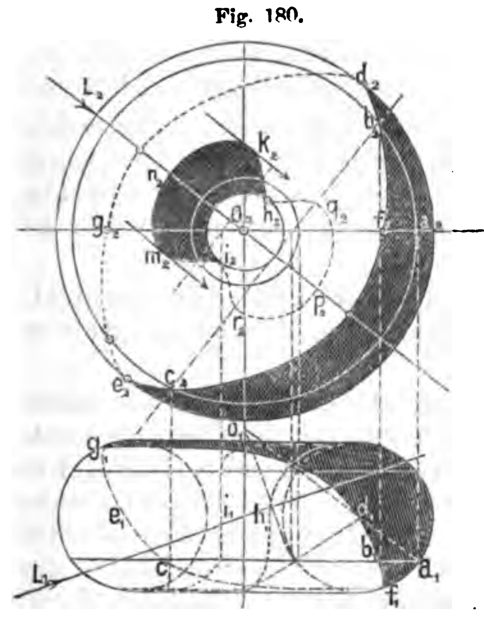
Man ermittelt von hinreichend vielen Stralenflächen, welche die projectivische Fläche in Form- oder in Seitenlinien berühren, die Selbstschattengrenzen (1413). Die Punkte, in welchen die Selbstschattengrenze einer die projectivische Fläche umhüllenden Stralenfläche die Form- oder Seitenlinie durchschneidet, gehören gleichfalls der Selbstschattengrenze der projectivischen Fläche an; denn zieht man durch einen solchen Punkt einen Lichtstral, so streift er die Stralenfläche, und weil diese die projectivische Fläche in jenem Punkte berührt, so streift der Lichtstral in jenem Punkte auch die projectivische Fläche, woraus nun folgt, dass genannter Punkt der Selbstschattengrenze der letzterwähnten Fläche angehört.

1424. Wie ermittelt man in specieller Weise die Selbstschattengrenze an Rotationsflächen?

a) Nach derselben Art wie die Selbstschattengrenze an projectivischen Flächen.

b) In dem Falle, wenn paralleles Licht vorausgesetzt wird, ist die Selbstschattengrenze einer Kugel ein Kreis, dessen Ebene durch den Kugelmittelpunkt gehend auf der Richtung des Lichtes senkrecht steht. Sucht man den Mittelpunkt einer Kugel, welche die Rotationsfläche längs eines Parallelkreises berührt, und legt durch den Kugelmittelpunkt eine Ebene senkrecht auf die Lichtrichtung, so müssen die Punkte, in welchen diese Ebene den Parallelkreis schneidet, der Selbstschattengrenze der Kugel und auch jener der Rotationsfläche angehören, weil jeder Lichtstral, welcher durch einen solchen Punkt geht, die Rotationsfläche berührt.

Fig. 180.



1425. In Fig. 180 ist eine Ringfläche dargestellt, deren Axe auf der Bildebene II senkrecht steht. Die Richtung des Lichtes ist durch $L_1 L_2$ gegeben. Legt man durch irgend einen Punkt $a_1 a_2$ der ersten Contour einen Parallelkreis und durch das Centrum $o_1 O_2$ jener Kugel, welche die Rotationsfläche in diesem Parallelkreise berührt, eine senkrechte Ebene auf den Lichtstral L, so sind $b_2 b_1$, $c_2 c_1$ zwei Punkte der Selbstschattengrenze (1359).

Auf diese Art bestimmt man eine hinreichende Menge von Punkten und findet, dass es zwei Curven auf der Fläche gibt, deren jede eine Selbstschattengrenze ist.

1426. Wie findet man jene Punkte der Selbstschattengrenze einer Curvenfläche, welche in einer Contour der Fläche liegen?

Da die durch die Contour gehende projicierende Stralenfläche auf einer Bildebene senkrecht steht, so wird man nach (1419) nur in jeder Bildebene an die Contour des Bildes Tangenten ziehen, welche durch das Bild der Lichtquelle gehen. Die Berührungspunkte gehören den Bildern der Selbstschattengrenzen an. Auf diese Art wurden die Punkte *defghi* in Fig. 180 bestimmt.

1427. Was versteht man unter Selbstschatten-Uebergangspunkten?

Jene Punkte einer Selbstschattengrenze, in welchen die Linien des Selbstschattens in jene der Schlagschattengrenze, oder auch umgekehrt, übergehen.

In Fig. 180 ergeben sich Bilder von Selbstschatten Uebergangspunkten in $k_2 m_2$, in welchen sich die Schlagschattencurve anschliessen würde, die entstünde, wenn man den Schlagschatten der Curve *mnk* auf der Ringfläche suchte.

Ebenso werden q_2 und r_2 Selbstschatten-Uebergangspunkte, sobald das Licht nicht gehindert wird, die Fläche zu beleuchten. Durch Versinnlichung der Fläche, sowie der Selbstschattengrenze erkennt man, dass die Curventeile von k über h nach q und von m über i nach r so beschaffen sind, dass eine jede zur Lichtrichtung parallele Gerade, welche die Ringfläche in irgend einem Punkte dieser Curventeile berührt, die Ringfläche noch in zwei Punkten schneiden wird.

In welcher Beziehung stehen die Selbstschatten-Uebergangspunkte zu den Contour-Uebergangspunkten in (1352)?

Construction der Schlagschatten auf ebenflächigen Gebilden. Schlaglicht.

§. 70.

1428. Wodurch entstehen die Grenzen eines Schlagschattens?

Durch den Schnitt des Schattenraumes, welcher von der Selbstschattengrenze eines Gebildes hervorgebracht wird, mit einer beleuchteten Fläche (1390).

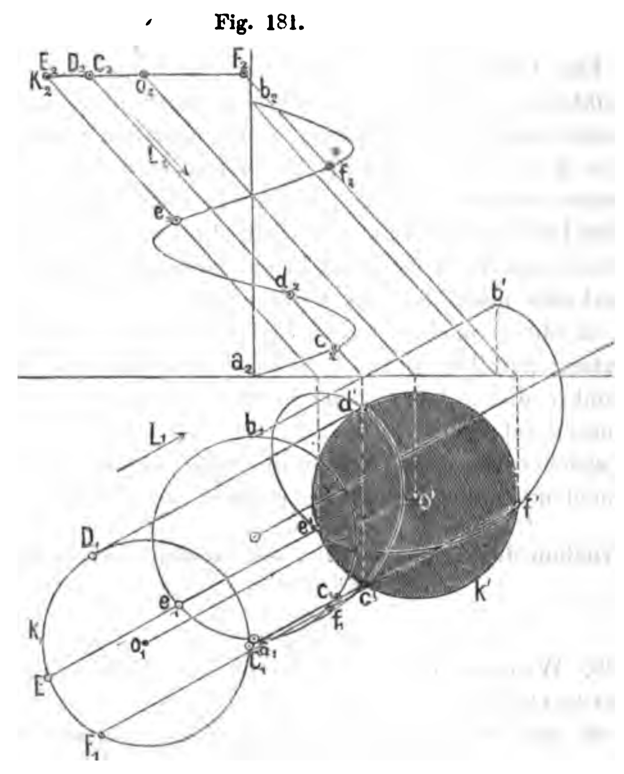
Um daher eine Schlagschatten-Construction durchführen zu können, muss man vor Allem die Selbstschattengrenze jenes Körpers oder jener Fläche ermitteln, welche einen Schattenraum veranlasst; sodann werden durch hinreichend viele Punkte der Selbstschattengrenze Schattenstralen (1389) gezogen, ihre Schnitte mit der Fläche construiert, auf welche der Schlag-

schatten fällt, und diese Schnittpunkte entsprechend durch eine Linie verbunden, welche das Resultat der Construction ist.

1429. Wenn ein Punkt und mehrere Flächen gegeben sind, wie untersucht man, auf welche Fläche der Schlagschatten des Punktes fällt?

Man ermittelt die Durchschnitte vom Schattenstrale des Punktes mit den beleuchteten Flächen; jener Schnittpunkt, welcher dem Schatten werfenden Punkte am nächsten liegt, ist der Schlagschatten des Punktes.

Fig. 181.



1430. Trifft der Lichtstral eines Punktes eine undurchsichtige Fläche, so liegt der Punkt im Schattenraum jener Fläche und kann deshalb selbst keinen Schlagschatten werfen.

1431. Welche besondere Verhältnisse können zwischen einer ebenen Linie und ihrem Schlagschatten auf einer Ebene bei parallelen Lichtstralen sich ergeben?

a) Ist eine beliebige ebene Linie *m* parallel zur Ebene *u*, auf welche der Schlagschatten *m'* von *m* fällt, so ist der Schlagschatten *m'* eine mit *m* perspectivisch-congruente, also auch parallele Linie, und kann nach §. 9 construiert werden, sobald von irgend einem Punkte der Linie *m* der Schlagschatten auf der Ebene *u* auf gewöhnliche Weise ermittelt wurde.

b) Wird die Ebene einer Linie zur Lichtrichtung parallel, so liegt die Ebene im Streiflichte (1388), folglich wird der Schlagschatten der beliebigen ebenen Linie eine gerade Strecke, deren Endpunkte von jenen Punkten herstammen, in welchen die gegebene Linie vom Lichte berührt wird.

c) Steht eine gerade Linie *p* auf einer Ebene *u* senkrecht, so ist die Ebene des Schattenraumes der Geraden *p* auch auf *u* senkrecht (101); hieraus folgt nun, dass der Schlagschatten der Geraden *p* auf der Ebene *u* parallel sein muss zur orthogonalen Projection eines Lichtstrales auf der Ebene *u*. (Dieser Satz ist für die Construction der Schlagschatten bei allen Projectionsarten von der höchsten Bedeutung, und soll daher vom Lernenden einer vorzüglichen Beachtung gewürdigt werden.)

d) Schneidet eine Gerade, oder überhaupt eine Linie, eine Ebene, oder kann man den Schnitt derselben mit der Ebene bestimmen, so muss der Schlagschatten der Linie durch diesen Schnitt gehen, falls der Schatten soweit reicht. Dasselbe gilt auch für gekrümmte Flächen.

e) Ist eine Gerade zur Richtung des Lichtes parallel, so ist ihr Schlagschatten ein Punkt.

1432. Bei der Construction der Schlagschatten kommt man bisweilen in die Lage, nicht die Schatten-, sondern die Lichtstralen der verschiedenen Punkte einer Linie mit einer Ebene zum Durchschnitte bringen zu müssen. Die so entstandene Linie soll zum Unterschiede vom Schlagschatten das Schlaglicht der gegebenen Linie genannt werden.

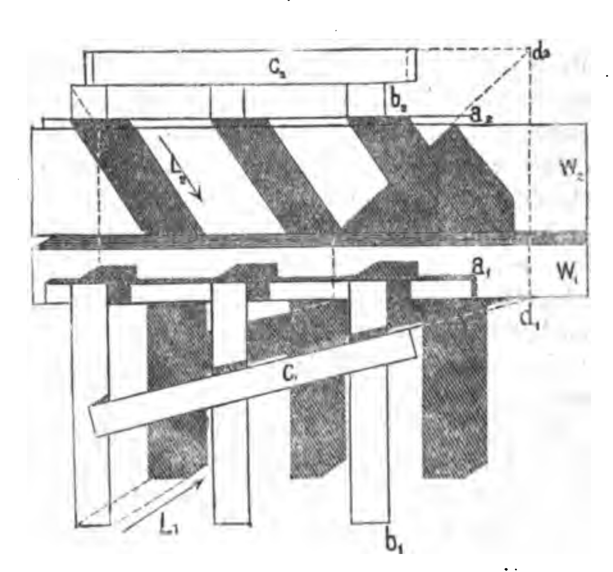
1433. Durchdringt eine Linie *p* eine beleuchtete Fläche und projiciert man *p* parallel mit der Lichtrichtung auf die Fläche, wodurch eine Linie *p'* entsteht, so besteht *p'* teils aus Schlagschatten, teils aus Schlaglicht der Linie *p*. Die gemeinsamen Grenzen beider Schlaggebilde sind die Durchschnittspunkte von *p* mit der Fläche.

1434. Wie construiert man den Schlagschatten, welchen eine Linie auf eine andere Linie wirft?

Man sucht von beiden Linien auf einer passend gelegenen Fläche, am einfachsten auf einer Ebene, die Schlagschatten. Schneiden sich die Schlagschatten in einigen Punkten, so muss jede Gerade, welche durch einen solchen Punkt zur Lichtquelle gezogen wird, beide Raumlinien schneiden, folglich ist der von der Lichtquelle entfernter liegende Punkt ein Schlagschatten, welchen die eine Linie auf die andere wirft.

1435. Beispiel. In Fig. 181 wurde eine Schraubenlinie auf einem zur Bildebene I senkrechten Kreiscylinder angenommen; es soll der Schlagschatten bestimmt werden, welchen ein horizontaler Kreis $k_1 k_2$ auf die Schraubenlinie wirft.

Fig. 182.



Man bestimme von allen Punkten der Schraubenlinie den Schlagschatten auf der Bildebene I, wodurch eine verschlungene Curve entsteht, welche in a_1 beginnt und in b' endigt. Ebenso bestimme man den Schlagschatten des Kreises k, welcher ein Kreis k' congruent zu k sein muss, und dessen Centrum o' der Schlagschatten des Mittelpunktes o_1 o_2 ist (1431, a). Der Schattenkreis k' schneidet den Schatten der Schraubenlinie in vier Punkten $c'd'e'f'$, welchen in der Schraubenlinie die Punkte cde und f entsprechen. Da alle diese vier Punkte von der unendlich fernen

Lichtquelle L entfernter liegen, als die den Punkten $c' d' e' f'$ im Kreise entsprechenden Punkte $CDEF$, so folgt, dass $c\, d\, e$ und f die Schlagschatten der Kreislinie auf der Schraubenlinie sind.

1436. Stellt man den Kreis k als eine undurchsichtige Scheibe vor, so liegen die Teile der Schraubenlinie von c bis d und von e bis f im Schattenraum der Kreisscheibe, weil die Schlagschatten von c' bis d' und von e' bis f' im Schlagschatten der Scheibe sich befinden.

1437. Wenn es sich in manchen Fällen blos um den Schlagschatten handelt, welchen eine Linie auf eine andere wirft, dann genügt es auch, wenn man von beiden Linien überhaupt nur Schlaggebilde (1432) construiert. So z. B. hätte man in Fig. 181, anstatt den Schlagschatten beider Linien auf der Bildebene I zu construieren, das Schlaglicht der Schraubenlinie auf der Ebene des Kreises k construieren können, wodurch die Punkte CDE und F unmittelbar gefunden worden wären.

1438. Besondere Bemerkung über den Schlagschatten, welchen eine Schraubenlinie auf eine zur Schraubenaxe senkrechte Ebene bei parallelen Lichtstralen wirft.

Construiert man gleichzeitig mit den Schlagschatten der verschiedenen Punkte der Schraubenlinie die Schlagschatten jener Kreise des Schraubenliniencylinders, auf welchen die erwähnten Punkte liegen, so ist ohne besondere Mühe und ohne Rechnung Folgendes zu erkennen:

Der Schlagschatten der Schraubenlinie ist eine Cykloide und zwar:

a) eine gemeine Kreis-Cykloide, wenn der Schlagschatten der Ganghöhe dem Umfange der Cylinderbasis an Länge gleich ist;

b) eine gemeine verlängerte Kreis-Cykloide (Fig. 181), wenn der Schlagschatten der Ganghöhe kleiner ist, als die Länge der Cylinderbasis;

c) eine gemeine verkürzte Kreis-Cykloide, wenn der Schlagschatten der Höhe des Schraubenganges länger als der Umfang von der Basis der Kreiscylinderfläche wird, auf welcher die Schraubenlinie liegt.

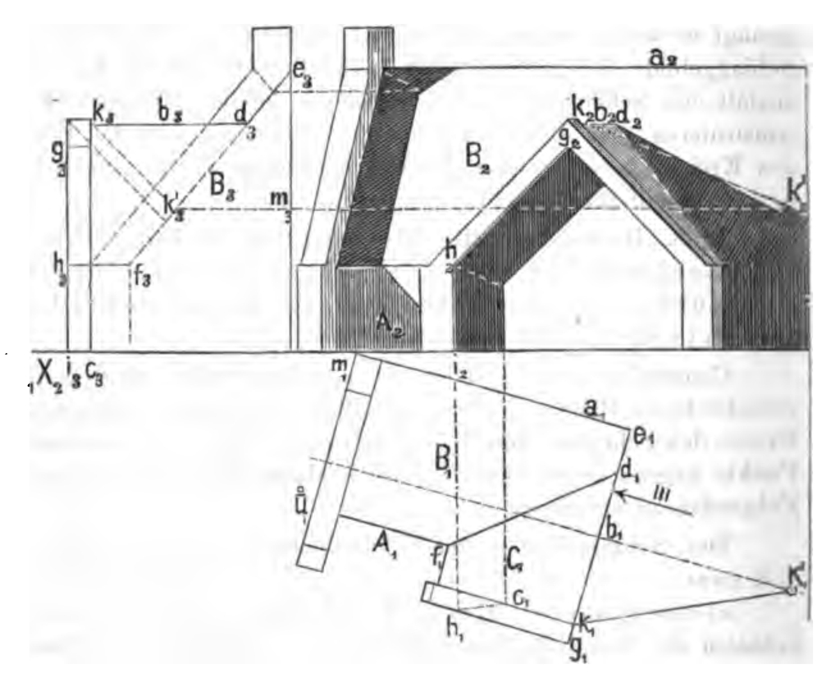
1439. Beispiel. In Fig. 182 sei eine verticale Wand $W_1\, W_2$ gegeben, auf welcher ein Laden $a_1\, a_2$ als Unterlage für mehrere

Balken, wie $b_1 b_2$ einer ist, sich befindet, die noch auf einer zweiten Mauer aufruhen, welche jedoch weggelassen wurde.

Diese Gegenstände, sowie ein noch beliebig gelegter Balken $c_1 c_2$ werfen für eine angenommene Richtung $L_1 L_2$ des Lichtes Schlagschatten, die zu construieren sind.

Auflösung. Von jedem Balken $b_1 b_2$ sind beleuchtet: die vordere Stirnseite, die obere und die linke Seite, folglich kennt man die Selbstschattengrenzen eines jeden dieser Balken.

Fig. 183.



Vom Balken $c_1 c_2$ ist die Stirnseite links, die Ober- und die Vorderseite beleuchtet, also kennt man auch hier die Grenzen des Selbstschattens. Bei der Unterlage $a_1 a_2$, deren Vorderseite mit der Vorderseite der Wand W in einer Ebene liegt, wird die unterste Vorderkante keinen Schlagschatten werfen können, weil sie als eine Gerade inmitten der verticalen Ebene W angesehen werden muss.

Nachdem die Selbstschattengrenzen ermittelt sind, beginnt die Schlagschattenconstruction. Dabei ist es in der Regel empfe-

lenswert, mit denjenigen Objecten zu beginnen, welche der Lichtquelle näher liegen; in diesem Falle also mit dem Balken $c_1\, c_2$.

Da der Balken *c* auf die Balken *b* Schlagschatten wirft, so denke man sich die obere Ebene der Balken *b* als vollständig vorhanden, und ermittle den Schlagschatten von *c* auf derselben; schliesslich wird von demselben nur soviel benützt, als auf den Balken *b* liegt.

Die Balken *b* veranlassen auf der Unterlage *a* einen Schatten, welcher von der oberen Längenkante rechts herrührt, und mit diesen Kanten parallel läuft.

Der Balken *c* erzeugt auf der Oberseite der Unterlage *a* keinen Schatten.

Die Balken *b*, so wie die Unterlage *a* werfen auf die horizontale Ebene der Wand einen Schlagschatten, wie es die Figur zeigt.

Nun ermittelt man die Schatten, welche die Balken *b* und *c* sowol auf die verticale Wand werfen (1431, *c*), als auch jene, welche noch auf der Bildebene I entstehen (1431, *a*).

Für den Schlagschatten der oberen rückwärtigen Längenkante des Balken *c* auf der verticalen Wand *W*, gilt der Schnittpunkt $d_1\, d_2$ als Probepunkt (1431, *d*).

1440. Beispiel. In Fig. 183 wurde eine verticale Wand $A_1\, A_2$, welche mit einer geneigten Dachfläche $B_1\, B_2$, deren Firstlinie $a_1\, a_2$ ist, in Verbindung steht, dargestellt. Ferner wurde noch ein zweites niedrigeres Dach C_1 angenommen, dessen First durch $b_1\, b_2$ gegeben ist. (Im ersten Bilde wurde blos die eine Hälfte dieses Objectes gezeichnet; der Lernende wolle die zweite Hälfte selbst hinzuzeichnen). Zum Abschlusse der Dachflächen wurden Giebelmauern angewendet, welche die Dachflächen überragen. Die Vorderwand des Vorbaues *C* besitze in c_1 ihre erste Spur.

Um in der Zeichnung die Neigung der Dachfläche *B* ersichtlich zu machen, wurde die Ebene der Stirnseite *u* als dritte Bildebene gewählt. Denkt man sich auf diese Ebene *u* das gegebene Object orthogonal projiciert, und die Zeichnung über die Projectionsaxe $_1X_2$ dorthin, wo der bequemste Platz dazu vorhanden ist, aber so versetzt, dass alle ersten Ordinaten ungeändert bleiben, dann kann dieser sogenannte Querriss *u* in Verbindung mit dem Bilde in der Ebene I benützt werden, das zweite Bild des Gegenstandes darzustellen. Wenn man nach der

Richtung des Sehpfeiles III auf die Querrissebene u sieht, und den verticalen Schnitt durch $e_1 g_1$ betrachtet, so bemerkt man ein Stück des Daches B in der Geraden $e_3 d_3$; sodann die Firstlinie b in b_3; ferner eine verticale Gerade durch c_3 als Schnitt mit der durch c_1 gehenden Wand; weiters die Ansicht $g_3 h_3$ der inneren Seite des Gibelsaumes, und die Ansicht $h_3 i_3$ der durch h_1 gehenden verticalen Mauerkante $h i$. Die Neigung der Dachfläche C gegen den Horizont wurde gleich jener der Dachfläche B angenommen; also muss $f_1 d_1$, d. i. das erste Bild der Durchschnittsgeraden der Dachflächen B und C den rechten Winkel bei f_1 halbieren. Die übrige Darstellung ist nun leicht verständlich.

Um die Schlagschatten dieses Objectes darzustellen, kann man bezüglich der Annahme der Lichtrichtung zwei Wege einschlagen; entweder

a) man wählt die Projection der Lichtrichtung L beliebig, oder

b) man sagt, ein bestimmter Punkt des Gegenstandes solle seinen Schlagschatten auf einen bestimmten Punkt einer gegebenen beleuchteten Fläche werfen.

Wir wollen einmal diesen letzteren Weg wählen und in Fig. 183 annehmen, der Punkt $k_1 k_2 k_3$ erhalte seinen Schlagschatten auf der Dachfläche B in k_1'. Ist k'_2 mittelst einer Einser-Spurparallelen der Ebene B bestimmt, so ist $k_2 k'_2$ die zweite und $k_3 k'_3$ die dritte orthogonale Projection eines Lichtstrales, folglich kennt man die Richtung der parallelen Lichtstralen und kann nun die Selbstschattengrenzen beurteilen. Sind diese gefunden, so kann mit Hilfe des zweiten und dritten Bildes und mit Berücksichtigung von (1431) der Schlagschatten auf den Wand- und Dachflächen leicht construiert werden.

Bequem wird die Schattenermittelung, wenn man das erste Bild des Gegenstandes vollkommen ausfertigt und mit Benützung dieser Projection die Schatten construiert.

Der Lernende wolle auch die Schlagschatten an dem vervollständigten ersten Bilde darstellen, und auf Probepunkte nicht vergessen, welche aus der Zusammenwirkung aller drei Projectionen entstehen.

1441. Wie diese zwei Beispiele (1439, 1440) zeigen, finden wir unter den vorhandenen Bauwerken eine reiche Menge von Motiven, welche einesteils durch ihre bildliche Darstellung, anderenteils durch die an ihnen vorzunehmenden Schatten-Constructionen die

mannigfachsten Gelegenheiten geben, die Lehren der darstellenden Geometrie anzuwenden und den Scharfsinn in dem Gebrauche der einfachsten Constructionsmittel zu üben. Noch mehr erhöht sich das Interesse der bildlichen Darstellung, wenn derlei Objecte in axometrischer, schiefer oder centraler Projection direct abgebildet werden. Der Lernende versuche es, leichtere Gegenstände mittels eines Massstabes oder allenfalls durch Abschätzung der Dimensionen aufzunehmen und im verkleinerten Masse bildlich darzustellen, um sich so für den praktischen Zweck der darstellenden Geometrie einzuschulen.

Construction der Schlagschatten von gekrümmten Flächen auf Ebenen oder krummen Flächen.

§. 71.

1442. Welche Mittel werden anzuwenden sein, um den Schlagschatten einer Linie auf einer krummen Fläche zu construieren?

a) Das allgemeine Mittel, welches immer dann angewendet wird, wenn sich kein besonderes einfacheres darbietet, besteht darin, durch die Punkte der Schatten werfenden Linie Schattenstralen zu ziehen, und mittels Decklinien die Schnittpunkte dieser Stralen mit den beleuchteten Flächen aufzusuchen (1009).

b) Besteht eine Fläche aus geraden Linien und ist die Schlagschatten werfende Linie r eine ebene Linie, so sucht man von den erwähnten geraden Linien die Schlaglichter auf der Ebene r (1432); schneiden diese die Linie r, so gehen durch die Schnittpunkte die Schattenstralen, welche die auf der krummen Fläche angenommenen Geraden in den gesuchten Schlagschattenpunkten durchschneiden.

c) Lassen sich von einer Reihe von geraden oder krummen Linien einer Fläche F die Schlagschatten oder Schlaglichter auf einer Ebene u bequem bestimmen, so wird man auf der Ebene u auch das Schlaggebilde der Schatten werfenden Linie construieren und nach (1434) die Schlagschatten auf den krummen Linien der Fläche ermitteln. (Dieser Fall enthält auch *b*) in sich.)

1443. Was kann man von den Schlagschatten zweier beleuchteten und sich schneidenden Linienelemente behaupten, wenn die durch diese zwei Linienelemente

bestimmte Ebene zur Richtung des Lichtes parallel ist, oder überhaupt durch die Lichtquelle L geht?

Fallen ihre Schlagschatten auf eine Ebene, so liegen sie in einer und derselben geraden Linie; fallen sie aber auf eine krumme Fläche, so bilden sie die Elemente einer stetig gekrümmten Linie. Die Richtigkeit dieses Satzes ist leicht einzusehen, sobald man sich die genannten Dinge vorstellt.

1444. **Wozu wird dieser Satz gebraucht?**

Wenn eine Schlagschatten werfende Linie in irgend einem Punkte eine Spitze oder ein Eck besitzt, so ist der Schlagschatten dieses Eckes nur dann wieder ein Eck, wenn die Ebene, welche durch die in jener Ecke zusammentreffenden zwei Linienelemente bestimmt ist, nicht durch die Lichtquelle geht. Geht sie aber durch die Lichtquelle, so ist der Schlagschatten des Eckes kein Eck im Schlagschatten der Linie, es mag der Schlagschatten auf eine ebene oder auf eine gekrümmte Fläche fallen.

1445. **Beispiel. Es ist der Schlagschatten zu construieren, welchen der Fig. 177 dargestellte Kegel auf den Cylinder wirft.**

Der Cylinder besteht aus geraden Linien, deren Schatten sich bequem auf der Bildebene I construieren lassen. Man suche daher auch den Schlagschatten $S_1 B'$ der Schatten werfenden Linie SB auf der Bildebene I und ziehe durch den Punkt i'', in welchem sich dieser Schatten mit dem eines Cylinderstrales durch e_1 schneidet, den Schattenstral, welcher die Cylindergerade durch e_1 in i' trifft, welcher Punkt sofort der Schlagschatten der Geraden SB auf jener Geraden ist. Bestimmt man auf diese Art eine genügende Anzahl von Schlagschattenpunkten, so lassen sich dieselben durch eine Linie zur Grenze des Schlagschattens verbinden, welchen der Kegel auf den Cylinder wirft.

1446. **Zu welcher besonderen Bemerkung gibt der Schlagschatten der Kegelfläche noch Veranlassung?**

Die Schlagschatten der Eckpunkte B und C, in welchen die geradlinigen Selbstschattengrenzen die Basislinie schneiden, bilden keine Ecken im Schlagschatten des Kegels. Denn die Ebene, welche den Kegel z. B. in C berührt, enthält sowol ein Linienelement von SC als auch vom Kreise; und weil diese Ebene zur Richtung des Lichtes parallel ist, so folgt hieraus die ausgesprochene Behauptung (1446). Es muss daher in Fig. 177

C'' ein Punkt sein, in welchem der geradlinige Kegelschatten den krummlinigen tangiert.

1447. **Wie ermittelt man den Schlagschatten des Kegelrandes CDB ins Innere der Kegelfläche?**

Ist $D'_1 S_1$ das erste Bild eines Strales der Kegelfläche, auf welchen ein Schlagschattenpunkt fällt, so ist nur das Schlaglicht dieses Strales auf der Basisebene des Kegels zu suchen. Wäre der Schnitt des durch S gehenden Lichtstrales mit der Basisebene bekannt, so wäre dieser Punkt den Schlaglichtern aller Kegelstralen gemeinsam; da aber dieser Punkt nicht bekannt, so bestimme man zunächst das Schlaglicht der Spitze auf der zur Basis parallelen Hilfsebene in $a_2 a_1$; alsdann ist $D''_1 a_1$ das Schlaglicht des Strales $D' S$ auf der Hilfsbasisebene. Zieht man nun $D'_1 D_1$ parallel zu $D''_1 a_1$, so ist $D'_1 D_1$ das gesuchte Schlaglicht von SD', folglich ist D_1 das Bild jenes Punktes im Rande der Kegelbasis, welcher seinen Schlagschatten auf SD wirft. Wird nun durch D_1 eine Parallele zu L_1 gezogen, so ergibt sich in δ_1 das Bild des Schlagschattens von D auf das Innere der Kegelfläche.

Nach (1376) ist die Grenze des Schlagschattens eine Linie der II. Ordnung.

1448. **Beispiel. Man soll die Schlagschatten an den in Fig. 178 dargestellten Gebilden construieren.**

Die Schlaglichter (1432) der Stralen von der cylindrischen Höhlung, aus welcher die Rinne hervorragt, sind zu den Schlagschatten der Rinnenstralen, also die zweiten Bilder der Schlaglichter zu $a_2 B_2$ parallel. Zieht man sonach durch i_2 eine Parallele zu $a_2 B_2$, bis der Rand des Cylinders in i'_2 getroffen wird, und zeichnet durch i'_2 eine Parallele zu L_2, so ergibt sich ein Punkt des Schlagschattenbildes in J_2.

1449. Ermittelt man den Schlagschatten der Rinne auf die Wand, so kann im Schlagschatten des Punktes d kein Eck, also auch im Bilde in D_2 kein Eck enstehen (1444).

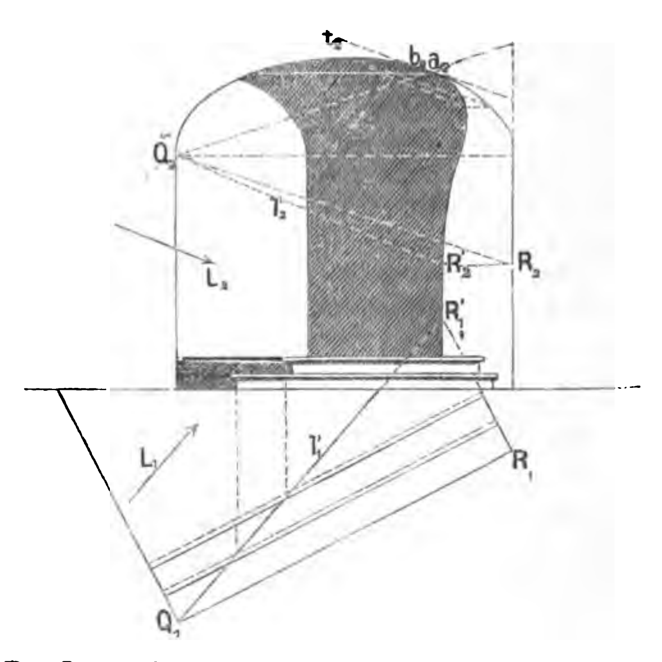
Der Lernende wolle auch in der Bildebene I den Schlagschatten in das Innere der Rinne construieren.

1450. **Beispiel.** In Fig. 179 kann man die Schnitte der vom unteren Rande des oberen Cylinders gezogenen Schattenstralen mit der unteren Cylinderfläche direct construieren, ohne zu Schlaglichtern seine Zuflucht nehmen zu müssen. Von beson-

deren Punkten sind nur jene in der Contour und jene in der Selbstschattengrenze des unteren Cylinders hervorzuheben.

1451. Der Schlagschatten auf den Bildebenen ist eine Zusammensetzung aus einem Stück Kreisbogen $c''d'$ als Schlagschatten des unteren Cylinderrandes, aus den Schlagschatten der geradlinigen Selbstschattengrenzen beider Cylinder und aus dem Schlagschatten des oberen Kreisrandes vom oberen Cylinder.

Fig. 184.



Der Lernende construiere den Schlagschatten auf der Bildebene vollständig, und suche in dem Punkte, in welchem der Schatten des Kreises die Bildaxe schneidet, (in Fig. 179 nicht mehr dargestellt), an diesen Schatten in beiden Bildebenen die Tangente. Dabei ist (1431, *d*) zu beachten.

1452. **Beispiel.** In Fig. 184 ist ein cylindrisch gewölbter Durchgang in schräger Stellung gegen die Bildebene II mit zwei Stufen dargestellt. Die Form des Unterbogens ist elliptisch; die Pfeilhöhe ungefähr ein Viertel der Spannweite. Die Länge des Durchganges wurde so angenommen, dass man im zweiten Bilde noch das Ende desselben teilweise sieht. (Wegen Ersparung an

Raum wurde der Grundriss nicht vollständig dargestellt.) Die Richtung des Lichtes wird durch $L_1 L_2$ gegeben.

Um die Selbstschattengrenze zu finden, halte man sich an die in (1067, *b*) gelehrte Construction einer zu der Lichtrichtung parallelen Tangentenebene des Cylinders. Zieht man dann eine Tangente t_2 parallel zu $Q_2 R_2$ an das Bild der Ellipse, so finden wir a_2 als Bild des Berührungspunktes; mithin ist der durch *a* gezogene Cylinderstral die Selbstschattengrenze des Cylinders. Vom Cylinderrand gehört der Bogen von *a* bis *Q* ($a_2 Q_2$ ist dessen Bild) zur Selbstschattengrenze, welche sich von *Q* längs der verticalen Mauerkante bis zum Boden fortsetzt.

Die Schlagschattenbestimmung auf der inneren verticalen Wand, auf den Stiegenstufen, sowie auf der inneren Gewölbsfläche bietet nach dem Vorgekommenen keinerlei Schwierigkeiten mehr, bedarf daher keiner weiteren Erläuterung. Nur sei noch bemerkt, dass der Berührungspunkt a_2, nachdem die Ellipsentangente schon gezogen war, nach (445) construiert wurde.

1453. Man soll untersuchen, ob die Tangente t_2 (Fig. 184) das Bild der Schlagschattencurve berührt?

Bezeichnen wir das in *a* sich anschliessende Linienelement des Schatten werfenden Bogens mit *ab*, so fällt von *b* der Schlagschatten schon auf einen gewissen Punkt *b'* der inneren Cylinderfläche, wobei *ab'* ebenfalls eine unendlich kurze Strecke sein wird. Da aber die äussere Wandebene auf der Cylinderfläche senkrecht steht, so folgt, dass das Linienelement *ab'* mit dem Elemente *ab* irgend einen messbaren Winkel einschliessen muss, woraus sich weiter ergibt, dass die Tangente in *a* an die Schlagschattencurve eine andere ist, als die Tangente in *a* an die Basislinie des Cylinders. Weil ferner die Ebene beider Tangenten nicht auf der Bildebene II senkrecht steht, so können auch im zweiten Bilde die beiden Tangenten in a_2 nicht in eine Gerade zusammfallen. (Man sehe übrigens 1376.)

1454. Beispiel. Ein für den Lernenden schon schwierigeres Beispiel von Schattenbestimmungen ist in Fig. 185 gegeben. Daselbst steigt ein verticales Rohr *A* (z. B. ein Gasrohr) aus einer horizontalen Ebene empor, biegt sich oben im Halbkreise als Rotationsfläche (Ringfläche) *B* um, steigt in *C* vertical abwärts, beschreibt in *D* neuerdings eine Ringfläche, geht dann in eine verticale Lage *E* über, und wird durch einen Deckel *F* geschlossen. An das Rohr *E* setzt sich ein horizontales mit *E*

gleich weites Rohr *G* an, um von hier die Leitung irgendwie weiter zu führen. Die parallelen Axen der Cylinder *A*, *C* und *E* liegen in einer verticalen Ebene *u*, welche gegen die Bildebene II eine gegebene oder eine angenommene Neigung besitzt. Die Richtung des Lichtes ist wieder durch $L_1 L_2$ gegeben. Man soll die Flächen darstellen und die Schatten construieren.



Fig. 185.

Auflösung. Wenn die Längen der Röhren und der mittlere Radius der Ringfläche durch Maße angegeben sind, so kann man sich die beiläufige Höhe und Breite des Grund- und Aufrisses (d. h. des ersten und zweiten Bildes) berechnen, um so den Raum in Erfahrung zu bringen, welchen die Zeichnung auf dem

gegebenen Zeichnungsblatte annäherungsweise einnehmen wird. Rechnet man noch dazu, dass auch der Schlagschatten auf beiden Bildebenen noch durch Zeichnung dargestellt werden soll, und skizziert man den Maßen und der Stellung ungefähr entsprechend den Schnitt der Axenebene u mit der äussersten Fläche (gerade Linien und Kreise), so vermag man dann auch die ungefähre Breite des Schattens, welcher ausserhalb des Objectbildes fallen wird, anzugeben. Sind diese Umstände ermittelt, so vermag man dann zu beurteilen, wo die Projectionsaxe und wo die drei verticalen Cylinderaxen anzunehmen sind, auf dass die Gesammtzeichnung den mittleren Teil jenes Raumes einnimmt, der ihr zugewiesen ist. Eine derartige Calculation soll der Zeichnende immer vornehmen, damit er im vorhinein die Ueberzeugung gewinnt, es werde die Zeichnung an die richtige Stelle seines Blattes kommen.

Die Darstellung der drei Cylinder A, C und E ergibt sich ohne Mühe. Die Ringflächen B und D wird man mit Rücksicht auf die vorzunehmenden Schattenconstructionen durch eine grössere Anzahl von Parallelkreisen bestimmen, deren Bilder im Grundrisse als gerade Linien erscheinen. Will man sich aber diese Mühe ersparen, so lege man durch oder parallel mit $\mathring{u}_1$ eine Bildebene III senkrecht zur Bildebene I und wähle den Sehpfeil III, wie es die Figur zeigt. Ermittelt man das dritte Bild der Fläche, dessen Contouren nur aus geraden Linien und Kreisen bestehen und sucht in der dritten und ersten Projectionsebene die Bilder jener Linie, längs welcher ein Cylinder, dessen Stralen auf der Bildebene II senkrecht stehen, das ganze Flächengebilde berührt, so ist diese Linie die zweite Contour der Fläche. Construiert man der Linie zweites Bild, so ist die in Fig. 185 dargestellte Contour des zweiten Bildes der Röhrenleitung gefunden. (In Fig. 185 wurden überdies noch die beiden verticalen Querschnitte der Ringflächen angegeben.)

Die Durchdringung des Cylinders E mit G gibt zwei Halbellipsen, die im zweiten Bilde zusammen eine herzförmige Gestalt annehmen.

Nach dieser Darstellung sucht man das dritte Bild L_3 der Lichtrichtung L und sucht die dritten und ersten Bilder der Selbstschattengrenzen, aus welchen sich das zweite Bild finden lässt. Bezüglich der Ringfläche beachtet man den bei Fig. 180 eingehaltenen Vorgang. Da wir aus jener Figur schon wissen, dass mög-

licherweise bei der inneren Selbstschattengrenze der Ringfläche Uebergangspunkte vorkommen können, so suchen wir gleich die Schnitte jener Schattenstralen, welche von a angefangen (an der Rotationsfläche nach aufwärts gehend) die Rotationsfläche berühren, mit der Cylinderfläche A und sodann (weiter oben) mit der Ringfläche B. Die Schnittcurve (wenn sich eine ergibt), ist der Schlagschatten, welchen das Flächengebilde auf sich selbst wirft. Trifft die Schlagschattengrenze in irgend einem Punkte b (im zweiten Bilde in b_2) mit der Selbstschattengrenze zusammen, so ist b ein Selbstschatten-Uebergangspunkt. (In Fig. 185 wurde noch das zweite Bild der Selbstschattengrenze gezeichnet, welches sich innerhalb des Schlagschattens fortsetzt, und durch eine dunklere Schraffierung der Schlagschatten ersichtlich gemacht.)

Auf eine ähnliche Art verfährt man bei der Selbst- und Schlagschattenbestimmung an der unteren Ringfläche D, woselbst sich gleichfalls ein Uebergangspunkt c (1427) ergibt.

Die Cylinderfläche E wirft Schlagschatten auf die Rotationsfläche D (welcher im ersten Bilde sich als eine zu L_1 parallele Gerade ergibt), und auf die Cylinderfläche C (endend im zweiten Bilde in d''_2). Von d'' angefangen erhält man auf dem Cylinder C ein Stück Schlagschatten vom unteren Kreisrand des Deckels F. An diesen schliesst sich, ohne ein Eck zu bilden (1444), der Schlagschatten der geradlinigen Selbstschattengrenze des Deckels F und geht abermals ohne ein Eck zu bilden, in den Schlagschatten des oberen Kreisrandes über, welcher Schatten teilweise auf die Ringfläche fällt.

Die Durchschnitte der verschiedenen Schattenstralen mit den Rotationsflächen wird man am schnellsten mittels Einser-Decklinien aus dem ersten und dritten Bilde ermitteln.

Der Schlagschatten des Cylinderdeckels F auf den Cylinder E wird wie bei Fig. 179 bestimmt.

Die Schlagschatten auf den Bildebenen entstehen durch die Schnitte der von den Selbstschatten herstammenden Schattenstralen mit den Bildebenen. Dabei kommt der Schatten von f'' über g'' bis h'' von der auf der äusseren Seite der Ringfläche B, sowie zum Teil von der auf der Cylinderfläche C liegenden Selbstschattengrenze her, und schliesst sich in h'' über i'' fort der Schlagschatten vom oberen Kreisrande des Deckels F an. Bei k' sieht man in der Bildebene I den Schlagschatten der unteren geradlinigen Selbstschattengrenze des Cylinders G, an welchen Schatten

sich jener von der Aussenseite der Rotationsfläche D hergelangende anschliesst.

1455. Gibt es auch eine Methode, den Schlagschatten einer Fläche vorher, und aus diesem erst die Selbstschattengrenze der Fläche zu construieren?

Die Methode ist folgende: Man sucht von einer Reihe auf der Fläche F dargestellten Linien a, b, c ... die Schlagschatten a', b', c' ... auf einer Ebene E gerade so, als ob die Linien a, b, c ... frei für sich im Raume lägen. An diese Schlagschatten zieht man eine umhüllende Linie, welche offenbar die Grenze des Schlagschattens ist, welchen die Fläche F auf die Ebene u wirft. (Denkt man sich die Richtung des Lichtstrales als eine auf die Ebene E schief projicierende Richtung, so ist die Grenze des Schlagschattens die Contour des Bildes, welches durch schiefes Projicieren auf der Ebene E entsteht.)

Zieht man durch die Berührungspunkte der Umhüllungslinie mit den Linien a', b', c' ... die Schattenstralen, bis sie die Raumlinien a, b, c treffen, so sind die so gefundenen Punkte, der Selbstschattengrenze angehörend.

Es mögen die Schlag- und Selbstschatten der in Fig. 156 dargestellten Rotationsfläche nach dieser Methode construiert werden.

1456. Auf welche Art kann man den Schlagschatten einer Fläche F auf einer Fläche F' bestimmen, ohne vorher die Selbstschattengrenze der Fläche F zu ermitteln?

Man bestimme den Schlagschatten f der Fläche F auf eine geeignete Ebene E (z. B. auf eine Bildebene) nach (1455). Die Fläche F' wird eine Reihe von Linien enthalten, welche die Gestalt der Fläche bestimmen (z. B. Stralen bei Stralenflächen, Form- oder Seitenlinien bei projectivischen Flächen). Denkt man sich eine solche Linie R' frei im Raume, so kann man von ihr den Schlagschatten r' auf der Ebene E construieren. Die Grenzen des Schlagschattens f werden r' in Punkten schneiden. Ist m ein solcher Punkt, so geht durch m' ein Schattenstral, welcher von einem unbekannten Punkte der Selbstschattengrenze der Fläche F herrührt und die Linie R' der Fläche F' in einem Punkte M' schneiden muss, welcher der Grenze des Schlagschattens von der Fläche F auf der Fläche F' angehört, sobald man erkennt, dass M' ein Punkt auf der beleuchteten Seite von F'

ist. Mit Hilfe des Schattenstrales durch m' findet man auch einen Punkt M der Selbstschattengrenze von F.

Als Beispiel wähle man zwei Rotationsflächen mit verticalen Axen.

1457. Zur Uebung in der Darstellung gegebener Gebilde und der Schattenbestimmungen eignen sich mehrere der in den früheren Abschnitten vorgekommenen Gebilde; insbesonders sind aber dem Anfänger die Anfertigungen von Detail-Zeichnungen verschiedener Objecte zu empfehlen. Weil nicht selten der Lernende fragt, welche Gegenstände für constructive Uebungen geeignet sind, so sei im Nachfolgenden auf einige hingewiesen, die entweder selbst wegen ihrer einfachen Formen für Darstellungen in orthogonalen, schiefen oder perspectivischen Projectionen geeignet sind, oder welche für die Construction lehrreiche Details enthalten.

Diese Gegenstände sind: Ziegel- oder Quadersteinmauern mit Schmatzen, die verschiedenen Holzverbindungen, Dachstüle Decken, Bohlenbögen, Dachflächen mit Schornsteinen, Wetterfahnen und Blitzableitern, Gesimsglieder, einfache und verkröpfte Gesimse, Gesimse mit Consolen, Postamente, Säulenfüsse, Kapitäle, cannelierte Säulen, gothische Pfeiler, gothische Bögen und gothisches Masswerk, Denksäulen, Grabmale, öffentliche Brunnen, Arcaden, Portale, Hallen, Stiegen zu Altanen, Pavillons, Kanzeln, Erker, Thürmchen, Kapellen, Gartenhäuser, Block- und Schweizerhäuser; ferner hölzerne, steinerne und eiserne Brücken, Durchlässe, Viaducte; Gegenstände des Hausbedarfes: wie Lampen, Pulte, offene Schränke u. s. w.; Geräthschaften für gewerbliche Verrichtungen; Instrumente, sowie viele einfache und complicirte Mechanismen, Gestelle und Maschinen, als: Zahnräder, Trillinge, Schwungräder, Wasserräder, Zapfenlager, Wagengestelle, Haspel, Krahne, Göpel u. s. f.

Die genannten Objecte oder ihre Einzelnheiten sind wo möglich nach der Natur aufzunehmen, wobei man sich bei dem Skizzieren teils der orthogonalen, teils der schiefen Projectionen bedienen kann.

Schlagschattenbestimmung bei Anwendung der übrigen Projectionsarten.

§. 72.

1458. **Welchen Weg muss man bei der Schlagschattenbestimmung einhalten, wenn gegebene, durch parallele Lichtstralen beleuchtete Objecte in axonometrischer, schiefer oder centraler Projection abgebildet werden?**

Man muss die Richtung des Lichtstrales durch alle jene Projectionen bestimmen, durch welche das Object angegeben wird, und in diesen Projectionen alle jene bei den orthogonalen Abbildungen erläuterten Operationen durchführen, welche Behufs der Schattenbestimmung durchzunehmen sind. Namentlich wird man aber (1431) berücksichtigen.

1459. Bei der axonometrischen Projection wird man α) die Lichtrichtung orthogonal auf die verticale Bildebene II, β) orthogonal auf die als Grundrissebene zur Bildebene II geneigte Ebene Z (855), und γ) diese Projection wieder orthogonal auf die Bildebene II projicieren.

1460. Bei der schiefen Projection treten zwei Fälle ein. α) Entweder werden die Objecte durch zwei schief zugeordnete Projectionen gegeben (nämlich einmal schief und einmal orthogonal auf die Zeichnungsebene projiciert); oder β) man stellt von den Objecten und von deren orthogonaler Projection auf einer horizontalen Grundrissebene die schiefen Projectionen auf einer verticalen Bildebene dar. Die Richtung der Lichtstralen ist in beiden Fällen durch die erwähnten Projectionen darzustellen.

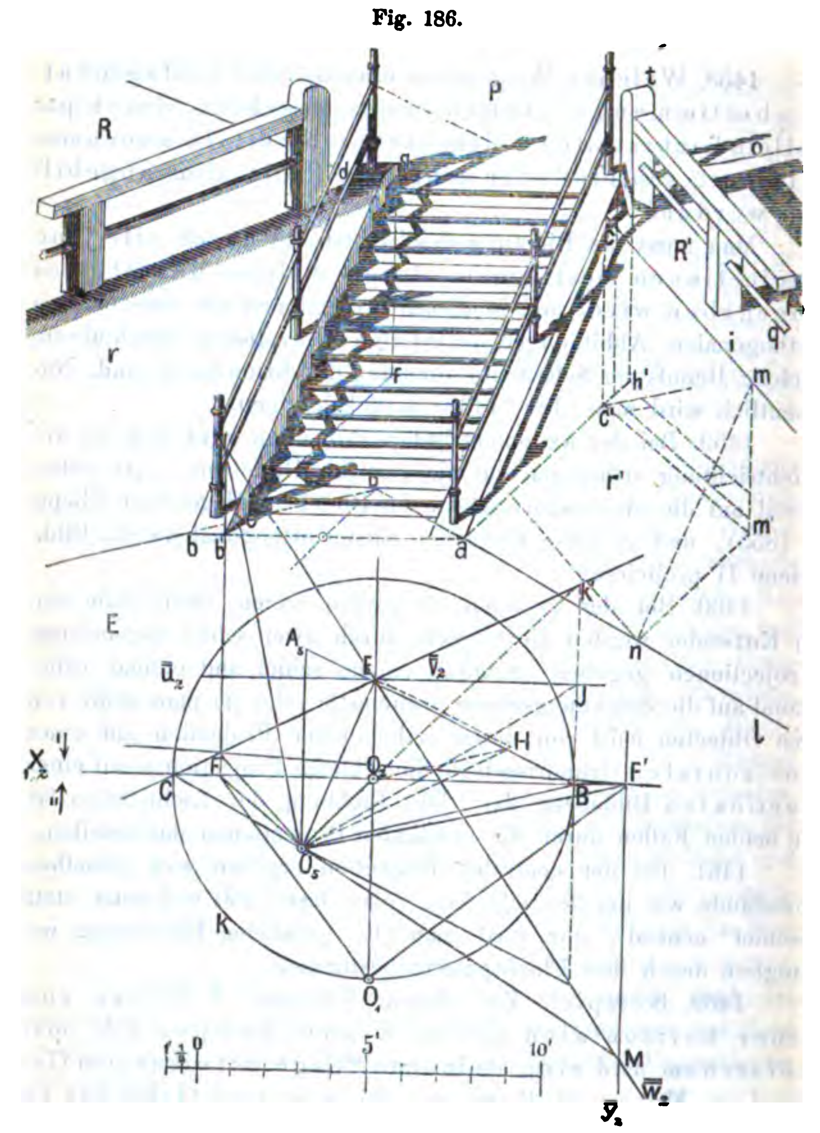
1461. Bei der centralen Projection ergeben sich dieselben Umstände wie bei der schiefen, (man lese 1460 und setze statt „schief" central), nur wird man die parallelen Richtungen wo möglich durch ihre Fluchtpunkte bestimmen.

1462. **Beispiel. Zu einem Plateau P führen von einer horizontalen Ebene E zwei Rampen RR' mit hölzernem und eine steinerne Stiege mit eisernem Geländer. Man soll Rampen, Treppe und Geländer in schiefer Projection darstellen und die vorkommenden Schatten construieren.**

Angaben: 1. Die Plateauebene P liege 6 Fuss höher als die Ebene E. 2. Die geraden Durchschnitte der beiden ebenen

Rampenböschungen *r* und *r'* mit der Ebene *E* stehen aufeinander senkrecht. 3. Die verticale Mittenebene der Stiege halbiere

Fig. 186.



diesen rechten Winkel. 4. Die Treppe sei 6 Fuss breit, jede Wangenmauer 1 Fuss dick. 5. Die Treppe enthalte 12 Stufen von je 1 Fuss Breite, ½ Fuss Höhe. 6. Die Wangenmauer über-

rage auf der inneren Seite in verticaler Richtung jede Stufe um ½ Fuss. 7. Ueber der obersten Stufe in einer Höhe von ½ Fuss enden die Wangenmauern in einer horizontalen Ebene, auf welche zwei eiserne Geländersäulchen zu setzen sind. 8. Jede Rampenböschung gehe durch die ihr zugewendete obere Kante der Wangenmauer. 9. Die am Fusse von der Wangenmauer an gemessene Länge jeder Böschung betrage 60 Fuss. 10. Der Schnitt der Rampe mit dem Plateau stehe auf der geneigten oberen Kante der Böschung senkrecht. 11. Das eiserne Geländer enthalte auf jeder Seite drei Geländersäulchen von ⅓ Fuss Durchmesser. 12. Die geraden Anhaltstangen seien in verticaler Richtung 2½ Fuss über der Wangenmauer. 13. Das hölzerne Geländer ist ½ Fuss von der Böschungskante entfernt. 14. Je zwei Geländersäulen, im Querschnitte quadratisch, zur Seite ¾ Fuss, seien 16 Fuss von einander entfernt. 15. Der Geländerholm, von denselben Dimensionen wie die Geländersäule, werde durch eine Zwischensäule unterstützt. 16. Unterhalb des Geländerholms, 1½ Fuss in verticaler Richtung entfernt, läuft ein schwächerer Geländerriegel.

1463. Anordnung. Als Hauptobject der Darstellung betrachte man die Stiege und stelle dieselbe so auf, dass die Wangenmauern auf der Zeichnungsebene II senkrecht stehen. Den Modulus der schiefen Projection (868, 2) wähle man = ½; denn für den Modulus = 1 (876) würde die Stiege zu lang gestreckt erscheinen. Die schiefe Ordinale $O_2 O_5$ (872) sei unter 45° zur horizontalen Axe ${}_1x_2$ geneigt.

1464. Construction des Bildes. In Fig. 186 ist O_2 der Augpunkt, O_5 der Nebenpunkt (881) und k der Distanzkreis; B und C sind zwei Distanzpunkte, folglich sind O_5B und O_5C die Richtungen der Fusslinien der beiden Böschungen r und r'. Nun wähle man den Durchschnittspunkt der beiden Fusslinien in D und ziehe zu O_5B und O_5C Parallelen, so ist das schiefe Bild vom Fusse einer jeden Böschung gefunden 2). Zieht man ab parallel zu ${}_1x_2$ und von einer Länge = 4 Fuss 4), so gehen durch a und b die den Böschungen zugewendeten Kanten der Wangenmauern, deren Dicke 1 Fuss von a und b aus auf ab aufgetragen wird. Die Steigung der Stiege (Höhe durch die Anlage) ist = ½ nach 1) und 5). Macht man also O_2E = der halben Distanz, so ist O_5E die Richtung der schiefen Wangenmauerkanten, folglich können ac, bd u. s. w. gezogen werden. Auf der innere

Seite von $b\,d$ trägt man in verticaler Richtung von d nach abwärts $\frac{1}{2}$ Fuss, 6) und zieht eine Parallele zu $b\,d$, so liegen in derselben die Eckpunkte der Stufen. Construiert man die unterste Stufe von $\frac{1}{2}$ Fuss Höhe, so ergibt sich ein Punkt e, von wo in einer zu $O_1 O_2$ parallelen Geraden $b'f$ die Stufenbreiten (1 Fuss, mal dem Modulus $\frac{1}{2}$) aufgetragen werden. Errichtet man im Endpunkte dieser Geraden eine Verticale fg von 6 Fuss Höhe, 1), und trägt 12mal die Stufenhöhe auf, so können die Schnittlinien der Stufen mit der Wangenmauer $b'd$, sowie die Bilder der Stufen gezeichnet werden. Auch lassen sich die Wangenmauern bei d und c jetzt zum Abschlusse bringen.

Projiciert man die äussere Kante einer Wange auf die Grundebene, so erhält man ah'. Lässt man die Rampenebene R' zwei Fuss weit herübergreifen, wodurch $h'c' = 2'$ mal Modulus $\frac{1}{2}$ zu setzen ist, so schneidet die Verticale durch c' die Wangenkante in jenem Punkte c, durch welchen die Krone i der Rampe R' zu ziehen ist. Könnte man die Länge $al = 60$ Fuss, 9), auf der Geraden $a\,l$ auftragen (891), so wäre nur l mit c zu verbinden und die Kante i wäre gefunden. Weil aber dies nicht angeht, so mache man $an =$ dem fünften Teile von al also $= 12'$ (891), ziehe $nm' \parallel ac'$, $nm \parallel ac$ und setze $nm = \frac{1}{5}\,ac$, so muss cm die gesuchte Gerade i, $c'm'$ ihre Horizontalprojection sein (selbstverständlich in schiefer Abbildung).

Wird nun $O_1 F$ parallel zu $c'm'$ gezogen, so ist $O_1\,F$ die wahre Richtung von $c'm'$, und wird $O_1 F' \perp O_1 F$ errichtet, so stellt $O_1 F'$ die Richtung des Schnittes der Rampenebene R' mit der horizontalen Plateauebene P im schiefen Bilde vor und kann deshalb $o \parallel O_1 F'$ gezogen werden.

Zieht man gleichfalls durch c' eine Parallele zu $O_1 F'$ und trägt $\frac{1}{2}$ Fuss, 13) plus $\frac{3}{2}$ Fuss, 14) auf dieser Parallelen nach (891) (mittels Anwendung eines Proportionalwinkels, $O_1 F'$ Radius, $O_1 F'$ Sehne) auf, so kann man durch diese Punkte zwei Parallele zu $c'm'$ ziehen, welche die Horizontal-Projectionen des Geländerholmes p sind. Es lassen sich nun nach 14) die Horizontal-Projectionen der Geländersäulen, sowie auch deren Bilder sammt dem Bilde des Holmes p und des Riegels q herstellen. Analog ist die Darstellung der Bilder des Geländers auf der Rampe R. Nach diesen Erläuterungen wird es dem denkenden Constructeur nicht mehr schwer fallen, auch die Bilder des Stiegengeländers zu finden.

1465. Schatten-Construction. Wir wählen die Richtung des Lichtes von links gegen rechts in einer unter 45° zur Bildebene II geneigten Verticalebene, unter 45° zur Bildebene I. Wird demnach die Verticale $O_1 A_1$ = der Distanz gesetzt, so ist $A_1 B$ die Richtung eines Lichtstrales in schiefer Projection und $O_1 B$ das schiefe Bild seiner orthogonalen Horizontal-Projection; mithin ist die Bedingung (1458 und 1460, β) erfüllt.

Aus der Richtung $O_1 B$ der Horizontal-Projection eines Lichtstrales erkennt man die durch b' gehende Wangenkante als eine Selbstschattengrenze. Um den Schlagschatten von dieser Kante auf der Grundebene zu finden, sucht man den Schatten von $O_1 E$, indem man $O_2 H \parallel O_1 B$ und $EH \parallel A_1 B$ zieht und H mit O_1 verbindet; zu $O_1 H$ geht dann durch b' eine Parallele bis an die erste Stufe. Sucht man den Schnitt von der Wangenkante b' mit der verticalen Stufenebene, so findet man den Schatten der Wangenkante b' auf dieser verticalen Ebene (1431, d). Gelangt dieser Schatten an die horizontale Ebene der ersten Stufe, so geht er auf dieser mit $O_1 H$ parallel bis an die zweite Stufe u. s. w.

1466. Um die Schlagschatten der eisernen Geländersäulen auf den schiefen Wangenebenen zu finden, ziehe man durch E die Gerade $\bar{\bar{u}}_2$ parallel zu ${}_1x_2$ (884), und suche den Schnitt $O_1 J$ der durch den Lichtstral $A_1 B$ gelegten Verticalebene mit $\bar{\bar{u}}$, dann darf man nur an die eisernen Cylindersäulen in der schiefen Wangenebene Tangenten zu $O_1 J$ parallel ziehen, um den Schlagschatten der Säule auf der schiefen Wangenebene zu erhalten. Durch die Berührungspunkte gehen die Selbstschattengrenzen dieser Geländersäulen.

1467. Der Schlagschatten der eisernen Geländersäulen auf den Stiegenstufen ragt über jenen der Wangenkante b' hinaus und ist an den Vorderseiten der Stufen vertical, auf den Horizontalebenen parallel zu $O_1 B$.

1468. Sucht man auf P den Schlagschatten jener Stelle, wo die mit bd parallele obere Laufstange in die oberste Geländersäule eingreift, so geht von dort der Schatten auf der Plateauebene mit $O_1 H$ parallel bis an die Kante der obersten Stufe. Zieht man durch jene Stelle eine Parallele zu bd, so ergeben sich alle Stellen, an welchen der Schatten der Anhaltstange die Kanten der Stufen treffen wird. An den verticalen Ebenen der Stufen sind die Schatten zu jenen der Wangenkante durch b' parallel.

1469. Um den Schlagschatten der Geländersäulen auf der Böschung r' zu finden, ziehe man zu ihr die Fluchtebene $\overline{\overline{v}}$ mit der Fluchtspur $\overline{\overline{v}}_2$, welche durch C und E geht. Der Schnitt der, durch die Verticale $A_1 O_1$ und den Lichtstral $A_1 B$ gelegten Ebene mit der Fluchtebene $\overline{\overline{v}}$, ist die Gerade $O_1 k'$ (zufällig mit dem schiefen Bilde der zur Bildebene II senkrechten Geraden $O O_2$ zusammenfallend), mithin gehen die Schlagschattengrenzen der Geländersäulen auf der Böschung r' mit $O_1 k'$ parallel.

1470. Die Schatten der Laufstangen auf r' sind zu den Laufstangen parallel. Sucht man den Schatten der Laufstange auf der Plateauebene P parallel zu $O_1 H$ (1468), und verbindet jene Punkte, wo o geschnitten wird, mit den in cm liegenden Punkten, so ergeben sich die Schatten der Laufstangen auf der Rampenebene R'.

1471. Dieser Schatten begegnet der hölzernen Gebäudesäule t. Um den Schatten an der verticalen, der nächsten Säule zugewendeten Ebene zu erhalten, sucht man sich die Fluchtspur $\overline{\overline{w}}_2$ der längs einer Geländerstange zum Lichtstral parallel gelegten Fluchtebene, indem man durch das Hilfsauge zu der Lichtrichtung eine Parallele zieht und ihren Schnitt mit der Bildebene sucht, und die Fluchtspur $\overline{\overline{y}}_2$ der zur Säulenebene t parallelen Ebene $\overline{\overline{y}}$. Zur Schnittgeraden $O_1 M$ läuft der gesuchte Schatten parallel.

1472. Die Schlagschatten der Geländerstangen auf der verticalen, der Stiege zugewendeten Säulenebene ergeben sich parallel zu der Durchschnittsgeraden $O_1 N$ der Fluchtebene $\overline{\overline{w}}$ mit der zur Säulenebene parallelen Fluchtebene.

Wie nun der Schlagschatten der hölzernen Geländer teils auf sich selbst, teils auf die Rampenebene zu bestimmen ist, soll dem Lernenden überlassen bleiben.

Aus dem eben durchgeführten Beispiele kann man entnehmen, wie die in §. 44 entwickelte Methode geeignet ist, Gegenstände direct in schiefer Projection abzubilden. Auf eine ähnliche Art verfährt man auch, um Objecte in der Perspective direct darzustellen, wobei die in den §§. 45 bis 49 vorgetragenen Lehren vollkommen ausreichen.

1473. Der Lernende, welcher im Stande war, das Beispiel in Fig. 186 durchzuarbeiten, möge die analogen Constructionen für die centrale Projection durchführen, unter folgender

Voraussetzung: 1. Die Wangenmauern sollen auf der Bildebene II (Central-Bildebene) senkrecht stehen, 2. die Central-

Bildebene gehe durch die Vorderfläche der ersten Stufe, 3. die durch den Augpunkt und das Auge gelegte Verticalebene sei eine Symmetrieebene der Treppe, 4. die Horizontsebene liege 8 Fuss über der Plateauebene, und 5. die Augdistanz betrage 30 Fuss.

Das perspectivische Bild wird in derselben Reihenfolge der einzelnen Abbildungen entstehen, wie das Bild bei der schiefen Projection entstand. Als Grundebene dient jene, in welcher von jeder Rampe der Fuss der Böschung liegt. Wegen der nicht unbedeutenden Distanz von 30 Fuss kann es vorkommen, dass für manche Strecken, Behufs des Auftragens bestimmter Längen, der Teilungs-Modulus $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ wird angewendet werden müssen (961). Wählt man die Richtung des parallelen Lichtes wie in Fig. 186, so wird der Fluchtpunkt der Lichtstralen 30 Fuss unterhalb des Horizontes und eben so weit rechts von der zur Bildebene senkrechten Verticalebene des Augpunktes liegen.

Sowie es bei der schiefen Projection notwendig war, den Grundriss wenigstens teilweise in schiefer Projection darzustellen, so ist es auch bei der centralen Projection angezeigt, den Grundriss (orthogonale Projection auf einer horizontalen Ebene) perspectivisch abzubilden.

1474. Würde man den Grundriss auf der Plateauebene bestimmen, und nebst dem perspectivischen Bilde des Objectes auch das vollständige Bild des Grundrisses darstellen, so wären diese beiden Bilder zwei zugeordnete orthogonale Projectionen eines Raumgebildes, welches eine räumliche Collinear-Projection der Stiege sammt Rampen (ein Relief) für ein Auge ist, welches um 8 Fuss näher an der Central-Bildebene liegt, als das Contrum für das ebene perspectivische Bild (993).

Construction der Dunkelheitsmasse an Ebenen. Aufgaben über das reguläre Dodekaeder und Ikosaeder.

§. 73.

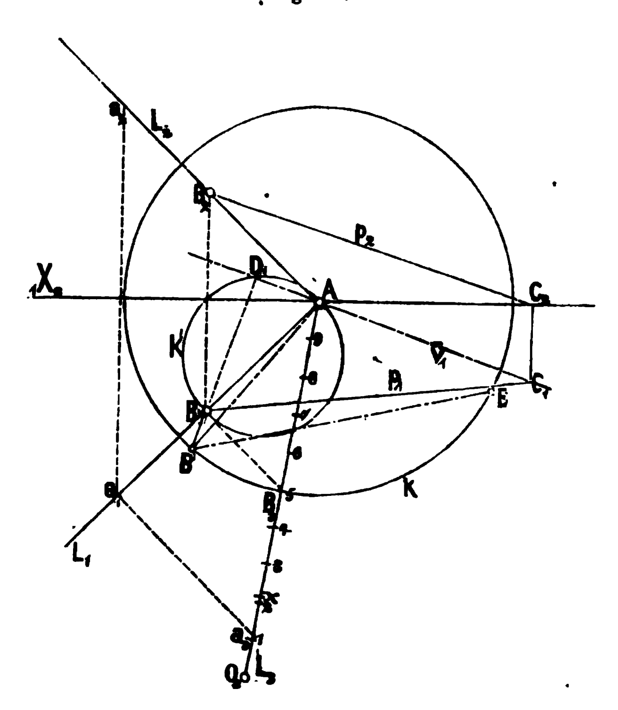
1475. **Wie construiert man den Grad der Dunkelheit einer direct beleuchteten Ebene u?**

a) Wenn wir die Einteilung der Töne wie in (1399) beibehalten, so ziehen wir durch einen beliebigen Punkt A der Axe ${}_1X_2$ einen Lichtstral $L_1 L_2$, legen durch eine orthogonale Projection, z. B. durch L_1, Fig. 187 eine verticale Bildebene III, ermitteln durch einen beliebig in $L_1 L_2$ angenommenen Punkt $a_1{}'a_2$ das dritte Bild L_3, tragen von A auf L_3 zehn beliebig lange, aber gleiche

Teile bis O_3 auf, bestimmen die Bilder des fünften Teilungspunktes B_3 und beschreiben aus A mit AB_3 einen Kreis k.

b) Ist nun irgend eine Ebene u gegeben, so kennt man entweder $\bar{u}_1 \bar{u}_2$ oder man kann mittels Spurparallelen die Richtungen von $\bar{u}_1 \bar{u}_2$ construieren. Setzen wir also die Richtungen von $\bar{u}_1 \bar{u}_2$ als bekannt voraus, so kann man von B eine Normale p auf die Ebene u fällen (705), und die erste Spur $\bar{v}_1$ jener Ebene v er-

Fig. 187.



mitteln, welche durch den Lichtstral AB und durch die Normale p, also senkrecht auf die Ebene u geführt wird. In Fig. 187 sollen $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ die orthogonalen Bilder der auf u gefällten Normalen p sein, mithin ist $A C_1$ die erste Spur der Normalenebene v.

c) Der von dem Lichtstrale BA mit der Normale BC gebildete Winkel α ist der Einfallswinkel des Lichtstrales für die Ebene u (1393), folglich ist sein Cosinus das Mass der Helligkeit und $1 - \cos \alpha$ das Mass der Dunkelheit der dem directen Lichte ausgesetzten Seite der Ebene u.

d) Um den Winkel α in wahrer Grösse zu finden, verfährt man nach (740), indem man $B_1 D_1$ senkrecht auf $\bar{v}_1$ fällt. Die Umlegung (oder Congruenz-Projection) B' des Punktes B muss von A ebensoweit entfernt sein, wie B im Raume von A, also muss B' im Kreise k liegen. Den Punkt D_1 findet man immer im Durchschnitte von $\bar{v}_1$ mit dem über AB_1 beschriebenen Kreise k' (350). Wird nun B' mit A und C_1 verbunden, so ist $AB'C_1$ der gesuchte Winkel α.

e) Würde AB die Längeneinheit sein, so wäre offenbar die halbe Sehne $B'E$ der Cosinus von α. Betrachtet man aber AO_2 als Einheit, so ist die ganze Sehne $B'E = \cos\alpha$. Wird nun $B'E$ von A gegen O_2 hin nach x aufgetragen, so ist $O_2 x$ das Mass der Dunkelheit der auf der Geraden BC senkrechten Ebene u.

f) Weil $O_3 x > 2$ aber $< 2\frac{1}{2}$, so wird man für u den Ton 2 wählen. Läge aber Ox zwischen $2\frac{1}{2}$ und 3, so würde man den Ton 3 für die direct beleuchtete Seite der Ebene u annehmen.

g) Die indirect beleuchtete Seite von u erhält den Ton $5 + \frac{1}{2} . 2$, d. i. 6 (1399) und fällt ein Schlagschatten auf u, so ist dessen Ton mit $15 - \frac{1}{2} . 2$, also mit 14 zu bezeichnen (1400).

Wie leicht einzusehen, ist es nicht nothwendig die Gerade $B'A$ zu ziehen.

1476. Denkt man sich den Kreis k mit der Sehne $B'E$ um v_1 gedreht, so beschreibt k eine Kugel, in welcher $B'E$ stets eine Sehne bleibt, also auch dann noch eine Sehne ist, wenn $B'E$ die Lage BC_1 einer Normale zu u angenommen hat. Aus dieser Wahrnehmung ergibt sich nun, wenn man bedenkt, dass B der hellste Punkt der Kugelfläche ist, der folgende Satz:

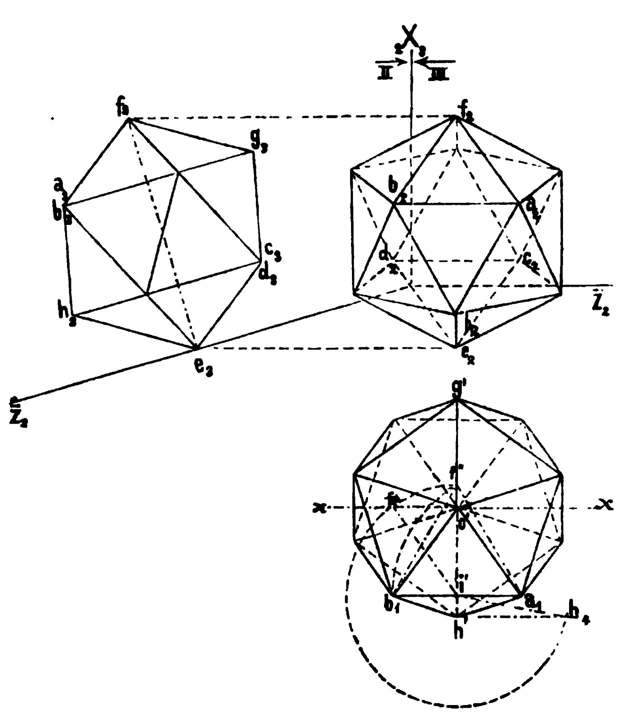
Zieht man vom hellsten Punkte B einer Kugelfläche eine Normale zu einer Ebene u, so ist die auf der Normale liegende Kugelsehne (146) das Mass der Helligkeit der Ebene u, wobei der Kugeldurchmesser als Mass der Dunkelheit einer zum Lichte parallelen Ebene angenommen wird.

1477. Aufgabe. *a*) Es ist das reguläre Ikosaeder in einer solchen Stellung orthogonal abzubilden, auf dass das zweite Bild einer Axe vertical, diese selbst aber nicht vertical werde. *b*) Für eine angenommene Richtung der parallelen Lichtstralen sollen die Töne der einzelnen Ebenen des Ikosaeders bestimmt werden.

Auflösung. *ad a*) Ein reguläres Ikosaeder ist bekanntlich jener Körper, welcher von 20 gleichseitigen Dreiecken umschlossen

wird, wobei immer in jeder der 12 Körperecken fünf Kanten zusammentreffen. Das reguläre Ikosaeder besitzt einen Mittelpunkt; je zwei Ecken, deren Verbindungsgerade durch das Centrum geht, sind einander gegenüberliegend. Um das Ikosaeder zu zeichnen, wird man eine Ebene $\mathfrak{Z}$ in Fig. 188 derart annehmen, wie die Ebene $\mathfrak{Z}$ in Fig. 109 bei der axonometrischen Projection, und wie dort gelehrt wurde, die zweite Congruenz - Projection der Ebene $\mathfrak{Z}$ sammt der in ihr liegenden orthogonalen Projection des Ikosaeders construieren.

Fig. 188.



Wenn die Länge der Ikosaederkante nicht gegeben ist, so beschreibe man in der Ebene $\mathfrak{Z}$ aus o' mit einem beliebigen Radius r einen Kreis und verzeichne in denselben ein reguläres Zehneck; es stellt dies die Contour eines orthogonalen Bildes vom Ikosaeder dar. Verbindet man fünf getrennt liegende Eckpunkte mit o' durch volle, die übrigen fünf durch gestrichelte Linien, ferner die ersteren fünf Punkte unter einander mit vollen, die andern fünf durch gestrichelte Linien zu zwei regulären Fünf-

ecken, so ist eine orthogonale Projection des Ikosaeders auf der Ebene $\mathfrak{Z}$ vollständig bestimmt.

In Fig. 188 wurde das Zehneck so angenommen, dass zwei Seiten der Fünfecke parallel zu $\bar{\mathfrak{Z}}_2$ werden, wodurch die Kanten ab und cd im zweiten Bilde in wahrer Länge erscheinen. Die Axe ef des Ikosaeders ist im Bilde der Ebene $\mathfrak{Z}$ ein Punkt o', in der Bildebene III eine Gerade e_3f_3 senkrecht zu $\mathring{\mathfrak{Z}}_3$ und im zweiten Bilde $\perp$ zu $\bar{\mathfrak{Z}}_2$. Liegt der Punkt e in der Ebene $\mathfrak{Z}$, so befindet sich e_3 in $\mathring{\mathfrak{Z}}_3$.

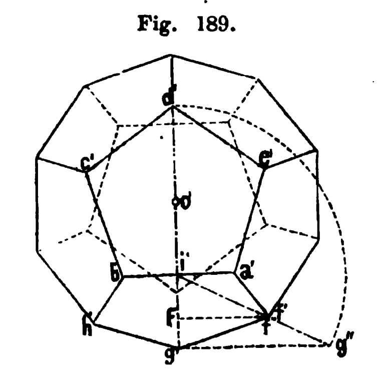
Die Endpunkte der von e oder von f ausgehenden fünf Kanten bilden die Eckpunkte regulärer Fünfecke, die zu der Ebene $\mathfrak{Z}$ parallel sind. Um im dritten Bilde die Nullseiten dieser Ebenen zu finden, denke man sich durch $g'h'$ eine Bildebene IV senkrecht zur Ebene $\mathfrak{Z}$ gelegt und zeichne die vierten Bilder in der durch ab zur Ebene $\mathfrak{Z}$ parallel gelegten Ebene. Zu diesem Behufe setzt man $a_1f'' = a_1b_1$ und nun kann man behaupten, in dem Raum-Dreiecke fab besitzt die von f auf ab gezogene Höhe die Länge $f''i'$, erhält aber im orthogonalen Bilde auf der Ebene $\mathfrak{Z}$ nur die Länge $o'i'$; hieraus construiert man nun (indem $o'f_4$ senkrecht zu $o'i'$ mit dem aus i' mit dem Radius $i'f''$ beschriebenen Kreise zum Durchschnitt gebracht wird) das vierte Bild von f, sowie auch jenes von h und weiss jetzt, dass die erwähnten Fünfecksebenen von den ihnen am nächsten liegenden Endpunkten der Axe ef um $o'f_4$ entfernt sind. Trägt man $o'f_4$ von e_3 und f_3 auf e_3f_3 auf und zieht zu $\mathring{\mathfrak{Z}}_3$ Parallele, so kann man auf bekannte Art das dritte und sodann das zweite Bild des Ikosaeders bestimmen. (Die Gerade xx lässt sich am bequemsten benützen, um die Abstände der dritten Bilder der Eckpunkte des Körpers von e_3f_3 anzugeben.)

ad b) Um die Töne der einzelnen Begrenzungsebenen des Ikosaeders zu finden, wird man von der Richtung eines Lichtstrales das zweite und dritte Bild angeben, das Centrum A der Hilfskugel in ${}_2X_3$ annehmen, und bezüglich der Bildebene II und III genau so verfahren, wie bezüglich der Bildebene I und II in (1475) geschehen ist. Die Auflösung bleibe dem Fleisse des Lernenden überlassen.

1478. Aufgabe. *a)* Es ist ein reguläres Dodekaeder orthogonal so darzustellen, dass keine Fünfecksebene zur Bildebene I parallel werde. *b)* Es sind die Dunkelheiten der Seitenebenen für eine angenommene Richtung der parallelen Lichtstralen zu messen.

Auflösung: *ad a*) Versetzt man ein reguläres Dodekaeder, welches, wie bekannt, aus zwölf regulären Fünfecken besteht, die sich zu zwanzig dreikantigen Ecken vereinigen, in eine solche Lage, dass zwei Fünfecksebenen zu einer Ebene *w* parallel werden, so erscheinen die orthogonalen Projectionen der genannten zwei Fünfecke (Fig. 189) gegeneinander genau in derselben Lage wie in Fig. 188 im vierten Bilde die dort besprochenen zwei Fünfecke. Man zeichne sich demnach zwei derartige Fünfecke, von welchen eines voll, das andere gestrichelt zu ziehen ist.

Fig. 189.



Nun sind aber von jedem Körperecke die drei Seitenwinkel bekannt, deren jeder ein Winkel eines regulären Fünfeckes ist, mithin kann man von jedem dreiseitigen Körperecke des Dodekaeders, dessen Scheitel ein Eckpunkt der abgebildeten Fünfecke ist, die dritte Kante nach (1183) abbilden, wodurch man das Dodekaeder in zwei zugeordneten orthogonalen Projectionen erhalten kann.

In Fig. 189 wurde durch den Mittelpunkt o' und durch a' eine Gerade $a'f'$ gezogen, in welche offenbar das orthogonale Bild einer Kante des Dodekaeders fällt. Der Punkt f liegt überdies in der durch e' auf $a'b'$ senkrecht gezogenen Geraden und selbstverständlich auch in jener, welche durch b' auf $a'e'$ senkrecht gezogen wird. Beschreibt man aus o' als Centrum einen durch f' gehenden Kreis, so liegen in ihm alle übrigen Eckpunkte g' h' ... der Contour vom orthogonalen Bilde des Dodekaeders, welches nun dargestellt werden kann.

Um die senkrechten Entfernungen der durch g und h zu $abcde$ parallel gelegten Ebenen zu finden, bedenke man, dass $i'g'$ die orthogonale Projection einer Geraden von der absoluten Länge $i'd'$ ist. Construiert man demnach aus i' g' als Kathete und $i'd'$ als Hypothenuse, ein rechtwinkeliges Dreieck $i'g'g''$, so ist $g'g''$ der senkrechte Abstand der durch g zur oberen Fünfecksebene parallel gelegten Ebene, in welcher ebenfalls fünf Eckpunkte des Dodekaeders liegen.

Indem nun $\sphericalangle g' i' g''$ das Mass der Neigung der Ebene *abhgf* gegen *abcde* ist, und $i' g''$ als Nullseite der ersteren Ebene erscheint, so ergibt sich in $f'' F$ die senkrechte Entfernung des Punktes f von der Ebene *abcde*, mithin kann man jetzt die zweite Abbildung des Dodekaeders in analoger Art durchführen, wie jene des Ikosaeders in Fig. 188. Der Lernende wolle diese Aufgabe, sowie die Ausmittelung der Dunkelheitsmasse selbst durchführen.

Kann man auf die Dodekaeder und Ikosaeder (1369, *b*) anwenden, und wenn, wie wird man die einfachen Flächen darstellen, welche die genannten Körper als Flächen-Combinationen liefern?

1479. Man soll die Dunkelheitsmaße der dem directen Lichte ausgesetzten Seite der Ebenen eines Ebenenbüschels bestimmen.

Man lege durch den hellsten Punkt B einer Kugel, deren Durchmesser $= 10$ das Mass der Dunkelheit der Selbstschattengrenze sein soll, eine Ebene w senkrecht auf die Axe a des Ebenenbüschels (820), und bestimme den Kreis w, in welchem die Ebene w die Kugel schneidet. Zieht man in diesem Kreise w vom hellsten Punkte B eine Sehne s, so muss s eine Normale zu irgend einer Ebene u des Ebenenbüschels sein und nun ist die Länge von s das Mass der Helligkeit (1476), folglich $10 - s$ das Mass der Dunkelheit der Ebene u.

Zieht man in dem Kreise w von B aus Sehnen, welche die Längen 1, 2, 3 ... 10 erhalten, (wenn w kein grösster Kugelkreis ist, so wird die grösste Sehne, nämlich der Durchmesser von w, stets kleiner als 10 sein), und führt auf diese Sehnen durch die Axe a des Ebenenbüschels senkrechte Ebenen, so erhalten diese auf der direct beleuchteten Seite beziehungsweise die Dunkelheiten 9, 8, 7 ... 0.

Die praktische Ausführung, die besprochenen Sehnen im Kreise w zu finden, bietet keine Schwierigkeiten, wenn das Centrum A der Kugel in der Projectionsaxe angenommen wird.

Construction der Tongrenzen an gekrümmten Flächen.

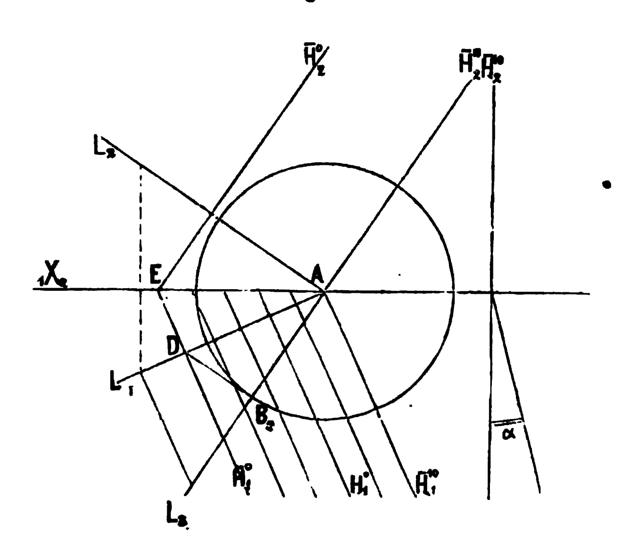
§. 74.

1408. Man soll das Mass der Dunkelheit einer Ebene u bestimmen, welche eine Kugel K in einem Punkte C berührt.

Es sei B der hellste Punkt, A das Centrum einer Kugel, mithin ist die Gerade AC eine Normale zu u.

Weil aber AB die Richtung der Lichtstralen, so ist BAC gleich dem Einfallswinkel α der Lichtstralen zur Ebene u. Wird nun aus C eine Senkrechte CD auf AB gefällt, so ist $AD = \cos \alpha$, wenn der Kugelradius als Einheit vorausgesetzt wird, folglich $BD = 1 - \cos \alpha$ das Mass der Dunkelheit der direct beleuchteten Seite der Ebene u.

Fig. 190.



1481. Legt man durch den Berührungspunkt C der Ebene u eine Ebene u' senkrecht auf den Lichtstral AB, so geht diese Ebene u' durch den schon erwähnten Punkt D und man erkennt folgende Wahrheit:

Jede zur Richtung des Lichtes senkrecht geführte Ebene u' schneidet die helle Seite einer Kugel in einem Kreise, dessen Punkte eine Dunkelheit besitzen, welche durch die senkrechte Entfernung der Ebene u' vom hellsten Punkt der Kugel gemessen wird.

Betrachtet man die vom Lichte auf der inneren Seite getroffene hohle Halbkugel, so gilt für sie ebenfalls der Satz, nur liegt jetzt der hellste Punkt dem vorerwähnten diametral entgegengesetzt.

1482. **Man soll die Tonlinien einer Kugelfläche bestimmen.**

Jede Ebene, welche auf der Richtung paralleler Lichtstralen senkrecht steht, soll eine **Hellebene** genannt werden. Teilen 10 Hellebenen den durch den hellsten Punkt einer Kugel gehenden Radius in zehn gleiche Teile, so haben nach (1481) die Schnittkreise vom hellsten Punkt angefangen die Dunkelheiten 0, 1, 2, ... bis 10. Teilen weitere vier Hellebenen den Radius, welcher zum hellsten Punkt der indirect beleuchteten Fläche geht, in fünf gleiche Teile, so entstehen von der Selbstschattengrenze angefangen Tonlinien mit den Dunkelheiten 10, 9, 8, 7, 6, 5 (1400). Da man nun die Schnitte von Ebenen mit einer Kugelfläche abbilden kann, so lassen sich auch die Tonverhältnisse einer durch parallele Stralen beleuchteten Kugel durch Projectionen darstellen.

1483. **Man soll jene Punkte einer auf einer Fläche F liegenden Linie s bestimmen, welchen bestimmte Töne zukommen?**

Man lege durch eine Reihe von Punkten der Linie s berührende Ebenen an die Fläche F (1025), und zu jeder derselben eine parallele berührende Ebene an die Kugel, wodurch auf der Kugel eine Berührungslinie s' derart entstehen wird, dass jedem Punkte in s ein Punkt in s' entspricht. Die Linie s' wird die auf der Kugel dargestellten Tonlinien in Punkten $m', n', o', \ldots$ schneiden. Sucht man in s jene Punkte $m, n, o, \ldots$, welche $m', n', o', \ldots$ entsprechen, so besitzen die Flächenelemente bei $m, n, o, \ldots$ jene Dunkelheiten, welche den Tonlinien der Kugel entsprechen, in denen die Punkte $m', n', o' \ldots$ liegen.

Wie liesse sich der Satz (1476) anwenden, um dieselbe Aufgabe zu lösen?

1484. **Wie construiert man die Tonlinien irgend einer Fläche F?**

Es bieten sich zwei, im Wesentlichen aber nicht verschiedene Wege dar:

a) Man construiert für jede einer Reihe von Linien der Fläche F nach (1483) die Dunkelheiten ihrer Punkte und verbindet die gleichbezeichneten zu einer Tonlinie; oder

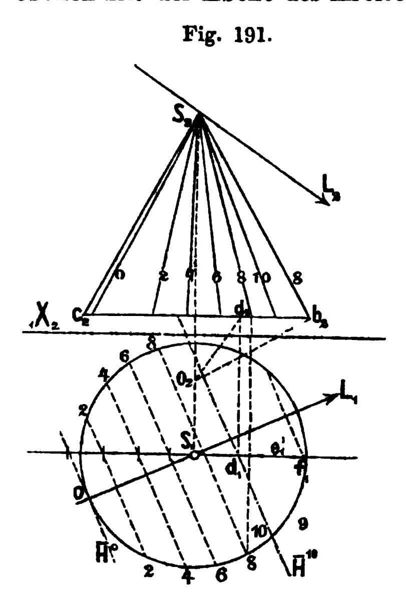
b) man construiert zu den verschiedenen Ebenen, welche die Kugel in Punkten einer und derselben Tonlinie berühren, die parallelen berührenden Ebenen an die Fläche F. Die Be-

rührungspunkte, in entsprechender Weise verbunden, geben eine Tonlinie der Fläche F.

1485. **Wie construiert man die Tonlinien einer senkrechten Kreiskegelfläche?**

Man construiere eine die Kegelfläche in einem Kreise k berührende Kugel K; lege durch ihr Centrum O und ihren hellsten Punkt B je eine Hellebene (1482), suche die Schnitte beider Hellebenen mit der Ebene des Kreises k und teile den zwischen beiden Geraden liegenden Parallelstreifen in 10 gleich breite Streifen, so stellt jede dieser teilenden Geraden den Schnitt einer Hellebene der Kugel mit der Kreisebene k vor (1482). Die Punkte, in welchen diese Teillinien den Kreis k schneiden, gehören auch der Kugel und zwar deren Tonlinien an; mithin sind auf der Kegelfläche im Kreise k Punkte von bestimmter Dunkelheit gefunden. Dieselben mit der Kegelspitze verbunden, geben die Tonlinien der Kegelfläche.

Fig. 191.



1486. Wenn von vielen senkrechten Kreiskegelflächen deren Axen sämmtlich auf derselben Bildebene, z. B. auf I, senkrecht stehen, die Tonlinien für dieselbe Richtung des Lichtes zu suchen sind, dann ist es angezeigt, in der Bildaxe ${}_1X_2$ einen Punkt A als Centrum einer Hilfskugel zu wählen, Fig. 190, und eine Ebene H^0 durch den hellsten Punkt und eine Ebene H^{10} durch das Centrum der Kugel zu führen. In der Figur wurde der hellste Punkt B im Bilde B_3 gesucht; zieht man $B_3D \perp L_3$, so ist B_3D die Nullseite von H^0 und durch D geht die erste Spur $\overline{H}_1^0$ von H^0. Von H^{10} geht $\overline{H}_1{}^{10}$ durch A. Beide Spuren sind senkrecht auf L_1. Teilt man etwa längs ${}_1X_2$ den Abstand AE beider Spuren in 10 gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zu $\overline{H}_1{}^0$, so sind diese die ersten Spuren der übrigen Hellebenen der Kugel. (In Fig. 190 wurde jede zweite Hellebene weggelassen,

auch wurden die Spuren jener Hellebenen nicht gezeichnet, welche die Selbstschattenseite der Kugel durchschneiden.)

Denkt man sich diese Constructionen für dieselbe Lichtrichtung an einer Kugel durchgeführt, deren Radius n mal grösser ist, als jener in Fig. 190, so werden auch die Entfernungen zwischen den Spuren der Hellebenen n mal grösser werden. Aus dieser Ursache wird es möglich, sich bei neuen Kugeln die erwähnten Constructionen zu ersparen; denn wenn man mit Bezug auf Fig. 190 die Proportion aufstellt: Kugelradius: $AE =$ neuer Kugelradius: $A'E'$, so erhält man die der neuen Kugel entsprechende Strecke $A'E'$.

Behufs dieser Aenderung construiert man einen Proportionalwinkel α zu Fig. 190, bei welchem der Kugelhalbmesser der Radius und AE oder etwa der fünfte Teil von AE (wie in der Figur) die Sehne ist.

1487. Um nun an einer senkrechten Kreiskegelfläche, Fig. 191, die Tonlinien zu erhalten, suche man das Centrum o (dessen Bilder die Punkte o_2 und S_1 sind, $b_2 o_2 \perp S_2 b_2$) einer Kugel, welche den Kegel längs der Basislinie berührt, und lege durch o eine Hellebene H^{10} senkrecht zu L, indem man durch o eine Zweier-Spurparallele od zieht ($o_2 d_2 \perp L_2$, $S_1 d_1 \parallel {}_1X_2$) und deren Schnitt $d_2 d_1$ mit der Basisebene des Kegels sucht. Zieht man durch d_1 eine Senkrechte $\bar{H}^{10}$ auf L_1, so ist das erste Bild des Schnittes gefunden. Nun ist es klar, dass die durch den hellsten Punkt und durch das Centrum der Kugel zu L senkrecht geführten Hellebenen die Basisebenen in zwei parallelen Geraden schneiden, die von einander eben so weit entfernt sind, wie die ersten Spuren dieser Ebenen. Man kann daher den Radius $o_2 b_2$ der den Kegel berührenden Kugel als Radius in den Proportionalwinkel α der Fig. 191 eintragen, und die Sehne des Bogens in Fig. 191 von d_1 aus auf der zu ${}_1X_2$ parallelen Geraden auftragen, um Punkte zu erhalten, durch welche die Schnitte der Hellebenen der Kugel mit der Basisebene des Kegels gehen. Diese Schnitte treffen die Basis in den Punkten 8, 6, 4, 2, 0 und man kann nun die Bilder der Tonlinien des Kegels darstellen. (In Fig. 191 sind dieselben nur in der zweiten Projectionsebene abgebildet; ferner ist es zufällig, dass der Schnitt der Hellebene H^0 noch die Basis berührt.)

1488. Trägt man die aus dem Proportionalwinkel entnommene Sehne von d_1 aus nach $e_1 f_1 \ldots$ auf, und zieht durch e_1 eine Senkrechte auf L_1, so müssten die Schnittpunkte mit dem

Kreise die Tonnummer 8 bekommen; weil aber die Hellebene die Kugel auf der Selbstschattenseite trifft, so erhält der erwähnte Kreispunkt die Nummer $5 + \frac{1}{2} . 8$, d. i. 9; weil aber die ungerad bezeichneten Tonlinien wegbleiben, wird erst die nächste Tonlinie 8 eingezeichnet.

Dieses Verfahren gilt auch für senkrechte Kreiscylinder, weil diese Kegelflächen mit unendlich fernem Scheitel sind.

1489. Wie construiert man die Tongrenzen einer beliebigen senkrechten Cylinderfläche?

Man führe durch den Mittelpunkt A einer Hilfskugel eine Ebene u' parallel zur Basisebene der senkrechten Cylinderfläche Z und bestimme die Schnitte der 10 oder 5 Hellebenen der Kugel (1482) mit dieser Ebene u' und mit dem Kreise u', in welchem sie die Kugel schneidet. Die Schnittpunkte sind mit den den Hellebenen entsprechenden Tonnummern zu bezeichnen. Zieht man in jedem solchen Punkte eine Tangente an u' und dazu eine parallele Tangente an die Basis u des Cylinders Z, so geht durch den gefundenen Berührungspunkt ein Flächenstral, welcher die mit dem Berührungspunkte gleichbezifferte Tonlinie der Cylinderfläche ist.

Auf diese Art sucht man noch alle übrigen Tonlinien, wobei jedoch sehr darauf zu achten ist, dass die Töne des directen und des Gegenlichtes nicht verwechselt werden.

Selbstverständlich kann man nach dieser Methode auch Ebenen eines Ebenenbüschels mit bestimmten Tönen construieren.

1490. Wie construirt man die Tonlinien einer Rotationsfläche?

Sucht man den Mittelpunkt einer Kugel, welche die Rotationsfläche in einem Parallelkreise berührt (siehe Fig. 162), und construiert die Tonpunkte des Parallelkreises wie an dem Basiskreise des Kegels in Fig. 191, so kann man, sobald für hinreichend viele Parallelkreise Tonpunkte gefunden sind, die gleich bezifferten zu Tonlinien verbinden.

1491. Man soll die Tongrenzen einer windschiefen Fläche construieren.

Wenn man durch irgend einen Flächenstral einer windschiefen Fläche eine beliebige Menge von Ebenen legt, so ist jede derselben eine Berührungsebene dieser Fläche. Legt man gerade jene Ebenen, welche bestimmte Töne besitzen, so kommen diese Töne auch den Berührungsstellen mit der windschiefen Fläche zu. Es handelt sich demnach bei der Tongrenzen-Be-

stimmung einer windschiefen Fläche um zwei Dinge: *a*) Wie construiert man Ebenen von bestimmten Tönen, und *b*) wie findet man ihre Berührungsstellen?

Die erste Construction führt man nach (1479), oder in den meisten Fällen einfacher nach (1489) durch; die zweite Construction beruht auf (1234) oder (1259). Im letzteren Falle hat man jedoch nicht in einem gegebenen Punkte einer windschiefen Fläche eine Tangentenebene zu legen, sondern nur umgekehrt die Berührungsstelle der bereits vorhandenen Tangentenebenen zu construieren. Da diese eine Gerade einer Schaar des windschiefen Hyperboloides oder Paraboloides enthält, welches die gegebene Fläche längs jener Geraden berührt, so wird man nur die Schnittpunkte mit noch zwei Geraden derselben Schaar suchen; die Verbindungsgerade beider Punkte schneidet die der gegebenen windschiefen Fläche angehörige Gerade in dem gesuchten Berührungspunkte.

Es ist wol eine selbstverständliche Sache, dass in speciellen Fällen, wenn die Stralen einer windschiefen Fläche eine einfache Lage gegen die Projectionsebenen annehmen, auch die allgemeinen Methoden Vereinfachungen gestatten werden; diese aufzufinden bleibt der Gewandtheit des Construierenden überlassen.

Eingehendere Untersuchungen dieses Gegenstandes findet man in dem ausführlichen mit zahlreichen Beispielen illustrierten Werke: „Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-Constructionen, von Fr. Tilscher, Wien 1862.“

Construction einiger durch Spiegelung erzeugter Gebilde.

§. 75.

1492. Wenn ein leuchtender Punkt B sich vor einer spiegelnden Ebene E befindet, auf welche ein beobachtendes Auge O sieht, so wird es einen Punkt b des Spiegels geben, welcher den von B dem b zugesendeten Lichtstral nach den Reflexionsgesetzen (1403) ins Auge reflectiert, wodurch bekanntlich dem Auge O das Spiegelbild B' des Punktes B in der Geraden Ob erscheint.

1493. Ist O zugleich das auf die Bildebene projicierende Auge, so werden der Punkt b und das Spiegelbild B' für dies Auge Deckpunkte sein, und hieraus muss man schliessen, dass es für das projicierende Auge ganz einerlei ist, ob es das Spiegelbild B' eines Punktes B, oder ob es den Punkt b der Spiegelebene projiciert, welcher den aus B kommenden Lichtstral in

das Auge reflectiert. Der Punkt b soll zum Unterschiede vom Spiegelbilde B' der Reflex des Punktes B auf der Spiegelebene für das Auge O genannt werden. (Ueber Reflexe: Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien, 1866, von Hrn. R. Niemtschik, Prof. am Joanneum in Graz.)

1494. Das Spiegelgebilde eines beliebigen Raumgebildes liegt mit dem letzteren perspectivisch affin. Hieraus folgt, dass einem jeden Systeme von Linien des einen Gebildes ein projectivisch verwandtes System von Linien im anderen Gebilde entsprechen muss. Nun kann man alle Geraden, welche von den Reflexen b (1493) der verschiedenen Punkte B eines Gebildes in das projicierende Auge O gelangen, als ein System von Geraden des Spiegelgebildes betrachten, weil sie durch die den Reflexen b entsprechenden Spiegelbilder B' gehen; also muss diesem Stralenbündel O auch ein Stralenbündel des gegebenen Gebildes entsprechen, dessen Scheitel der zum Auge O verwandte Punkt A, d. i. das Spiegelbild des Auges O sein muss.

1495. Die Spiegelebene ist die Begegnungsebene der beiden perspectivisch affinen Gebilde, es schneiden sich sonach je zwei verwandte Gerade in ihr; mithin kann man mit Berücksichtigung von (1494) erklären:

Projiciert man ein Raumgebilde B aus dem Spiegelbilde A des Projections-Centrums O auf die Spiegelebene E', so ist diese Projection b identisch mit jener, welche entsteht, wenn man das Spiegelbild B' aus O auf die Ebene E' projiciert.

1496. Ist die Spiegelebene zugleich Bildebene, so kann man sagen: Projiciert man ein Raumgebilde B aus dem zur Bildebene symmetrisch gelegenen Punkte A des Auges O auf die Bildebene, so ist die so entstehende Projection das centrale Bild des Spiegelbildes B'.

Wenn man demnach von irgend einem Objecte B ein perspectivisches Bild b für eine angenommene Stellung des Auges O anfertiget, so ist die Zeichnung ganz identisch mit jener, welche entstünde, wenn der Zeichner sich hinter der Bildebene in gleicher Distanz bei unverändertem Augpunkte aufstellen, und das vom Objecte B durch Spiegelung auf der Bildebene entstandene Bild B' auf die Bildebene projicieren würde.

Wenn mithin ein Constructeur den Standpunkt O seines Auges symmetrisch zur Bildebene nach A verlegt, und jetzt die

perspectivischen Bilder jener Gegenstände construiert, welche bei dem ersten Stande O des Auges hinter ihm lagen, so sind diese Projectionen die Bilder von jenen Spiegelbildern, welche den hinter dem Auge O liegenden Objecten angehören, wobei wie schon oben erwähnt, die Zeichnungsebene als Spiegelebene gilt.

Der Lernende wolle von irgend einem hinter ihm liegenden Objecte das centrale Bild des Object-Spiegelbildes construieren.

1497. Wie werden die centralen Projectionen von Spiegelbildern dargestellt, wenn die Spiegelebene E' nicht mit der Zeichnungsebene E zusammenfällt?

Bei diesen Zeichnungen wird stets vorausgesetzt, dass das projicierende Auge O auch jenes Auge sei, in welches das Licht von der Spiegelfläche regelmässig reflectiert wird. Ist nun B ein Punkt vor der Spiegelebene E' und B' sein Spiegelbild, so schneidet der von B' ins Auge gezogene Stral $B'O$ die Spiegelebene E' in dem Reflexe b (1493), die Bildebene E in einem Punkte b', welcher das centrale Bild sowol von b als auch von B' ist.

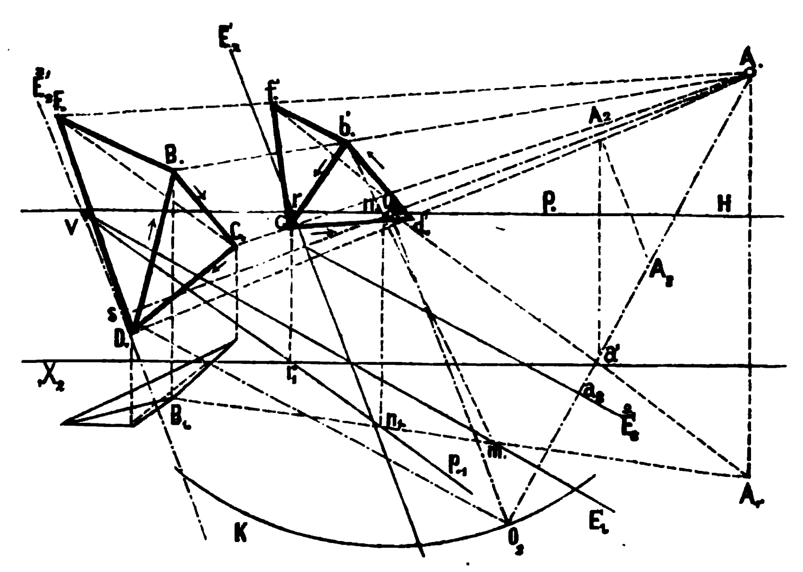
Wenn man demnach alle geraden Linien, welche das Originalgebilde B aus dem Spiegelbilde A des Auges O auf die Spiegelebene E' projicieren, central abbildet, und die centralen Bilder b' der Schnitte b dieser Geraden mit der Spiegelebene E' sucht, so ist hiedurch die centrale Projection b' des Spiegelbildes B' oder des Reflexes b gefunden.

Zur Construction des Bildes b' gibt es nun zwei Wege: a) Man bildet die Normale vom Punkte B auf die Spiegelebene E' und den in ihr jenseits von E' zu B symmetrisch liegenden Punkt B' central ab. Oder b) man führt in centraler Projection alle Constructionen durch, welche notwendig sind, um ein gegebenes Gebilde aus dem Spiegelbilde A des Auges O auf die Spiegelebene E' zu projicieren.

1498. Aufgabe. In Fig. 192 sei O_2 der Augpunkt, K der Distanzkreis (der einfachen Erklärung der weiteren Constructionen wegen, wurde die Distanz kleiner als die natürliche Sehweite genommen), $O_2 H$ der Horizont und ${}_1X_2$ die Spur einer horizontalen Bildebene I. Die Spiegelebene E' ist durch $\overline{E}'_2$ und die Fluchtspur $\overline{\overline{E}}'_2$ gegeben, und von einer dreiseitigen Pyramide $BCDF$ sei ihr centrales Bild $B.C.D.F.$ und jenes ihrer orthogonalen Projection auf der Bildebene I bekannt. Man soll die centrale Projection vom Spiegelbilde der Pyramide suchen.

Auflösung. Durch O_2 legt man eine Bildebene III senkrecht auf $\overline{E'}_2$, sucht die dritte Spur sO_3 der zu E' parallelen Fluchtebene und zieht hiezu die Nullseite $\overset{\circ}{\overline{E'}}_3$ der Ebene E' parallel. Wird $O_3 A.$ senkrecht auf die Nullseite von E' gezogen und $a_3 A_3 = O_3 a_3$ gesetzt, so ist A_3 das dritte Bild vom Spiegelbilde A des Auges O, mithin $A.$ in der Geraden sO_2 das centrale Bild von A, weil der Stral OA die Bildebene II in $A.$ schneidet.


Fig. 192.



Das zweite Bild A_2 von A liegt ebenfalls in sO_2, und im Abstande $A_2 A_3$ vor der Central-Bildebene befindet sich A selbst. Zieht man durch den vertical unter A_2 in ${}_1X_2$ liegenden Punkt a' eine Gerade durch den Augpunkt O_2, so muss sich in ihr das centrale Bild $A_1.$ vom ersten Bilde A_1 des Punktes A befinden, folglich liegt $A_1.$ dort, wo die Central-Ordinale $O_2 a'$ die durch $A.$ zu ${}_1X_2$ senkrechte Gerade trifft.

Um nun das centrale Bild $b'.$ vom Spiegelbilde b eines Punktes B zu ermitteln, zieht man vorher von der Spiegelebene E' das centrale Bild $\overline{E'}_1.$ der ersten Spur $\overline{E'}_1$ sowie durch den Punkt rr_1 der Spur $\overline{E'}_2$ das centrale Bild einer Einser-Spurparallelen p dieser Ebene $E'.$ (der Schnitt V von $\overline{\overline{E'}}_2$ mit dem Horizonte HO_2 ist der Fluchtpunkt der ersten Spur; die Spurparallele p wurde so angenommen, auf dass ihr centrales Bild $p.$

in den Horizont fiel; das erste Bild p_1. geht gleichfalls wie p. durch V). Nun zeichnet man die Geraden $A.B.$, $A_1.B_1$. und sucht zu $A_1.B_1$. die Deckpunkte $m.n.$, von welchen ersterer in $\bar{E}'_1$., letztere in p. liegt. Die Verbindungsgerade $m.n.$ ist das centrale Bild der Deckgeraden mn und schneidet $A.B.$ im Punkte b'., welcher das centrale Bild des Durchschnittes der Geraden BA mit der Ebene E', also das centrale Bild vom Spiegelbilde B oder dem Reflexe b ist.

Sucht man auf dieselbe nun sehr einfache Art auch die centralen Bilder der Reflexe der übrigen Eckpunkte CDF, so erhält man schliesslich das centrale Bild vom Spiegelbilde der Pyramide.

1499. Welche Flächenteile vom Spiegelbilde eines sich spiegelnden Körpers sind dem Auge sichtbar?

Wenn man sich beispielsweise eine Dreiecksebene, welche auf der einen Seite weiss, auf der anderen roth gefärbt ist, vor einen ebenen Spiegel so hält, dass das Auge die rothe Seite sowol vom Dreiecke, als auch von seinem Spiegelbilde sieht, so wird man zwei Dinge bemerken: a) es muss die rothe Seite der Dreiecksebene der Spiegelebene zugewendet sein, und b) die Aufeinanderfolge der Ecken des Dreieckes ist in dem Spiegelbilde jener im Originale entgegengesetzt.

Diese Erscheinung muss nun auch in der centralen Abbildung auftreten, und sie ist das Kennzeichen, ob man vom Spiegelbilde einer Ebene und von der Ebene dieselbe Seite sieht. (Man findet, dass bei der Spiegelung dies Kennzeichen gerade entgegengesezt jenem ist, welches in (619) aufgestellt wurde.)

In Fig. 192 ist die Aufeinanderfolge $b'.c'.d'$. entgegengesetzt jener von $B.C.D.$, also ist $b'.c'.d'$. als eine sichtbare Dreiecksebene zu behandeln.

Von dem Dreiecke BCF ist die innere Seite (die im Innern der Pyramide liegt) dem Auge O zugewendet; weil aber die Aufeinanderfolge $b'.c'.f'$. nicht entgegengesetzt jener von $B.C.F.$ ist, so folgt, dass im Spiegelbilde die Aussenseite jenes Dreieckes dem Auge O zugewendet ist, dass demnach $b'.c'.f'$. als das centrale Bild einer sichtbaren Seite einer Ebene zu betrachten ist.

Die Anhaltspunkte für die Beurteilung der sichtbaren Flächen, die man bei einem von ebenen Flächen begrenzten Körper gewonnen hat, sind auch die Mittel für die Beurteilung der sichtbaren Flächenteile der Spiegelbilder gekrümmter Flächen.

1500. Wenn von einem Objecte die orthogonale und centrale Projection auf der Central-Bildebene gegeben, so ist die Methode der Bestimmung des centralen Bildes vom Spiegelbilde nur insoweit von (1499) verschieden, als zur Bestimmung der Stralenschnitte Zweier-Deckgerade verwendet werden.

1501. Welche Eigentümlichkeit wird in der Construction sich ergeben, wenn von sehr vielen Punkten einer Ebene *u* die centralen Projectionen ihrer Spiegelbilder zu ermitteln sind?

Das Spiegelbild einer Ebene *u* liegt mit dieser Ebene perspectivisch affin; bei der centralen Projection werden die Bilder der affin projicierenden Stralen, nämlich die Bilder der Normalen zur Spiegelebene E' im Fluchtpunkte A zusammentreffen, folglich liegt das centrale Bild vom Spiegelbilde einer Ebene *u* mit dem centralen Bilde der Ebene *u* perspectivisch collinear; der Fluchtpunkt A. der Normalen zur Spiegelebene ist das Projections-Centrum und das centrale Bild des Schnittes von *u* mit der Spiegelebene die Begegnungsgerade. Wird demnach von dem Spiegelbilde E' eines Punktes der Ebene *u* das centrale Bild gesucht, so können alle übrigen Bilder nach den Gesetzen der perspectivischen Collineation bestimmt werden.

1502. Was ist bei der Construction centraler Abbildungen von Spiegelbildern projectivischer Flächen zu beachten?

Wenn man von jenen Stücken, welche eine projectivische Fläche bestimmen, die centralen Bilder der Spiegelbilder sucht, dann darf man nur aus diesen Bestimmungsstücken das centrale Bild einer projectivischen Fläche construieren, um die centrale Projection des Spiegelbildes der gegebenen Fläche zu erhalten. Wenn man demnach beispielsweise von der Basislinie und dem Scheitelpunkte einer Kegelfläche die centralen Projectionen der Spiegelbilder sucht, so kann man hieraus schon die Projection des Spiegelbildes der Kegelfläche ergänzen.

1503. Welche Bemerkungen knüpfen sich an die Schlagschattenbestimmungen, wenn eine spiegelnde Fläche vorhanden ist?

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: *a*) die Lichtquelle L liegt hinter, *b*) sie liegt vor der Spiegelebene. Der erste Fall bietet nichts bemerkenswertes dar, als dass bei besonderen Lagen

der Spiegelebene manche Punkte möglicherweise im Schlagschatten der Spiegelfläche liegen können.

Im zweiten Falle muss man das Spiegelbild L' des Leuchtpunktes L selbst als einen fast eben so kräftigen Leuchtpunkt wie L betrachten und jetzt tritt der Umstand ein, dass sonst dunkle Räume, in welche nun Stralen von der Lichtquelle L' dringen, beleuchtet werden.

Ist die Spiegelebene E' begrenzt, und treffen alle von L' kommenden Stralen eine dunkle Ebene u, so entsteht auf u ein Lichtbild, dessen Contouren eine centrale Projection des Umrisses der Spiegelebene aus L' sind.

1504. Wirft ein Punkt a, von der Lichtquelle L beleuchtet, einen Schlagschatten a' auf die beleuchtete Spiegelfläche E', so müssen im Lichtbilde von E' auf einer dunklen Ebene u (1503) zwei durch den Punkt a veranlasste Schlagschatten entstehen. Der eine ist direct der Schlagschatten, welchen der Punkt a, vom Leuchtpunkt L' beleuchtet, in das Lichtbild des Spiegels wirft, der zweite Schatten im Lichtbilde entsteht vom Schlagschatten a' des Punktes a auf der Spiegelebene E'. Man kann sich hievon bequem mit einem ebenen Spiegel überzeugen, welcher ein von der Sonne oder einem anderen Lichte erzeugtes Lichtbild etwa auf die Decke eines Zimmers wirft, wenn man beispielsweise einen Finger so vor den Spiegel hält, auf dass von ihm ein Schlagschatten auf die Spiegelebene fällt.

1505. Wenn ein durch einen Leuchtpunkt L beleuchteter Körper K mit seinem Schlagschatten nur einen Teil der spiegelnden Ebene verdeckt, so ist von dem übrig bleibenden Teile zu untersuchen, ob der von ihm erzeugte Lichtraum (ein Analogon des Schattenraumes) auch den Körper K trifft. Der getroffene Teil ist als das Lichtbild der Spiegelfläche auf dem Körper K zu bezeichnen.

Befindet sich ein Teil der Fläche des Körpers K im Lichte von L oder von L', hingegen aber im Selbstschatten von L' oder L, so sagt man, jener Flächenteil befinde sich im Halbschatten.

Es bleibe dem Studierenden überlassen, über die angedeuteten Erscheinungen sich Beispiele zu wählen.

Siebenter Abschnitt.

Ueber geometrische Orte.

Begriff geometrischer Orte.

§. 76.

1506. Bei manchen Anwendungen der Lehren der darstellenden Geometrie zu wissenschaftlichen oder praktischen Zwecken kommt man in die Lage, die Orte geometrischer Elemente (Punkt, Gerade, Ebene) nach vorgeschriebenen Bedingungen aufzusuchen. Wenn nun ein solches Element mehrere Lagen einnehmen kann und in jeder derselben die gegebenen Bedingungen erfüllt, dann nennt man die Gesammtheit dieser Lagen den geometrischen Ort des Elementes für diese Bedingungen.

1507. Der geometrische Ort eines Punktes ist entweder eine gewisse Anzal einzelner Linien oder Flächen, oder ein körperlicher Raum, oft aber auch nur ein System einzelner getrennt liegender Punkte.

1508. Der geometrische Ort einer Geraden wird entweder durch eine Curve oder durch eine Fläche bestimmt, an welche diese Gerade stets Tangente ist; oder es ist der geometrische Ort ein von einer Regelfläche umschlossener Raum, oder endlich eine Anzal einzelner Geraden, welche in ihrer Gesammtheit keine sogenannte Umhüllungscurve oder Enveloppe erzeugen.

1509. Der geometrische Ort einer Ebene ist entweder durch eine unebene Curve gegeben, indem die in jedem Curvenpunkte zusammentreffenden zwei Tangenten eine Ebene (die Osculationsebene) fixieren; oder der Ort der Ebenen ist durch eine Fläche bestimmt, welche von diesen Ebenen berührt wird. Auch kann eine Anzal einzelner Ebenen den geometrischen Ort für die gegebenen Bedingungen bilden.

1510. Um einen geometrischen Ort eines Elementes für mehrere Bedingungen zu construieren, ermittelt man den geometrischen Ort desselben für jede einzelne Bedingung; die Gesammtheit der Lagen, welche allen diesen einzelnen geometrischen Orten gemeinsam sind, ist sodann der geometrische Ort des Elementes für alle Bedingungen.

1511. Die Methode, wie man einen geometrischen Ort eines Elementes für eine Bedingung ermittelt, ist je nach der vorliegenden Bedingung eine verschiedene und hängt sehr oft von der Uebung und dem Scharfsinne des Construierenden ab. Im Nachstehenden werden einige Beispiele durchgeführt und zwar erstens geometrische Orte ermittelt, bei deren Construction alle Gebilde in einer Ebene liegen, zweitens bei welchen räumliche Constructionen vorzunehmen sind.

Construction geometrischer Orte in einer Ebene.

§. 77.

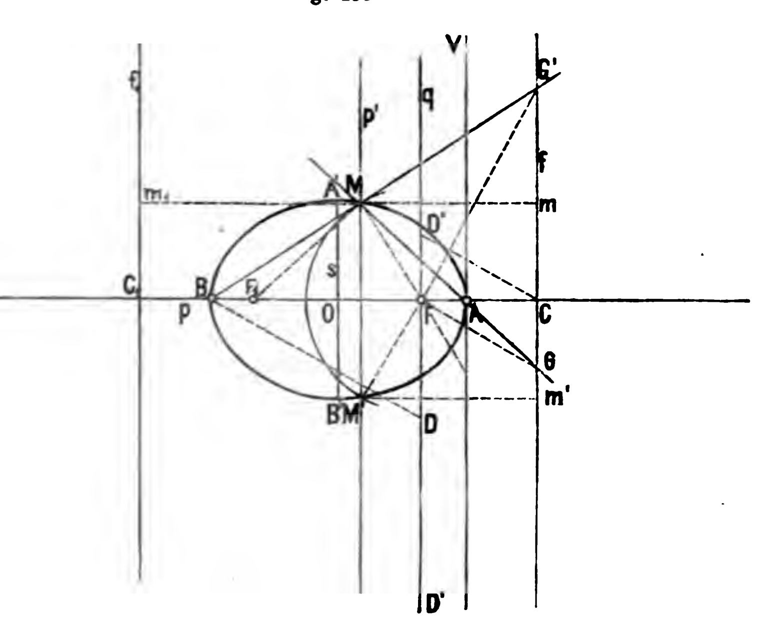
1512. Aufgabe. Man soll in einer Ebene alle Punkte auffinden, welche von zwei beliebigen Geraden p und q dieser Ebene gleiche Abstände haben.

Auflösung. Die Grösse der Abstände ist nicht angegeben; man wird daher in irgend einem Abstande d von der Geraden p zu p eine Gerade p', und in demselben Abstande d auch zu q eine Gerade q' parallel ziehen; jede dieser Geraden ist ein geometrischer Ort für eine einzelne Bedingung, mithin der Schnittpunkt M ein Ort für beide Bedingungen, nämlich dafür, dass M von p und q den Abstand d besitzt.

Bei jeder der Geraden p und q kann man eine positive und eine negative Halbebene unterscheiden, folglich wird der Punkt M für denselben absoluten Wert von d vier Orte erhalten, von welchen jeder in einem anderen der vier einfachen Winkel liegt, welche von p und q gebildet werden, je nachdem p' und q' entweder gleichzeitig in den positiven oder negativen, oder gleichzeitig in entgegengesetzt bezeichneten Halbebenen liegen. Auch ist leicht nachzuweisen, dass die in den Scheitelwinkeln liegenden zwei Punkte mit dem Durchschnittspunkte von p mit q in einer Geraden sich befinden, welche den spitzen oder den stumpfen Winkel pq halbiert.

Da man ferner die Grösse von d beliebig verändern kann, so findet man unzälig viele Gruppen von vier Punkten und es ergibt sich wegen der erwähnten Winkel halbierenden Eigenschaft, dass der geometrische Ort aller der Aufgabe entsprechenden Punkte zwei gerade zueinander senkrechte Linien sind, deren jede einen der von p mit q gebildeten vollständigen Winkel halbiert. Sind p und q parallel, so liegt ein geometrischer Ort in der inneren Mitte zwischen p und q, der andere Ort in der äusseren Mitte, d. i. im Unendlichen.

Fig. 193.



1513. Aufgabe. Es ist der geometrische Ort eines Punktes M einer Ebene zu construieren, wenn in der Ebene zwei beliebige Gerade p und q liegen, und der Abstand M von p zum Abstande M von q sich wie eine gegebene Strecke a zu einer anderen gegebenen Strecke b verhalten soll.

Auflösung. Man ziehe in der Distanz d beiderseits von p zu p eine parallele Gerade p', löse mittels eines Proportional-Dreieckes (228) die Proportion $d : d' = a : b$ auf, woraus man d' findet, und ziehe in dem Abstande d' beiderseits von q eine Parallele q' zu q, dann geben die beiden Geraden p' mit den beiden

Geraden q' vier der Aufgabe entsprechende Schnittpunkte, von welchen je zwei in den Scheitelwinkeln befindlichen mit dem Scheitelpunkte des Winkels pq in einer Geraden liegen.

Aendert man die Distanz d und, der Proportion $d : d' = a : b$ entsprechend, auch d', und beachtet nur jene Lagen von p' und q', deren gegenseitige Schnittpunkte in denselben Scheitelwinkeln von pq liegen, so erkennt man, dass der geometrische Ort von M durch die Schnitte der verwandten Stralen zweier geometrisch-proportionalen Parallel-Stralenbüschel gebildet wird. Weil sich aber beweisen lässt (wie?), dass diese Schnittpunkte immer in einer Geraden liegen, so folgt, dass der geometrische Ort von M zwei gerade Linien sind, welche durch den Scheitelpunkt von pq gehen und die Fläche eines jeden Scheitelwinkels im Verhältnisse von $a : b$ teilen.

1514. Sind die beiden Geraden p und q parallel, so sind auch die geometrischen Orte zu p und q parallel.

Ist das Verhältnis von $a : b = 1 : 1$, so rückt die eine Gerade des geometrischen Ortes in's Unendliche; also ist (1512) ein specieller Fall von (1513).

1515. Aufgabe. In einer Ebene ist eine Gerade f und ausserhalb derselben ein Punkt F gegeben. Man soll den geometrischen Ort eines Punktes M dieser Ebene unter der Bedingung bestimmen, dass sich die Entfernung MF zu dem jeweiligen senkrechten Abstande von f, wie eine gegebene Länge a zu einer anderen gegebenen Länge b verhalte.

Auflösung. Man ziehe von F eine Gerade p senkrecht auf f, bezeichne den Schnitt mit f durch C und teile die Strecke FC durch einen Punkt A derart, auf dass sich $AF : AC = a : b$ verhält, so ist A ein Punkt des geometrischen Ortes. In der Geraden p gibt es aber ausserhalb FC noch einen Punkt B des geometrischen Ortes, für welchen bezüglich C und F der absolute Punktwert $BF : BC = a : b$ ist. Bezüglich der Lage von B können aber drei Fälle eintreten, je nachdem: α) $a : b < 1$ β) $a : b = 1$, γ) $a : b > 1$ ist. Im ersten Falle liegen B und A auf einerlei Seite von f, im zweiten Falle liegt B im Unendlichen, und im dritten Falle liegen B und A auf verschiedenen Seiten von f. In jedem dieser Fälle ziehe man durch F eine beliebige Gerade q, trage a nach FD und b von D beiderseits nach DD' und DD'' auf, verbinde einmal D' mit C, das anderemal

D'' mit C und ziehe jedesmal durch D eine Parallele zu diesen Geraden, wodurch man die Punkte A und B erhält. (In Fig. 193 ist der erste Fall $a:b < 1$ dargestellt.)

Um jetzt einen allgemeinen Punkt M zu erhalten, ziehe man in einer beliebigen Entfernung d' parallel zu f eine Gerade p' und bestimme nach (230) aus der Proportion $d:d' = a:b$ die Länge d, mit welcher man aus dem Centrum F die Gerade p' durchschneidet; hiedurch ergeben sich zwei Punkte MM', welche dem gesuchten geometrischen Orte angehören, denn wenn man aus M eine Senkrechte Mm und aus M' eine Senkrechte $M'm'$ auf f fällt, ist $MF:Mm = d:d' = a:b$ und $M'F:M'm' = a:b$. Ermittelt man auf diese Art hinreichend viele Punkte, so gibt deren entsprechende Verbindung den gesuchten geometrischen Ort.

1516. Sehr häufig sind die geometrischen Orte von Punkten Linien II. Ordnung. Um in einem gegebenen Falle, wie z. B. in dem vorliegenden, untersuchen zu können, ob der Ort eine Linie der II. Ordnung ist, ohne mit Hilfe der analytischen Geometrie die Gleichung des Ortes aufzustellen, wird man danach forschen, ob dieser Ort durch die Durchschnitte der verwandten Stralen zweier projectivischen Stralenbüschel (287) entstehen kann oder nicht. Im ersten Falle ist der Ort eine Linie II. Ordnung, im zweiten Falle nicht.

Will man dieses projectivische Untersuchungs-Princip auf die in (1515) construierte Figur anwenden, so wird man die Punkte A und B als Scheitel zweier Stralenbüschel ansehen, je zwei Stralen, welche durch einen Punkt M des geometrischen Ortes gehen, einander als verwandt zuordnen und der Projectivität der Büschel A und B nachspüren, welche durch die verschiedenen Lagen der Stralen AM und BM entstehen.

Die Mittel zur Untersuchung der Projectivität dieser Büschel muss man aus den vorliegenden Bedingungen schöpfen; diese sind:

$$MF:Mm = a:b,\quad AF:AC = a:b,\quad BF:BC = a:b.$$

Berücksichtigt man zuerst den Punkt A, so erhält man:

$$MF:Mm = AF:AC \text{ oder } Mm:AC = MF:AF.$$

Verbindet man M mit A und verlängert MA bis zum Schnitte G in f, so erhält man aus der Figur:

$$Mm:AC = MG:AG,$$

woraus nun die Gleichung folgt:

$$MF:AF = MG:AG \dots . 1).$$

Wenn man sich nun an jene Lehrsätze dor Planimetrie erinnert, welche bei der Halbierung eines inneren und eines äusseren Dreieckswinkels entstehen, so bemerkt man augenblicklich, dass die Gerade FG den Winkel halbieren muss, welchen die Seiten FA und FM des Dreieckes FAM nach Aussen einschliessen. Ist also FM ein Stral, der von F nach irgend einem Punkt M des geometrischen Ortes von M geht und man halbiert den äusseren von FM und FA gebildeten Winkel des Dreieckes FAM, so schneiden sich drei Gerade, nämlich diese halbierende Gerade, ferner MA und f in einem Punkte G.

Werden nun die verschiedenen Lagen von M ermittelt und wird jedesmal der jetzt besprochene Winkel halbiert, so folgt, dass die beiden Stralenbüschel F und A, in welchen FG und AM verwandte Stralen sind, perspectivisch liegen, weil je zwei verwandte Stralen sich in der Geraden f schneiden. Also sind auch diese beiden Büschel F $(G\ldots.)$ und A $(M\ldots.)$ projectivisch.

Berücksichtigt man den Punkt B, so findet man:

$Mm : MF = BC : BF$, oder $Mm : BC = MF : BF$.

Bezeichnet man den Schnitt von MB mit f durch G', so erhält man:

$$Mm : BC = MG' : BG',$$

folglich ergibt sich:

$$MG' : BG' = MF : BF \ldots\ldots 2).$$

Aus 2) erkennt man nun wieder, dass die Gerade FG' den äusseren Winkel F des Dreieckes MFB halbiert, dass sonach diese halbierende Gerade FG' und MB sich in f schneiden. Es ist mithin wieder der Stralenbüschel F $(G'\ldots.)$ dem Büschel B $(M\ldots.)$ perspectivisch, folglich auch projectivisch.

Weil aber zwei Gerade FG, FG', welche Nebenwinkel halbieren, auf einander senkrecht stehen, so sind die beiden Stralenbüschel, welche von den verschiedenen einander zugehörigen Lagen wie FG und FG' gebildet werden, zwei congruente, also auch zwei projectivische Stralenbüschel, nämlich: F $(G\ldots.) \barwedge F(G'\ldots.)$, mithin ist auch A $(M\ldots.) \barwedge B$ $(M\ldots)$, wodurch nun erwiesen ist, dass die beiden Stralenbüschel, welche aus den Punkten A und B die Periferiepunkte M des in Betrachtung stehenden geometrischen Ortes projicieren, einander projectivisch proportional sind. Es folgt hieraus, dass der von M beschriebene Ort eine Linie II. Ordnung ist (436).

D'' mit C und ziehe je...
Geraden, wodur...
ist der erste
Um j...
in einer
und bes...
Länge
durch
dem
aus
a...

1517. Die in (1516) gegebenen Entwicklungen lassen nun auch eine andere Construction der Periferiepunkte M zu, welche sich auf die Construction projectivischer Stralenbüschel stützt, sobald die in p liegenden Punkte A und B gefunden sind. Das Verfahren ist folgendes: Man dreht einen rechten Winkel, dessen Scheitel in F liegt, um F, bestimmt jedesmal die zwei Durchschnitte GG' mit f und projiciert diese aus A und B. Der Schnittpunkt zweier Stralen AG und BG' (oder auch AG' und BG) gibt einen Periferiepunkt M der Linie II. Ordnung.

1518. Wenn die in p liegenden Punkte A und B sich auf einerlei Seite von f befinden, kann niemals AG mit BG' parallel werden, also kann auch kein einziger Periferiepunkt in's Unendliche fallen. Man kann demnach sagen: ist $MF : Mm = a : b < 1$ so ist der geometrische Ort von M eine Ellipse.

Da vermöge der Construction dem Strale BA des Büschels $B (M\ldots)$ die zu p senkrechte Gerade r im Büschel $A (M\ldots)$ und ebenso dem Strale AB des Büschels $A (M\ldots)$ eine durch B gehende zu p senkrechte Gerade im Büschel $B (M\ldots)$ entspricht, so folgt, dass nach (440) diese zwei senkrechten Geraden Tangenten an die Linien II. Ordnung sind. Weil ferner der Schnittpunkt beider Tangenten im Unendlichen liegt, ist AB ein Durchmesser, und wie leicht einzusehen, eine Axe der Linie II. Ordnung.

1519. Wird $a = b$, also $MF = Mm$, dann fällt B sammt der Tangente durch B ins Unendliche, also wird für $a : b = 1$ der geometrische Ort von M eine Parabel (403).

1520. Fallen aber die Punkte A und B auf verschiedene Seiten von f, dann gibt es zwei Paare paralleler verwandter Stralen in beiden Stralenbüscheln A und B (?), mithin wird der geometrische Ort von M eine Hyperbel.

1521. **Lassen sich aus dieser Entstehungsweise der Linien II. Ordnung einige Eigenschaften derselben ableiten?**

Es folgt aus der Construction (Fig. 193) zunächst, dass die Gerade p alle zu ihr senkrechten Sehnen halbiert, daher eine Axe der Curve ist. Teilt man demnach in O die Strecke AB in zwei gleiche Teile und errichtet eine Parallele s zu f, so ist s die zweite Axe der Ellipse.

Weil aber s auch alle zu p parallelen Sehnen halbiert, so ist die Ellipse zu s simmetrisch, woraus folgt, dass es auch auf der zweiten Seite von s simmetrisch zu F und f_1 einen Punkt F_1 und eine Gerade f_1 geben müsse, bezüglich welcher sich alle Punkte der Curve genau so verhalten, wie bezüglich F und f. Wird nun der Schnitt von Mm mit f_1 durch m_1 bezeichnet, so ergibt sich $MF_1 : Mm_1 = a : b$, und wenn man jetzt aus $MF : Mm = a : b$ und der eben aufgestellten zweiten Proportion die Längen MF, MF_1 berechnet, dann gibt die Addition $MF + MF_1 = \frac{a}{b}(Mm + Mm_1)$. Da aber $Mm + Mm_1$ der unveränderliche Abstand der beiden parallelen Geraden f und f_1 ist, so ist die Summe $MF + MF_1$ für alle Punkte der Ellipse dieselbe, und weil $AF + AF_1 = F_1B + AF_1 = AB$ ist, so ergibt sich für die Ellipse der merkwürdige Satz:

In **einer** Axe einer Ellipse gibt es zwei Punkte F und F_1 von der Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen irgend eines Periferiepunktes M von diesen zwei Punkten gleich der Länge dieser Axe ist, in welcher sie liegen. (Wie später erwähnt wird, sind F und F_1 Brennpunkte.)

1522. Sind A' B' die Endpunkte des zu AB senkrechten Durchmessers, so ist $A'F + A'F_1 = AB$, und weil $A'F = A'F_1$, so folgt $A'F = \frac{1}{2} AB$ und ebenso $B'F = \frac{1}{2} AB$. Weil $A'F = \frac{1}{2} AB$ die Hypothenuse in dem rechtwinkligen Dreiecke FOA' ist, so schliesst man $FA' > OA'$ oder $AO > OA'$ oder auch $AB > A'B'$; mithin liegen die erwähnten zwei Punkte F und F_1 in der **grossen** Axe der Ellipse.

1523. Für die Hyperbel beweiset man auf eine analoge Art den Satz: Bei jedem Periferiepunkte ist die Differenz seiner Entfernungen von zwei gewissen Punkten einer Axe gleich der Länge dieser Axe.

1524. Aufgabe. Man soll in einer Ebene den geometrischen Ort eines Punktes M construieren, bei welchem α) die Summe, β) die Differenz der Entfernungen von zwei fixen Punkten FF_1 der Ebene einer constanten Länge $2a$ gleich ist.

Auflösung. α) Weil in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten grösser ist als die dritte Seite, so muss auch $MF + MF_1 > FF_1$ sein. Soll demnach die Aufgabe möglich

werden, so muss, weil $MF + MF_1 = 2a$ ist, $2a > FF_1$, oder $a > \frac{1}{2} FF_1$ sein. Trägt man nun die halbe Länge von $2a$ von der Mitte O der Strecke FF_1 beiderseits nach A und B auf (Fig. 193), so sind A und B zwei Punkte des geometrischen Ortes, denn es ist $AF + AF_1 = F_1B + AF_1 = AB = 2a$, und ebenso $BF + BF_1 = BF + FA = BA = 2a$; dabei liegen A und B ausserhalb FF_1.

Um einen allgemeinen Punkt des geometrischen Ortes zu erhalten, schneide man auf AB von A aus irgend eine Strecke $An < AB$ ab, beschreibe mit An als Radius aus F und F_1 Kreisbögen, welche mit dem Reste nB aus F_1 und F durchschnitten werden, dann sind die vier Schnitte Punkte des geometrischen Ortes, weil $MF + MF_1 = An + nB = 2a$ ist. Nach (1521) ist die derart erzeugte Curve eine Ellipse.

β) In jedem Dreiecke ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite, mithin ist $MF - MF_1 < FF_1$. Ist nun $MF - MF_1 = 2a$ die gegebene Differenz, so folgt $2a < FF_1$ oder $a < \frac{1}{2} FF_1$; mithin muss die halbe gegebene Differenz kleiner als die Hälfte von FF_1 sein, wenn die Aufgabe möglich werden soll. Trägt man dann a von der Mitte O der Strecke FF_1 beiderseits nach A und B auf, so sind zwei Punkte des geometrischen Ortes vermittelt, und liegen A und B innerhalb FF_1.

Wird $An > AB$ auf der Geraden AB von A über B hinaus angenommen, damit aus F und F_1 Kreise beschrieben und diese mit Bn aus F_1 und F durchschnitten, so sind die vier Durchschnitte Punkte des geometrischen Ortes, welcher nach (1523) eine Hyperbel ist.

1525. Aufgabe. Es ist der geometrische Ort eines Punktes M so zu construieren, auf dass die Entfernungen MA und MB von zwei festen Punkten A und B der Ebene in einem gegebenen Verhältnisse $a:b$ stehen.

Auflösung. Teilt man die Strecke AB innerhalb und ausserhalb in den Punkten C und D nach dem Verhältnisse $a:b$ (295), so sind C und D zwei Punkte des geometrischen Ortes. Ist M ein allgemeiner Punkt dieses Ortes, so soll $MA : MB = a:b$ sein; weil aber auch $CA : CB = a:b$ und $DA : DB = a:b$, so folgt, dass die Geraden CM und DM die beiden Nebenwinkel bei M im Dreiecke AMB halbieren und sonach aufeinander senkrecht stehen (303). Die beiden Strahlenbüschel C und D, in welchen je zwei verwandte Stralen aufeinander senkrecht stehen, erzeugen

einen Kreis mit dem Durchmesser CD, mithin ist der geo metrische Ort des Punktes M der über CD als Durchmesser beschriebene Kreis.

1526. Folgerung. Da die vier Punkte $ACBD$ harmonisch liegen, so geht die Polare des Punktes A durch B senkrecht auf AB und es sind A und B bezüglich des Kreises conjugierte Punkte (377). Man kann demnach sagen: In jedem Kreise ist das Verhältniss der Entfernungen der Periferiepunkte von denselben zwei beliebigen conjugierten Punkten eine constante Grösse.

Ueber geometrische Orte im ebenen Polarsysteme. Bestimmung des Mittelpunktes, der Axen, der Brennpunkte und der Ordnungscurve eines Polarsystemes. Beziehungen zu den Linien II. Ordnung.

§. 78.

1527. Erklärung. Wenn in einer Ebene zwei reciproke Systeme (454) eine solche Lage einnehmen, dass jedem Punkte der Ebene dieselbe Gerade entspricht, ob der Punkt dem ersten oder dem zweiten Systeme angehört, dann sagt man, die beiden ebenen Systeme liegen involutorisch, oder auch polar; jeder Punkt mit seiner verwandten Geraden wird als Pol und Polare, der Inbegriff beider Systeme als ein Polarsystem bezeichnet. Aus dieser Erklärung folgt, dass eine jede Punktreihe mit ihrem verwandten Stralenbüschel involutorisch liegen müsse (315). Denn entspricht einem Punkte A die Gerade a nach der gegebenen Erklärung in doppelter Weise, und ist b irgend ein durch A gehender Stral, so muss der Punkt B vermöge (462) in der Geraden a liegen, und vermöge der gestellten Forderung auch der Geraden b in doppelter Weise entsprechen.

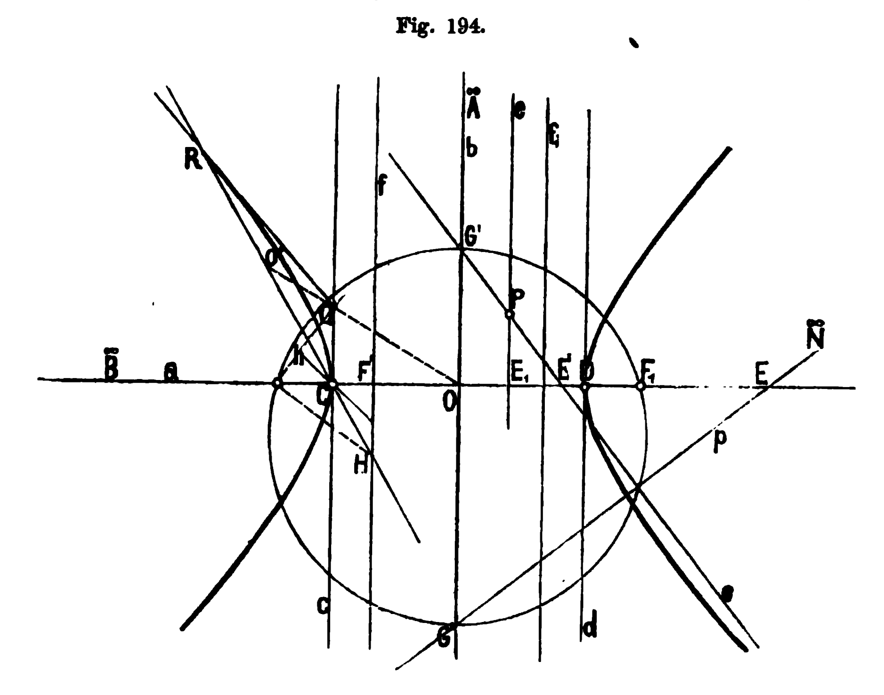
Setzt man dies voraus, so entspricht auch der Verbindungsgeraden $AB = b'$ der Durchschnittspunkt $ab = B'$ doppelt. Ist ferner c ein anderer durch A gehender Stral, und C der zu c doppelt verwandte Punkt, so liegt ebenfalls C in a und es muss wieder die Gerade $AC = c'$ dem Durchschnittspunkte $ac = C'$ doppelt entsprechen. Betrachtet man jetzt die vier Geraden $bb'cc'$ als Gerade des einen oder des anderen Systemes, so entspricht ihnen immer die Punktreihe $BB'CC'$; da ferner in reciproken Gebilden jeder Stralenbüschel seiner Punktreihe projectivisch ist (462), so muss $bb'cc' \overline{\wedge} BB'CC'$, also auch der Schnitt des Büschels $bb'cc'$ mit a der Reihe $BB'CC'$ projectivisch sein; mithin

haben wir $B'BC'C \barwedge BB'CC'$, woraus wir nach (318) sehen, dass die beiden Punktreihen, demnach auch der Stralenbüschel mit seiner verwandten Punktreihe involutorisch liegen.

Der unendlich fernen Geraden o eines Polarsystems entspricht im Allgemeinen ein endlich gelegener Punkt O, welcher der Mittelpunkt des Polarsystemes genannt wird.

Zwei Gerade, deren jede durch den Pol der andern geht, oder zwei Punkte, deren jeder in der Polare des andern liegt,

Fig. 194.



heissen conjugierte Gerade oder conjugierte Punkte des Polarsystemes. Jede Gerade, die durch einen Pol geht, ist daher zur Polare dieses Poles conjugiert. (Wichtiger Satz.)

1528. Wenn in einer Ebene drei Punkte ABC nicht in einer Geraden und auch nicht einander conjugiert angenommen, und denselben drei Gerade abc, die sich nicht in einem Punkte schneiden, als doppelt verwandt zugewiesen werden, dann ist ein Polarsystem durch diese Stücke vollständig gegeben, und es entsteht die

Aufgabe: Man soll den geometrischen Ort aller Geraden bestimmen, deren verwandte Punkte im Unendlichen liegen.

Auflösung. Durch jeden dieser drei Punkte geht ein Stralenbüschel, welcher mit seiner Punktreihe involutorisch liegt. Denn zieht man z. B. durch A die Geraden $AB = d$ und $AC = e$, so entsprechen ihnen doppelt verwandt die Punkte $ab = D$ und $ac = E$, mithin sind durch A zwei Stralen d und e, sowie ihre doppelt verwandten Punkte D und E in der Geraden a gegeben, welche mit den Schnitten D' und E' dieser Stralen mit a, eine involutorische Reihe nach (1527) bestimmen. Ebenso ist auch durch B und b ein involutorisches Polargebilde gegeben.

Wählt man jetzt in der Ebene eine beliebige Gerade m, so lässt sich ihr doppelt verwandter Punkt M leicht ermitteln; denn dem Schnittpunkte $ma = N$ entspricht ein durch A gehender involutorischer Stral n, welcher durch den involutorischen Büschel A vollständig bestimmt ist (489) und dem Schnittpunkte $mb = R$ entspricht abermals ein durch B gehender involutorisch gelegener Stral, mithin ist der Schnittpunkt von n mit r der gesuchte Punkt M.

Wählt man die Gerade o im Unendlichen, so liegen ihre Schnitte mit a und b, d. i. $ao = G$ und $bo = H$ gleichfalls im Unendlichen, also gehen die diesen Punkten verwandten Stralen $AO = g$ und $BO = h$ der Büschel A und B durch die Mittelpunkte der involutorischen Reihen, welche die Büschel A und B auf den Polaren a und b erzeugen. Construiert man diese Mittelpunkte nach dem Verfahren in (320), so sind auch die Stralen g und h bestimmt, deren Pole G und H im Unendlichen liegen und deren gegenseitiger Schnitt O der Mittelpunkt des Polarsystemes ist.

Bezeichnet man den Mittelpunkt der involutorischen Reihe auf a mit G', jenen auf b mit H', so ist zu $OG' = g$ die Gerade g' conjugiert, welche durch O und den Pol G, also durch O parallel zu a geht; ebenso ist zu $OH' = h$ jene Gerade h' conjugiert, welche durch O und den Pol H, also durch O parallel zu b geht. Hieraus ergibt sich nun, dass von dem involutorischen Stralenbüschel O zwei Paare conjugierter Stralen gg', hh' gegeben sind, durch welche der Büschel O vollständig bestimmt ist (319), der mit der unendlich fernen Punktreihe o involutorisch liegt.

1529. Wenn man nach (491) jene zwei conjugierten Stralen des involutorischen Büschels O bestimmt, welche aufeinander senkrecht stehen, so sind die Axen des Polarsystemes gefunden. Stünden je zwei conjugierte Stralen von O aufeinander senkrecht, dann wären je zwei solche Gerade Axen des Polarsystemes. Im Allgemeinen besitzt demnach ein Polarsystem nur zwei Axen.

1530. Aufgabe. Von einem Polarsysteme seien die zu einander senkrechten Axen a und b, sowie noch ein Pol P nebst Polare p gegeben. Man soll die Scheitelpunkte aller jener involutorischen Stralenbüschel ermitteln, deren conjugierte Stralen aufeinander senkrecht stehen (492).

Auflösung. (Fig. 194.) Die Axen a und b sind conjugierte Stralen, mithin liegt der Pol A von a in b im Unendlichen und der Pol B von b in a im Unendlichen. Stellen wir uns P und p als den Repräsentanten aller entsprechenden Punkte und Geráden eines Polarsystems vor, wobei P weder in a noch in b liegen soll, so kann auch p weder durch A noch durch B gehen, d. h. p muss sowol a als auch b schneiden. Man untersuche nun, ob P der Scheitel eines rechtwinkeligen involutorischen Büschels werden kann oder nicht; findet man, dass durch P ein Paar nicht aufeinander senkrechter conjugierter Stralen geht, dann kann P der Aufgabe nicht entsprechen (491).

Ist E der Schnitt von p mit a, so geht die verwandte Gerade e durch P und A, also durch P zu b parallel; und zieht man $PE = e'$ (fehlt in der Figur), so liegt E' im Schnitte von p mit e, mithin sind die Geraden e und e' conjugierte Gerade, indem jede durch den Pol der anderen geht. Da e zu b parallel, also auf a senkrecht ist, die Gerade $e' = PE$ aber a schneidet, so folgt, dass e und e' nicht aufeinander senkrecht stehen, woraus nun weiter folgt: Ausserhalb der Axen a und b kann es keinen Punkt P geben, welcher der Scheitel eines rechtwinklig involutorischen Stralenbüschels ist.

Um nun in den Axen a und b jene Punkte F ausfindig zu machen, welche der Aufgabe entsprechen, bedenke man vor Allem, dass a zu jeder auf ihr senkrechten Geraden, und ebenso auch b zu jeder auf ihr senkrechten Geraden conjugiert ist. Findet man dann in a oder in b einen Punkt F von der Beschaffenheit, dass zwei aufeinander senkrechte Gerade, deren keine zu a oder b parallel ist, einander conjugiert sind, so gehen durch F zwei Paare rechtwinklig conjugierter Stralen, und nun müssen nach (491) alle anderen Paare conjugierter Stralen aufeinander senkrecht stehen, folglich wird F ein der Aufgabe entsprechender Punkt sein.

Um diesen Punkt zu ermitteln, verschiebe man eine beliebige Gerade des Polarsystemes, etwa p parallel zu sich weiter,

und fälle aus dem jedesmaligen Pole P eine Senkrechte c auf p, dann muss immer der Pol von c in p liegen, also werden c und p vermöge des Satzes am Schlusse von (1527) stets zwei rechtwinklig conjugierte Gerade sein. Die Durchschnittspunkte, welche aus allen zusammengehörigen Paaren p und c entstehen, werden, wie alsbald nachgewiesen wird, eine Linie II. Ordnung bilden, und jene Punkte F, in welchen a und b von dieser Curve geschnitten werden, entsprechen der Aufgabe.

Die erwähnte Linie II. Ordnung ist der geometrische Ort der gegenseitigen Durchschnittspunkte aller jener Paare aufeinander senkrechter conjugierter Geraden, von welchen eine zu p parallel ist. Gibt es in einer der Axen a oder b einen Punkt F, welcher der Scheitel eines rechtwinkligen involutorischen Stralenbüschels ist, so geht durch F auch ein conjugiertes Stralenpaar, von welchem ein Stral mit p parallel ist, es mag p was immer für eine Richtung haben, also muss F im geometrischen Ort einer jeden der in Rede stehenden Linien II. Ordnung liegen; mithin ist es einerlei, welche Polare p und ihr Pol P zur Auffindung von F benützt wird.

Diese Schnittpunkte der Curve mit a und b lassen sich construieren, ohne die erwähnte Curve zu zeichnen, wie folgende Betrachtung lehrt: Alle Lagen der parallelen Geraden p gehen durch einen unendlich fernen Punkt N, also liegen die Pole der verschiedenen Geraden p in der dem Punkte N entsprechenden Polaren n. Da N durch den Schnitt von p mit der unendlich fernen Geraden o entsteht, so ist n die Verbindungsgerade von O mit P (in der Figur nicht gezogen); also ist die Gerade n gefunden, welche alle Pole der verschiedenen parallelen Lagen von p enthält. Da die von den Polen gebildete gerade Punktreihe n dem verwandten Stralenbüschel N projectivisch ist (462), so ist auch der Parallel-Stralenbüschel, welcher durch die Senkrechten gebildet wird, die man aus den Punkten von n auf die Geraden p fällt, dem von p gebildeten Stralenbüschel N projectivisch, wesshalb die Schnittpunkte von je zwei conjugierten zu einander senkrechten Geraden c und p eine Linie II. Ordnung bilden, wie vorhin erwähnt wurde.

Betrachtet man die projectivischen Punktereihen, welche diese zwei Parallelbüschel auf a erzeugen, so findet man leicht heraus, dass dem Punkte O immer der unendlich ferne Punkt in a entspricht, ob O der ersten oder der zweiten der beiden projectivischen Punktereihen angehört; da demnach diese beiden

Punkte ein involutorisches Punktepaar bilden, so liegen die Reihen selbst involutorisch (318), O ist der Involutionsmittelpunkt und die Ordnungspunkte der involutorischen Reihe (323) sind die Schnittpunkte F der unconstruierten Linie II. Ordnung mit der Axe a.

In ganz übereinstimmender Weise findet man auch, dass die beiden aufeinander senkrechten Parallel-Stralenbüschel c und p auf b eine involutorische Reihe mit dem Involutionsmittelpunkte O erzeugen, und daraus folgt, dass wieder die Ordnungspunkte dieser involutorischen Reihe der Aufgabe genügen.

Da nun, wie Figur 194 erkennen lässt, die Schnitte von p und der aus ihrem Pole P auf p gefällten Senkrechten c mit der einen Axe a oder b auf einerlei, mit der anderen aber auf verschiedenen Seiten von O liegen müssen, so folgt, dass nur jene Axe Ordnungspunkte dieser Reihe besitzen kann, bei welcher die beiden Schnittpunkte mit p und c auf einerlei Seite vom Involutionsmittelpunkte O liegen (325).

Bezeichnet man die Schnitte von p mit a und b beziehungsweise durch E und G, jene von c mit E' und G', so ist nach (321) für die auf a liegende involutorische Reihe das Product $OE.OE'$, für die andere Reihe $OG.OG'$ eine constante Grösse. Aus der Aehnlichkeit von Dreiecken folgt $OE.\,OE' = OG.\,OG'$, d. h. die constante Grösse ist für beide involutorischen Reihen dieselbe.

Beschreibt man jetzt über den durch O getrennt liegenden Punkten G und G' als Durchmesser einen Kreis, welcher die andere Axe in F und F_1 schneidet, so ist $\overline{OF}^2 = \overline{OF_1}^2 = OG.\,OG' = OE.\,OE'$, also sind F und F_1 nach (324) die Ordnungspunkte der involutorischen Reihe, mithin die Scheitelpunkte jener involutorischen Stralenbüschel, deren conjugierte Stralen aufeinander senkrecht stehen.

1531. Da im Nachstehenden sich noch ergibt, dass das vorstehend entwickelte Polarsystem mit jenem identisch wird, welches in (480) bestimmt ist, so ist nun auch die in (498) angegebene Construction der Brennpunkte in (1530) gerechtfertigt und hiedurch gezeigt, dass man die Brennpunkte eines Polarsystemes construieren kann, ohne dass man die Linie II. Ordnung kennt, durch welche dasselbe Polarsystem nach (480) bestimmt ist.

1532. Aufgabe. Es sind die Axen a, b eines Polarsystemes, und ein Punkt P mit seiner Polare p gege-

ben; man soll die Polaren f und f_1 der Brennpunkte F und F_1 construieren, wenn letztere in der Axe a liegen.

Auflösung. Die Polare oder Directrix f muss durch den Pol A gehen, weil der Pol F in a liegt; bezeichnet man den Schnitt von f mit a durch F', so sind F und F' zwei conjugierte Punkte des Polarsystemes (1527), also zwei conjugierte Punkte einer involutorischen Reihe, für welche O der Involutionsmittelpunkt ist. Um nun F' zu finden, muss man vorher noch ein Paar conjugierte Punkte des Polarsystemes in a construieren, und dies geschieht, wenn man zum Schnittpunkte E von p mit a den conjugierten Punkt E_1 sucht, indem man die Polare e, welche natürlich durch P und A (also durch P parallel zu b) geht, mit a schneidet. Nun ist $OE . OE_1 = OF . OF'$ die Eigenschaft eines Involutions-Mittelpunktes, also erhält man mittels eines Proportional-Dreieckes durch Construction $OF : OE = OE_1 : OF'$ die Grösse OF' und hiedurch die Directrix f.

1533. Aufgabe. Es sind die Axen a und b eines Polarsystemes, ein Brennpunkt F und seine Polare f gegeben. Man soll den geometrischen Ort aller Punkte finden, welche in ihren eigenen Polaren liegen.

Der Brennpunkt F liege in der Axe a und F' sei der Schnitt der Directrix f mit a, dann sind F und F' conjugierte Punkte im Polarsysteme. Liegen F und F' auf einerlei Seite von O, so besitzt die auf a liegende Reihe conjugierter Punkte zwei Ordnungspunkte C und D, welche aus $OC = OD = \sqrt{OF . OF'}$ gefunden werden, und es sind die durch C und D zu a senkrechten Geraden c und d die Polaren zu C und D, mithin gehören C und D dem gesuchten geometrischen Orte an.

Nun ziehe man durch C eine beliebige Gerade q und ermittle ihren Pol Q dadurch, dass man zu zwei in q liegenden Punkten ihre Polaren sucht, welche sich im Punkte Q schneiden müssen (462). Der eine Punkt ist C, dessen Polare c soeben gefunden wurde, und der andere Punkt ist der Schnittpunkt H von q mit f. Um die Polare h, die durch F geht, zu finden, bemerke man, dass der Brennpunkt der Scheitel eines rechtwinklig involutorischen Stralenbüschels ist, woraus folgt, dass der mit h conjugierte Stral auf h senkrecht steht. Da aber dieser conjugierte Stral durch den Pol H geht, so ergibt sich, dass h durch F auf FH senkrecht zu zu ziehen ist; also muss der Schnitt von h mit c der gesuchte Pol Q sein.

Nun liegt aber in einem Polarsysteme jeder Stralenbüschel Q mit seiner geraden Punktreihe q involutorisch, und weil die Gerade c, die ein Stral von Q ist, durch ihren eigenen Pol C geht, so ist c ein Ordnungsstral im involutorischen Stralenbüschel, und C ein Ordnungspunkt der involutorischen Reihe, welche dieser Büschel auf q erzeugt. Der Mittelpunkt O' der Involution auf q ist der dem unendlich fernen Punkte in q conjugierte Punkt, und da jener Punkt durch den Schnitt von q mit der unendlich fernen Geraden o entsteht, so muss O' durch den Schnitt der Verbindungsgeraden von O mit Q entstehen. Wird nun die Strecke $O'C$ nach $O'R$ auf der Geraden q aufgetragen, so ist R der zweite Ordnungspunkt der involutorischen Reihe q, also QR ein Stral r, der durch seinen eigenen Pol R geht. Demnach ist R ein allgemeiner Punkt des gesuchten geometrischen Ortes. Hinreichend viele Punkte wie R bestimmt, geben den vollständigen geometrischen Ort der Aufgabe.

1534. Um zu untersuchen, ob dieser Ort eine Linie II. Ordnung ist, betrachte man alle Constructionslinien genau und sehe nach, ob es zwei projectivische Büschel gibt, welche zur Entstehung des geometrischen Ortes dienen können. Wenn man den Punkt H und den Punkt Q ins Auge fasst, so erkennt man aus dem Umstande, nach welchem die Geraden FH und FQ aufeinander senkrecht stehen, dass auch der Stralenbüschel den FH beschreibt, mit jenem den FQ beschreibt, congruent sein muss, und dass demnach die Punktreihe H, welche der Stral FH auf f beschreibt, auch mit der Punktreihe Q auf c projectivisch sein müsse. Nun wird immer H aus C und Q aus O projiciert, um den Punkt O' zu geben, folglich entsteht der geometrische Ort von O' als der Durchschnitt zweier projectivischen Stralenbüschel, d. h. der Ort von O' ist eine Linie II. Ordnung.

Da endlich O' die Mitte von CR, so ist $CR = 2.CO'$, d. h. der von R beschriebene geometrische Ort liegt zu jenem von O' beschriebenen perspectivisch ähnlich (211), also ist auch der geometrische Ort aller der in der Aufgabe (1533) erwähnten Punkte eine Linie II. Ordnung. Diese wird die Ordnungscurve des Polarsystemes genannt.

Man erkennt schliesslich auch noch, dass der Mittelpunkt und die Axen des Polarsystemes, auch Mittelpunkt und Axen der Ordnungscurve sind.

1535. Wie kann man beweisen, dass die Polare QR, welche in (1536) construiert wurde, in ihrem Pole R die Ordnungscurve berührt?

Die Gerade QR besitzt mit der Ordnungscurve nur einen gemeinsamen Punkt. Weil aber jede Gerade, welche eine Linie II. Ordnung wirklich schneidet, mit dieser zwei Punkte gemein haben muss, so folgt, dass die Gerade PE keine schneidende, sondern nur eine tangierende Gerade sein kann.

Werden die Tangenten der Ordnungscurve Ordnungsstralen genannt, dann kann man sagen: In einem jeden ebenen Polarsysteme wird die Ordnungscurve von den Ordnungsstralen in den Polen dieser letzteren berührt.

Man sieht sonach ein, dass das Polarsystem, welches in (1527) als der Inbegriff zweier reciproken ebenen Systeme in involutorischer Lage aufgestellt wurde, mit jenem ebenen Systeme identisch ist, welches nach (480) erhalten wird, und erkennt, dass eine jede Linie II. Ordnung im Allgemeinen zwei Brennpunkte besitzen müsse, welche in einer Axe (desshalb Hauptaxe genannt) dieser Linie liegen (498).

In Fig. 194 ist die Ordnungscurve eine Hyperbel mit den Brennpunkten F und F_1.

1536. Wenn die Construction der Polare f des Brennpunktes F (1532) ergeben sollte, dass F und f auf verschiedenen Seiten von O liegen, dann findet man keine Ordnungscurve des Polarsystemes. Es gibt also auch Polarsysteme ohne Ordnungscurven.

1537. Wenn bei der Construction des Mittelpunktes O eines ebenen Polarsystemes (1528) alle Geraden, die sich in O schneiden, parallel ausfallen, dann liegt der Mittelpunkt des Polarsystemes im Unendlichen, und die Richtung der durch O gehenden Geraden wird die Axenrichtung des Polarsystemes genannt. Die Ordnungscurve ist in diesem Falle eine Parabel, bei welcher nur stets ein Brennpunkt im Endlichen, der andere im Unendlichen liegt.

1538. Aufgabe. Von einem Polarsysteme mit einer Ordnungs-Parabel sei die Axenrichtung durch eine Gerade l, und seien zwei Pole P, Q und ihre Polaren p, q gegeben; man soll den Brennpunkt des Systemes construieren.

Auflösung. Diese erfolgt nach den in (1530) entwickelten Ansichten. Zuerst sei bemerkt: In jedem Polarsystem mit einer

Ordnungs-Parabel liegt jeder Parallel-Stralenbüschel mit seiner Polreihe zwar involutorisch, beide sind aber geometrisch proportional, weil der Mittelpunkt der Involution im Unendlichen liegt (mit dem Mittelpunkt O des Polarsystemes zusammenfällt).

Wird nun eine Gerade p als Stral eines Parallel-Stralenbüschels angesehen, und werden von allen Polen P Senkrechte c auf p gefällt, so werden auch die Parallel-Stralenbüschel p und c geometrisch proportional, folglich liegen die Schnittpunkte aller verwandten Geraden dieser zwei Büschel in einer Geraden. Diese Gerade ist der geometrische Ort der Durchschnittspunkte aller aufeinander senkrechten conjugierten Geraden, von welchen immer eine zu p parallel ist; und da durch den Brennpunkt F auch ein Paar solcher conjugierten Stralen geht, so folgt, dass der eben erwähnte geometrische Ort auch durch F gehen muss.

Zieht man durch P eine Parallele r zu l, so ist r die Polare des unendlich fernen Punktes R, durch welchen alle Parallel-Stralen p gehen, mithin ist der Schnittpunkt P' von p mit r der zu P conjugierte Punkt des Polarsystemes. Wird nun durch P eine Parallele p' zu p gezogen, so sind pp' zwei conjugierte Gerade, und fällt man von P und P' Senkrechte auf pp', so entstehen zwei Durchschnittspunkte (ausser P und P'), welche mit einander verbunden eine jener Geraden geben, die durch F geht.

Wenn endlich durch Q eine Parallele s zu l gezogen, ihr Schnitt mit q durch Q' bezeichnet, durch Q eine Parallele q' zu q gezogen wird, und von QQ' Senkrechte auf qq' gezogen werden, so ergeben sich (ausser QQ') zwei Durchschnittspunkte, welche abermals eine durch F gehende Gerade bestimmen. Der Durchschnittspunkt dieser mit der vorhin construierten Geraden gibt den gesuchten Brennpunkt F der Parabel, oder des Polarsystemes.

Wird durch F eine Gerade a parallel zu l gezogen, so ist die einzige Axe der Parabel oder des Polarsystemes gefunden.

Es möge dem Lernenden überlassen bleiben, die Directrix und den Scheitel der Parabel (Schnitt der Axe mit der Parabel) zu construieren.

1539. In welcher Beziehung stehen die Tangenten einer Linie II. Ordnung zu deren Brennpunkten?

In (1530) haben wir gesehen, dass die Brennpunkte die Ordnungspunkte einer involutorischen Reihe sind, die auf einer Axe des Systemes durch eine beliebige Reihe paralleler Geraden

und durch die aus ihren Polen auf sie gefällten Senkrechten erzeugt wird. Zieht man desshalb im Berührungspunkte M einer Geraden m mit einer Linie II. Ordnung eine Normale n, so entstehen auf der Axe der Brennpunkte (Hauptaxe) zwei Punkte $M'N'$, welche conjugierte Punkte einer Reihe mit den Ordnungspunkten FF_1 sind, sonach bilden die Punkte $M'N'$ mit FF_1 zwei Paare einer harmonischen Reihe (326), und der Stralenbüschel, welcher von M aus durch diese vier Punkte geht, ist harmonisch. Weil aber m und n zu einander senkrecht sind, so halbieren sie die von MF und MF' gebildeten Winkel (304), mithin kann man behaupten:

Bei jeder Linie II. Ordnung werden die Winkel der durch irgend einen Periferiepunkt M gehenden Brennstralen MF, MF_1 von der Tangente und der Normale jenes Periferiepunktes M halbiert.

Stellt bei der Ellipse F einen Wärme ausstralenden Punkt, die Ellipse eine spiegelnde Linie vor, so werden in Folge dieser Eigenschaft, die von F ausgehenden die Ellipse treffenden Wärmestralen in F_1 concentriert und wird in F_1 wieder die' Wärme vereinigt, weshalb diese Punkte Brennpunkte genannt wurden.

Mit Hilfe der Brennpunkte FF_1 kann man nun einfach in jedem Punkte einer Linie II. Ordnung eine Tangente und eine Normale construieren.

Geometrische Orte als Fehlercurven. Tangenten, Normalen, Berührungspunkte und Krümmungsmittelpunkte zu construieren. Potenzcurven.

§. 79.

1540. Bei manchen Aufgaben kommt es vor, zur Ausmittelung eines Punktes geometrische Orte construieren zu müssen, deren Bedingungen nicht durch die Aufgabe unmittelbar gegeben sind, Orte, deren Punkte entweder gar nicht, z. B. in (1542) oder nur mit Ausnahme einzelner, den gegebenen Bedingungen der vorliegenden Aufgabe entsprechen. Solche Linien pflegt man gewöhnlich als Fehlercurven zu bezeichnen. Ihre Enstehung und ihr Gebrauch wird aus einigen Beispielen klar werden.

1541. Aufgabe. An eine genau gezeichnete ebene Curve wurde eine Tangente t gezogen. Das Gesetz der Curve ist unbekannt; man soll möglichst genau die Berührungsstelle T ermitteln.

1. Auflösung. Man betrachte die Tangente t als einen Stral eines Stralenbüschels M, dessen Stralen sämmtlich die Curve k schneiden. Halbiert man alle messbaren Sehnen, so geben die Teilpunkte den geometrischen Ort k' der Halbierungspunkte aller Sehnen, also muss in diesem Orte auch der Halbierungspunkt der unendlich kurzen Sehne liegen, welche die Tangente t mit der gegebenen Curve gemein besitzt, folglich schneidet die Fehlercurve k' die Curve k in einem Punkte T, den man offenbar als Berührungspunkt von t mit k ansehen kann. Der Punkt M kann in der Geraden t beliebig gewählt werden.

2. Auflösung. Ist die Curve k in der Nähe des Berührungspunktes T schwach gekrümmt, dann denke man sich von einem auf der concaven Seite der Curve gelegenen Punkte M einen Stralenbüschel gezogen, welcher t und k schneidet. Die Abschnitte zwischen t und k trage man auf den Stralen, auf denen sie liegen, von t aus $n$fach (z. B. 3mal) genau, und zwar vor dem unbekannten Berührungspunkte T gegen M, hinter diesem Punkte T von M abgewendet auf. Die so erhaltenen Punkte verbunden geben eine Fehlcurve, welche die gegebene in dem gesuchten Punkte T berührt.

1542. Aufgabe. Man soll durch einen gegebenen Berührungspunkt T einer ebenen Curve k eine Tangente t und eine Normale n construieren.

Auflösung. Man ziehe mehrere Tangenten t_1 t_2 t_3 ..., von welchen einige die Curve k vor T, die anderen in Punkten hinter T berühren, und bestimme nach (1541) die Berührungspunkte T_1 T_2 T_3 ... Alsdann trage man eine beliebig lange Strecke l auf jeder Tangente in demselben Sinne vom Berührungspunkte aus auf, wodurch sich Punkte T'_1 T'_2 T'_3 .... ergeben, und verbinde dieselben zu einer Fehlercurve k'. Wird nun mit der Länge l aus dem Punkte T die Fehlercurve entsprechend durchschnitten, wodurch sich in ihr ein Punkt T' ergibt, dann ist TT' die gesuchte Tangente t und die durch T zu t senkrecht gezogene Gerade die Normale n.

Anmerkung. Der geübte Zeichner ersetzt diese Constructionen durch sein Augenmass.

1543. Aufgabe. Es ist für einen gegebenen Curvenpunkt T der Krümmungsmittelpunkt O zu construieren (1139).

Auflösung. Man construiere im Punkte T und in einem entfernter liegenden Curvenpunkte T_1 die Normalen n und n_1, welche einen Schnittpunkt O_1 geben. Wären T und T_1 unendlich nahe Curvenpunkte, so wäre O_1 zugleich der gesuchte Punkt O. Da aus leicht erkennbaren Gründen O auf diese Art, wenn T und T_1 unendlich nahe sind, nicht construiert werden kann, so nehme man zu den harmonischen Eigenschaften eines vollständigen Viereckes seine Zuflucht (307), wornach je zwei Diagonalpunkte mit den übrigen zwei Seiten harmonisch liegen. Zu diesem Behufe ziehe man in einiger Entfernung von der Curve auf deren concaver Seite eine die Normale n scharf schneidende Gerade x, wodurch auf n ein Punkt N, auf n_1 ein Punkt N_1 entsteht. Verbindet man T mit N_1, T_1 mit N und bezeichnet den Schnittpunkt beider Geraden mit O', so liegen O_1 und O'_1 zu den Seiten TT_1 und x harmonisch, und befände sich T_1 unendlich nahe an T, so müsste O'_1 in der Geraden n liegen, welche Lage mit O' bezeichnet werden soll, und es müsste $TO'NO$ eine harmonische Punktreihe sein. Wählt man desshalb noch mehrere näher an T und auf verschiedenen Seiten von T gelegene Curvenpunkte $T_2 T_3 \ldots$, und bestimmt in gleicher Weise wie O'_1 auch andere Punkte $O'_2 O'_3 \ldots$, dann geben diese verbunden einen geometrischen Ort, eine Fehlercurve k', welche n in dem Punkte O' schneidet. Construiert man nun die harmonische Reihe $TO'NO$, so ist O der gesuchte Krümmungsmittelpunkt für den Punkt T.

1544. **Aufgabe. Man soll den Krümmungsmittelpunkt O für irgend einen Punkt T einer Linie II. Ordnung construieren.**

Auflösung. Obwol die in (1543) angegebene Methode auch hier angewendet werden kann, lässt die Natur dieser Linien eine beiweitem einfachere Constructionsweise wie folgt zu:

Man errichte in dem Punkte N, in welchem die Normale n des Punktes T die Hauptaxe (d. i. jene Axe, welche die Brennpunkte enthält) der Linie II. Ordnung schneidet, eine Senkrechte auf n, bis der Stral TF, welcher zu einem der beiden Brennpunkte geht, getroffen wird. Wenn nun in diesem Schnitte auf TF eine Senkrechte errichtet wird, so geht diese durch den gesuchten in n liegenden Krümmungsmittelpunkt O.

Der Beweis dieser einfachen Construction wird in der zweiten Auflage der darstellenden Geometrie des Herrn Prof. Gugler mittels projectivischer Principien geführt.

1545. Potenzcurven. Auch bei manchen grafischen Rechnungsoperationen leisten Fehlercurven wesentliche Dienste. Nehmen wir an die

Aufgabe: Es sei aus einer gegebenen Länge l die dritte Wurzel zu ziehen, wenn eine andere Länge λ, die Einheit vorstellt, und l grösser als die Einheit ist.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade x (etwa horizontal), auf welcher man die Einheit $OA = \lambda = 1$ aufträgt und in A eine Senkrechte y errichtet. Durchschneidet man mit irgend einer Länge l' aus O die y in einem Punkte B_1, so kann man seitwärts einen Proportionalwinkel zeichnen, in welchem die Einheit λ der Radius und l' die Sehne ist. Beschreibt man in diesem Winkel mit dem Radius l' einen Bogen, dessen Sehne mit l'' bezeichnet werden soll, so ist offenbar $l' : l'' = 1 : l'$, also ist $l'' = (l')^2$; und wird mit l'' als Radius ein Bogen beschrieben, so besteht für dessen Sehne l''' die Relation: $l'' : l''' = 1 : l'$ und es wird $l''' = l'' . l' = (l')^3$. Auf diese Art kann man jede Länge l', welche grösser als 1 aber kleiner als 2 ist, sehr schnell potenzieren, wenn die Exponenten positive ganze Zahlen sind.

Trägt man die Länge l''' von O über B_1 hin nach OB_3 auf, so müsste $OB_3 = l$ sein, wenn $l' = \sqrt[3]{l}$ wäre. Allein dieser Zufall wird nicht vorhanden sein. Desshalb gebe man dem l' verschiedene Längen, construiere jedesmal einen Punkt C_3 $D_3, \ldots$ auf dieselbe Art wie B_3 gefunden wurde, und verbinde alle diese dritten Potenzpunkte $A\, B_3\, C_3\, D_3 \ldots$ zu einer stetigen Linie, welche die dritte Potenzcurve genannt und mit III bezeichnet werden soll. Wird jetzt mit der Länge l aus O die Curve in einem Punkte M_3 durchschnitten, OM_3 gezogen und der Schnitt mit y durch M_1 bezeichnet, so ist $(O\,M_1)^3 = O\,M_3$, folglich $O\,M_1 = \sqrt[3]{OM_3} = \sqrt[3]{l}$ das gesuchte Resultat.

1546. Wenn man mit dem in (1545) angegebenen Proportionalwinkel statt $(l')^3$ etwa $(l')^5$ ermittelt und durch Auftragen auf OB_1 den Potenzpunkt B_5, sowie auch noch andere fünfte Potenzpunkte bestimmt, und sie zu einer stetigen Curve entsprechend verbindet, dann erhält man die Potenzcurve V, welche dazu geeignet ist, fünfte Wurzeln aus gegebenen Längen l zu ziehen, wenn l grösser als die Einheit ist.

1547. Tangenten-Construction an Potenzcurven. Um in einem gegebenen Punkte T_n der n^{ten} Potenzcurve eine Tangente t zu ziehen, lehrt eine mittels Rechnung gefundene Methode (siehe Zeitschrift des österr. Ing. und Archit. Vereines, 1866) folgendes Verfahren: Man beschreibe über OA als Durchmesser einen Halbkreis 1 auf Seite der Potenzcurve, trage in der Verlängerung von OA die Strecke $AD = \frac{OA}{n-1}$ auf und verbinde T_n mit O, wodurch mit dem Halbkreise 1 ein Punkt T' entsteht. Auf der Geraden DT' steht nun die Tangente des Punktes T_n senkrecht.

1548. Reciproker Wert von l. Bezeichnet man den Schnitt von $OB_1 = l$ mit dem Kreise 1 (1547) mit B', so erkennt man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OAB und OAB', dass $OB_1 \,.\, OB' = (\lambda)^2 = 1$, also $OB' = \frac{1}{l}$ ist. Soll demnach aus einer Länge $l' < 1$ die n^{te} Wurzel gezogen werden, so wird man vorher mit l' aus O den Kreis 1 in einem Punkte B' schneiden. OB' bis an y verlängern, wodurch der reciproke Wert $l = OB_1$ von OB' ensteht. Construiert man jetzt $\sqrt[3]{l}$ (1545), und sucht von dem Resultate wieder den reciproken Wert, so ist schliesslich die Aufgabe $\sqrt[3]{l'}$ zu ziehen, gelöst, wenn $l' < \lambda$ ist.

1549. Construction von Wurzelgrössen ohne Curven.

Diese gründet sich auf die einfache Darstellung der Tangenten an eine Potenzcurve. Es sei $l > 1$ und $z = \sqrt[5]{l}$ zu suchen, wenn $\lambda = 1$ gegeben. Man ermittle D nach (1547), wobei $AD = \frac{1}{4}\, OA$ ist und ziehe den Halbkreis 1 (1548). Durch O lege man eine Gerade s, welche 1 in B', y in B_1 schneidet, erhebe OB_1 zur fünften Potenz (1545) und trage auf s das Resultat nach OB_5 auf. Wird in B_5 eine Senkrechte t auf $B'D$ gezogen; so ist t die Tangente in B_5 an die Potenzcurve V. Nun wird OB_5 nicht gleich l sein; also schneide man mit l aus O die Tangente t in einem Punkte M, welcher mit O verbunden in dem Kreise 1 einen Punkt C', auf y einen Punkt C_1 erzeugt. Abermals wird OC_1 zur fünften Potenz erhoben und das Resultat auf OM nach OC_5 aufgetragen. Fände man $OC_5 = l$, so wäre $OC_1 = \sqrt[5]{l}$. Ist aber $OC_5 \gtrless l$, so wird wieder in C_5 die Tangente t' construiert. und das Verfahren so oft wiederholt, bis man z. B. $OX_5 = l$ findet. Alsdann ist $OX_1 = \sqrt[5]{l}$. Bei einiger Uebung ist man mit zwei solchen Operationen schon am Ziele.

Räumliche geometrische Orte.

§. 80.

1550. Aufgabe. Es sind zwei Ebenen u und v gegeben. Es ist der geometrische Ort aller jener Punkte zu bestimmen, deren senkrechte Entfernung von u sich zur senkrechten Entfernung von v wie $a:b$ verhält.

Auflösung. Man lege eine Ebene w senkrecht auf die Durchschnittsgerade von u mit v und bestimme die wahre Grösse des Winkels, den die Spuren $\bar{u}_w$ $\bar{v}_w$ miteinander einschliessen (§. 39). Werden nach (1513) jene zwei Geraden gezeichnet, welche den geometrischen Ort jener Punkte bestimmen, deren senkrechte Entfernung von $\bar{u}_w$ sich zum senkrechten Abstande von $\bar{v}_w$ wie $a:b$ verhalten, und durch jede dieser Geraden eine Ebene gelegt, welche die Schnittgerade von u mit v enthält, so sind diese zwei Ebenen die gesuchten geometrischen Orte.

1551. Es wird dem Lernenden nicht schwer fallen, unter Berücksichtigung von (1515) an die Ausarbeitung zu gehen, von folgender

Aufgabe. Es ist der geometrische Ort eines Punktes M zu construieren, bei welchem die Entfernung MF von einem festen Punkte F zur Entfernung Mm von einer Ebene f in einem gegebenen Verhältnisse $a:b$ steht.

Die Resultate können Rotations-Ellipsoide, Paraboloide oder zweimantelige Rotations-Hyperboloide sein (§. 64), wobei immer die durch F zur Ebene f senkrecht gezogene Gerade p die Rotationsaxe ist.

Der Lernende versuche es, einige Eigenschaften der Linien II. Ordnung auf diese Rotationsflächen der II. Ordnung zu übertragen.

1552. Aufgabe. Es ist der geometrische Ort aller Punkte des Raumes zu construieren, bei welchen das Verhältnis der Entfernungen $MP:MP'$ von zwei fixen Punkten P und P' in dem gegebenen Verhältnisse $a:b$ steht.

Vermöge (1525) ist dieser Ort eine Kugel, welche durch Rotation des dort construierten Kreises um einen Durchmesser entsteht.

1553. Aufgabe. Es ist der geometrische Ort einer Ebene M zu construieren, welche 1. von einem gegebenen Punkte F einen bestimmten Abstand r besitzen, und 2. mit einer gegebenen Richtung p einen vorliegenden Winkel α einschliessen soll.

Auflösung. Der geometrische Ort von M für die erste Bedingung ist eine Kugel (als Umhüllungsfläche von Ebenen, 1509), deren Centrum F und Radius r ist. Der geometrische Ort von M für die zweite Bedingung ist eine senkrechte Kreiskegelfläche, deren Axe eine zu p parallele Gerade p' ist, und deren Stralen mit p' den Winkel α einschliessen (1076, 3). Wie leicht einzusehen, muss p' durch den Mittelpunkt F der Kugel gehen, und muss die Kegelfläche die Kugel umhüllen. Legt man also durch F eine Gerade p' zu p parallel, durch p' eine Ebene u, zeichnet in u aus F als Centrum mit dem Radius r einen Kreis und construiert an den Kreis zwei parallele Tangenten, deren jede mit p' den Winkel α einschliesst, so sind ihre Schnittpunkte S und S' mit p' die Scheitelpunkte der Kreiskegelflächen, welche die Kugel berühren. Jede Ebene, welche eine der beiden Kegelflächen berührt, erfüllt beide Bedingungen der Aufgabe, mithin sind diese zwei Kegelflächen als Umhüllungsflächen von Ebenen die gesuchten geometrischen Orte der Aufgabe.

1554. Aufgabe. Es ist der geometrische Ort eines Punktes M zu construieren, welcher folgende Bedingungen erfüllt: 1. Soll seine Entfernung von einem Punkte $F = l$ sein; 2. die senkrechte Entfernung von einer nicht durch F gehenden Ebene E sei $= l'$ und 3. der senkrechte Abstand von einer gegebenen, weder durch F gehenden, noch in E liegenden Geraden p sei $= l''$.

Auflösung. Der geometrische Ort für die erste Bedingung ist eine Kugel K, deren Centrum F und Radius $= l$ ist. Der geometrische Ort von M für die zweite Bedingung sind zwei Ebenen u u', die im Abstande l' von E zu E parallel geführt werden. Der geometrische Ort von M für beide Bedingungen zugleich sind die Kreise k k', in welchen die Kugel K von den Ebenen u und u' geschnitten wird. Der geometrische Ort für die dritte Bedingung ist eine senkrechte Kreiscylinderfläche, deren Axe p und deren Radius für die Kreisbasis $= l''$ ist. Schneidet man mit den Ebenen u und u' den Cylinder, so entstehen im Allgemeinen zwei Ellipsen e und e' als Schnittcurven. Da ein

Kreis k und eine Ellipse e, welche in einer Ebene liegen, vier Durchschnittspunkte haben können, so folgt, dass der geometrische Ort von M für alle drei Bedingungen durch acht einzelne Punkte gegeben ist. Es ist leicht einzusehen, dass je nach den Grössen $l\, l'\, l''$ nicht immer acht einzelne Punkte gefunden werden können; man sagt dann, die unangebbaren Punkte, deren Bestimmungsstücke jedoch gegeben sind, seien imaginär. So sind z. B. die Kugel K und die Ebene u Bestimmungsstücke eines Kreises k. Schneidet u die Kugel nicht, so ist der Kreis imaginär, also sind auch vier der gesuchten Punkte imaginär. Schneidet u die Kugel in k, den Cylinder in e und haben k und e nur zwei Durchschnittspunkte, so sind k und e auch die Bestimmungsstücke der beiden imaginären Durchschnittspunkte u. s. w.

1555. Aufgabe. Es ist der geometrische Ort eines Punktes M zu construieren, welcher von einem gegebenen Punkte F und einer gegebenen Geraden p gleiche Abstände besitzt.

Auflösung. Wählt man eine Kugel K mit irgend einem Radius l und mit F als Centrum, ferner einen senkrechten Kreiscylinder C mit p als Axe und mit l als Radius der Kreisbasis, so ist die Durchdringungslinie beider Flächen eine Linie des geometrischen Ortes. Lässt man l stetig sich verändern und construiert hinreichend viele Durchdringungslinien entsprechender Kugeln und Cylinder, so bestimmt deren Gesammtheit eine Fläche als geometrischen Ort von M.

Diese Aufgabe lässt noch eine einfachere Auflösung zu, wie folgt: Es sei A_1 ein beliebiger Punkt in p, ferner sei B_1 der Halbierungspunkt der Strecke FA_1, und E_1 eine durch B_1 senkrecht auf FA_1 geführte Ebene, dann ist jeder Punkt in E_1 von F ebenso weit entfernt, wie von A_1. Wird eine Ebene u_1 durch A_1 senkrecht auf p geführt, und die Durchschnittsgerade q_1 der Ebenen E_1 und u_1 gesucht, so muss jeder Punkt M von q_1 beiden Bedingungen der Aufgabe genügen; denn es ist 1. $MF = MA_1$ und weil 2. die Ebene u_1 senkrecht auf p steht, ist auch $MA_1 \perp p$.

Legt man durch F und p eine Ebene E, so müssen $q_1\, q_2\, q_3 \ldots$ auf E senkrecht stehen, weil jede die Schnittlinie zweier zu E senkrechten Ebenen ist. Werden die Schnitte von $q_1\, q_2\, q_3 \ldots$ mit E durch $C_1\, C_2\, C_3 \ldots$ bezeichnet, so ist jeder dieser Punkte von F ebenso weit entfernt, wie von p, also ist der Ort der Punkte

C nach (1519) eine Parabel, mithin der geometrische Ort aller Punkte der Aufgabe ein zur Ebene E senkrechter parabolischer Cylinder.

Dieses Beispiel lehrt deutlich, dass nicht alle Constructionen eines und desselben geometrischen Ortes zu einfachen Anschauungen über die Natur des Ortes führen.

1556. In welcher Weise wird man die Aufgabe lösen: den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, welcher von einer gegebenen Geraden f und einer gegebenen Ebene P gleiche Entfernungen besitzt?

1557. Aufgabe. Ein Stralenbüschel S liege mit einer ihm projectivischen geraden Punktreihe s nicht in **einer** Ebene. Welches ist der geometrische Ort aller Ebenen, von denen jede durch einen Stral von S und den verwandten Punkt in s geht?

Auflösung. Denken wir uns durch die Gerade s irgend eine Ebene u gelegt, so wird diese von dem Stralenbüschel S in einer geraden Punktreihe S' geschnitten, welche mit s projectivisch proportional sein muss. Wenn nun je zwei verwandte Punkte dieser beiden Reihen S' und s mit M' und m bezeichnet werden, dann ist die Gerade $M'm$ der Repräsentant aller Schnitte, welche die durch einen Stral von S und durch den verwandten Punkt in s gelegten Ebenen, mit der Ebene u erzeugen; und da diese Gerade $M'm$ immer durch die verwandten Punkte zweier projectivisch proportionalen geraden Punktreihen geht, so folgt nach §. 23, dass sie alle eine Linie II. Ordnung umhüllen, wenn die Punktreihen S' und s schief liegen, folglich ist in diesem Falle der geometrische Ort aller der in der Aufgabe besprochenen Ebenen ein Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher also eine Kegelfläche II. Ordnung umhüllt.

Wenn aber die Gerade s ihren verwandten Stral im Büschel S schneidet, dann ist der geometrische Ort der Ebenen ein gewöhnlicher Ebenenbüschel I. Ordnung (§. 41).

1558. Aufgabe. Man soll den geometrischen Ort jener Punkte M bestimmen, welche durch die Schnitte aller Geraden entstehen, die man von einem Punkte A auf sämmtliche durch einen anderen Punkt B gelegte Ebenen senkrecht fällt.

Auflösung. Verbindet man einen dieser Punkte M mit A, so ist AMB ein rechter Winkel und man erkennt, dass der

geometrische Ort von M eine Kugel sein muss, von welcher die Gerade AB ein Durchmesser ist.

Der Lernende wolle nachweisen: Schneidet man alle die erwähnten Ebenen und die zu ihnen senkrechten Geraden durch irgend eine zu AB senkrechte Ebene u, so entsteht in u ein Polarsystem, dessen Mittelpunkt der Schnitt von AB mit u ist.

Wenn u die Kugel schneidet, so ist der Schnittkreis die Ordnungscurve des Polarsystems; schneidet aber u die Kugel nicht, so enthält auch das Polarsystem keine Ordnungscurve (1535).

1559. Aufgabe. Ausserhalb der Ebene eines Kreises K liegen zwei Punkte A und B. Wenn man jede Ebene, welche durch eine beliebige Gerade p der Kreisebene und durch den Punkt A geht, mit jener Geraden schneidet, die man durch den Pol P der Geraden p (bezüglich des Kreises K) und durch den Punkt B zieht, welche Eigenschaften besitzt der geometrische Ort dieser Durchschnittspunkte?

Als speciellen Fall nehme man an, die Punkte A und B seien die Endpunkte eines Kugeldurchmessers. Auf der Kugel liege der Kreis K und AB sei auf der Kreisebene K senkrecht.

1560. Die Menge der Aufgaben über geometrische Orte ist zahllos. Die durchgeführten Beispiele mögen genügen, die Bestimmungsweise dieser Orte erläutert zu haben. Es bleibe nicht unbemerkt, dass viele der in den früheren Abschnitten gelösten Aufgaben in das Gebiet der geometrischen Orte gezählt werden können, insofern man die dort auftretenden Gebilde nicht als Ganzes, sondern als Zusammensetzungen aus geometrischen Elementen betrachtet, welche sämmtlich einerlei Bedingungen genügen.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Vorbegriffe.

Zweiter Abschnitt.

Das Projicieren in der Ebene.

Dritter Abschnitt.

Die Elemente der orthogonalen, axonometrischen, schiefen, centralen und collinearen Projectionen.

Seite

Vierter Abschnitt.

Entstehung, Darstellung und Untersuchung der Regel- und Curvenflächen.

Fünfter Abschnitt.

Construction der gegenseitigen Durchschnitte gegebener Flächengebilde.

Sechster Abschnitt.

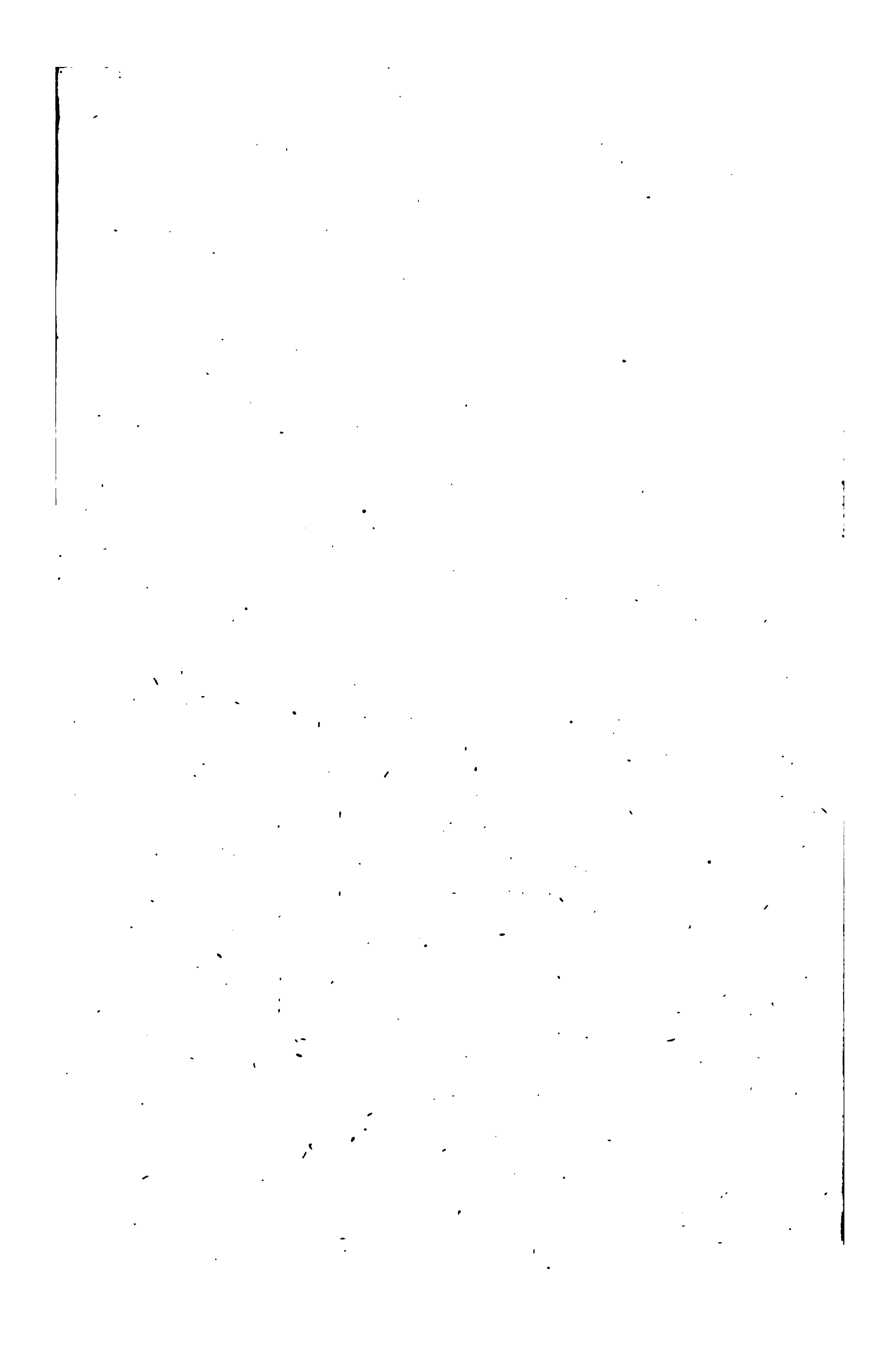
Beleuchtungs-Constructionen.

Siebenter Abschnitt.

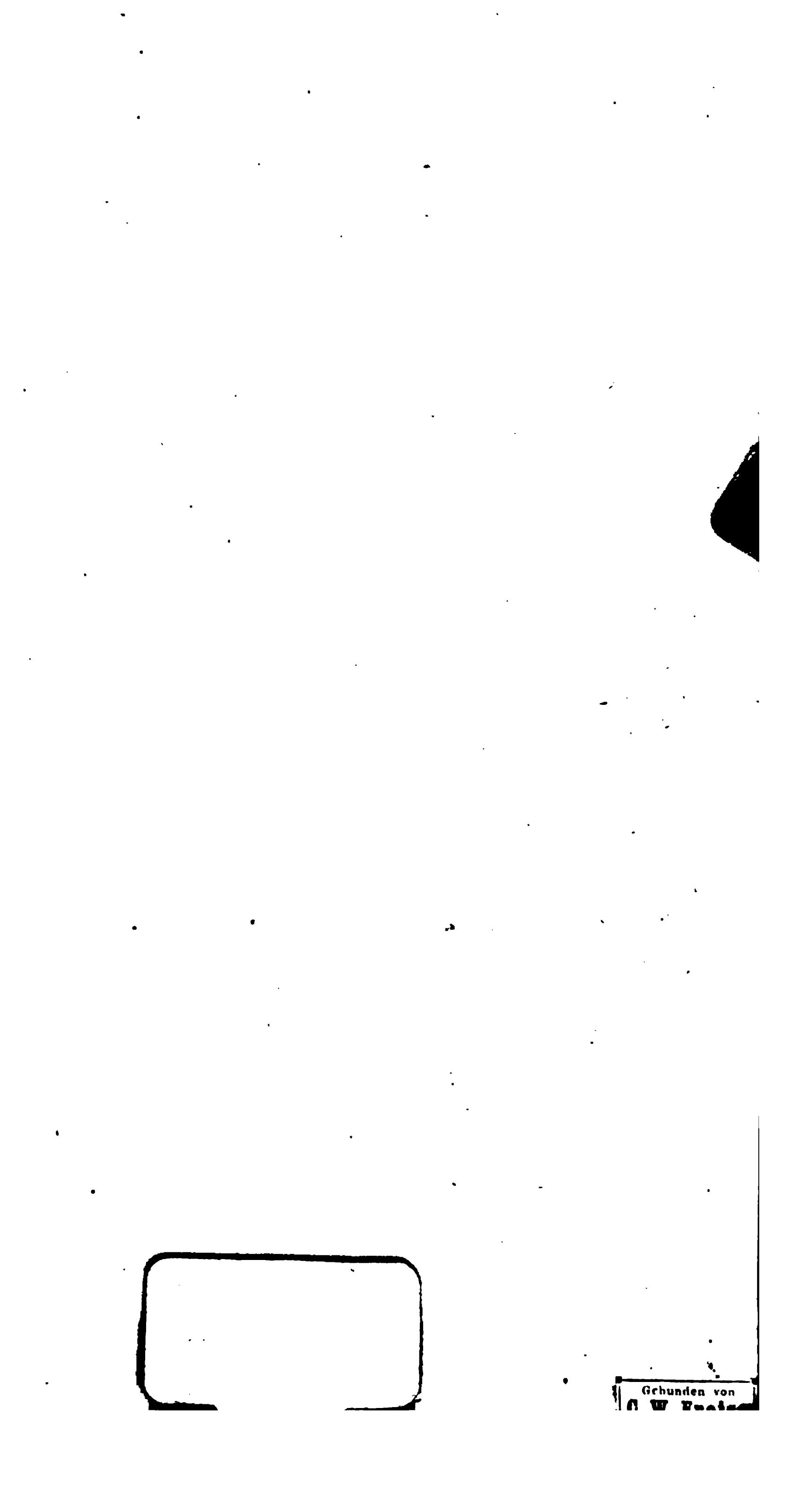
Ueber geometrische Orte.

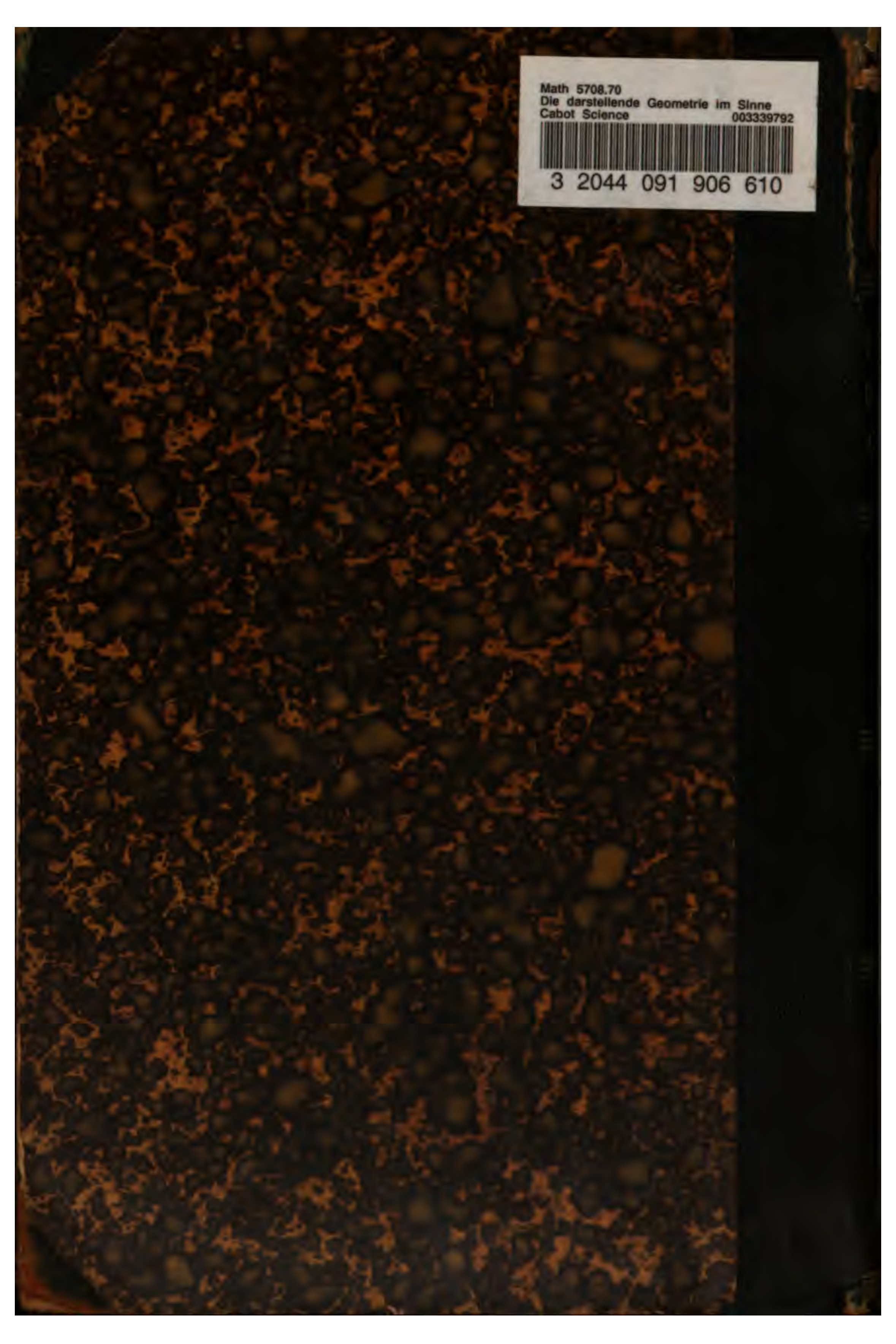
Berichtigungen.

Nr. 1 Zeile 2, lese abbilden statt: abzubilden
„ 4 „ 16, „ im Raume „ in der Luft
„ 17 „ 1, „ unbegrenzte statt: congruente
„ 17 „ 4, „ zusammenfallen müssen statt: zusammenfallen
„ 17 „ 9, nach zwei setze man begrenzte
„ 55 „ 1, lese gleichzeitig statt: gleizeitig
„ 71 „ 2, „ gleichwinklig „ gleichseitig
„ 93 „ 10, „ Linien statt: Linie
„ 93 „ 12, „ $x'x'$ statt: $x'a'$
„ 99 „ 1, „ anderen statt: an deren
„ 99 „ 4, „ senkrecht „ senhrecht
„ 154 „ 2, „ die Berührungskreisebene statt: der Berührungskreis
„ 186 „ 4, „ Linien statt: Geraden
„ 228 „ 3, „ (226) statt: (225)
„ 286 „ 4, „ ist „ st
„ 359 fehlen in Fig. 35 die Geraden MA und MB
„ 374 „ 4, lese Tangenten statt: Sehnen
Seite 90 Zeile 4 von oben, lese: und die Ellipsenaxen sind, statt: so sind die Ellipsenaxen.
Nr. 417 Zeile 1, lese Sehnen statt: Sehne
„ 421 „ 2. nach einer setze man projectivischen
„ 432 „ 13, lese dann statt: so
„ 433 „ 9, „ dann „ so
„ 457 „ 3, „ Vierseit statt: Viereck
„ 462 „ 2, „ ihm statt: ihn
„ 473 „ 6, „ proportional statt: propertional
„ 497 „ 1, „ Jenen statt: Jener
„ 517 „ 2, „ (516) statt: (517)
„ 519 „ 2, „ des statt: es
„ 564 „ 19, „ (u_3) „ (a_3)
„ 568 „ 4, ist noch hinzuzufügen: und ist der Projection an Länge gleich.
„ 587 „ 10, nach diese setze man in der
„ 587 „ 13, lese über b_1 statt: über b
„ 588 „ 12, „ c' statt: c
„ 631 „ 7, man durchstreiche das erste Bild p_1 parallel zu $\bar{u}_2$
„ 634 „ 17, lese (592) statt: (574)
„ 645 „ 6, „ rc statt: $r_1 c_1$
„ 680 „ 5, „ u „ $\bar{u}$
„ 705 „ 5, „ Spur parallelen statt: Spurparallelen
„ 707 „ 4, „ (568) statt: (581)
„ 712 „ 10, „ Parallele statt: Paralle
„ 765 „ 3, „ so, auf dass statt: so auf, dass
„ 785 „ 5, nach Umfangsseiten ist einzuschalten mit den Ebenen
„ 797 „ 11, 12, lese (u, v) statt: $(u_1 v)$
Seite 212 lese §. 41 statt: §. 35
„ 235 Zeile 12 von oben lese (b_1) statt: (b_2).
„ „ „ 7 von unten, man setze vor orthogonales ein (
Nr. 906 „ 11, lese $a_{\mathring{2}}$ statt: a_2
„ 943 „ 5, „ $\bar{u}_3$ parallel statt: $\mathring{\bar{\bar{u}}}_3$ parallel
„ 949 „ 2, „ $\bar{\bar{u}}_2$ statt $\mathring{\bar{\bar{u}}}_2$
„ 959 „ 3, „ Projectionen statt: rojectionen






Gebunden von



Math 5708.70
Die darstellende Geometrie im Sinne
Cabot Science
003339792
3 2044 091 906 610